

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.373:530.12

АЛГЕБРА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНТЕРВАЛОВ

В. И. Григорьев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Обсуждается вариант геометрии неарифметизируемого физического пространства-времени, основанный на гипотезе об индивидуальных погрешностях пространственных и временных интервалов.

По мнению многих исследователей, модификация «геометрии в малом», или, по выражению Эйнштейна, «в субатомных масштабах», не только возможна, но и необходима. Варианты такой модификации предлагались многими авторам (см., напр., [1–8]).

Обстоятельный обзор и анализ проблем «физики малых расстояний и промежутков времени» и попыток преодоления возникающих здесь трудностей составил содержание изданной в 1982 г. известной книги Д. И. Блохинцева «Пространство и время в микромире» [9].

Первый параграф этой книги называется «Арифметизация пространства-времени». Автор отождествляет понятия «элементарное событие P » и «точка P » в пространстве-времени. «Приписывание каждому событию координат мы будем называть *арифметизацией* точек пространства-времени».

Постулат о безусловной необходимости и непреодолимой возможности арифметизации является одной из основ геометрии реального пространства-времени. Таким образом, точке сопоставляется число (или конечный, или даже бесконечный набор чисел). Так обстоит дело даже в стохастической геометрии [9, § 41], где фигурируют не координаты точек, а лишь вероятности значений координат, но, как и в традиционно понимаемом вероятностном описании, предполагается, что их *реализация* может быть выражена обычными числами. Арифметизация остается и в тех попытках обобщения теории, которые предполагают увеличение числа измерений пространства (расслоения).

Арифметизация, хотя и в измененном виде, не устраняется и в различных вариантах квантования пространства-времени, где координаты перестают пониматься как C -числа, а фигурируют операторы координат и где постулат арифметизации переносится на их собственные значения. Тем из этих операторов, которые не коммутируют, отвечают «парные» ошибки, подобно тому, например, как отличие от нуля коммутатора координаты и соответствующей составляющей импульса связано с «парными» погрешностями этих величин. При этом, однако, индиви-

дуальные погрешности не обсуждаются. Например, если квантовый разброс импульсов не лимитирован, то значение координаты может быть определено точно.

Часто встречающийся термин «фундаментальная длина» обычно связывается с тем минимальным расстоянием, за пределами которого классические геометрические представления нуждаются в пересмотре. Хотя конкретный вид модифицированной геометрии, обсуждаемой в работах различных авторов, в том числе процитированных выше, может заметно различаться, но «арифметизация» в том или другом виде остается.

Иногда она претерпевает минимальные изменения. Так, в опубликованной еще в 1930 г. работе [1] на место непрерывно меняющихся координат встают дискретные значения

$$x \rightarrow x_n = l_0 \cdot n, \quad (1)$$

где n — целочисленные, а l_0 предлагается рассматривать как новый масштаб природы — фундаментальную длину.

Такой вариант модификации геометрии при всей его уязвимости для критики (нарушается, например, изотропия пространства, т. е. равноправие всех направлений) вошел в историю нашей науки как одна из первых попыток устранить так называемые расходимости в теории поля (т. е. возникающие в теориях явно неприемлемые бесконечно большие значения для ряда вычисляемых величин) при помощи модификации геометрии. Но, конечно, этот вариант модификации геометрии не связан с полным отказом от арифметизации.

Но может ли вообще быть построена геометрия без арифметизации?

Возможен ли (и оправдан ли) отказ от нее? Обсуждение этого вопроса и предлагается в настоящей работе.

Ниже предлагается попытка ответить на этот вопрос утвердительно и обсуждаются мотивы и простейший вариант такого рода обобщения теории^{*)}.

^{*)} В математике наиболее близко к отказу от арифметизации подходят работы по теории нечеткости (см., напр., [10–17]).

Одним из основных в геометрии, понимаемой как экспериментальная наука, является понятие расстояния (или более общее — пространственного и временного интервала).

Точность измерения длин определяется конструкцией «линейки», ценой минимального деления масштаба длины. Если не говорить о весьма грубых твердотельных линейках, где предельная точность измерений лимитируется атомными масштабами, то на первое место выдвигаются всевозможные волновые методы измерения длин^{*)}. Здесь роль цены деления играет минимальная длина волны, или максимальная энергия кванта. Если при измерении длины могут быть использованы волны сколь угодно малых длин, то нижнего предела точности измерения расстояний (а значит, вообще и координат) не существует. Так, по рассеянию электромагнитных квантов сколь угодно высоких энергий на электроны (а все измерения вообще в конечном итоге сводятся к исследованиям процессов рассеяния) можно было бы сколь угодно точно установить его местонахождение, если он точечный (в буквальном, наглядном геометрическом смысле этого слова)^{**)}.

Но если необходим отказ от возможности сколь угодно точного определения длин, то это означает, что арифметизация пространства — операция, которой нельзя поставить в соответствие реализуемую (существующую хотя бы в принципе) физическую процедуру, что необходимо изначально введение индивидуальных погрешностей длин^{***)}. Если принять это имеющее принципиальную значимость утверждение, то нужно, отказавшись от «точной арифметизации», заменить ее иной, более физической процедурой. Но на языке математики это означает, что на место координат — чисел (или набора чисел), точно и однозначно определяющих положение точек пространства, — следует поставить некие новые математические объекты, не сводящиеся ни к обычным числам, ни к их вероятностным распределениям. Эти новые математические объекты можно условно назвать псевдокоординатами. Введение таких величин требует указания правил действия над ними, т. е., кратко говоря, «алгебры» псевдокоординат.

Примем, что отказ от возможности точной «арифметизации» можно понимать как введение принципиально неустранимой индивидуальной погрешности длин. Если масштаб этой погрешности δ принять за единицу длины (это и будет выступать в роли фундаментальной длины), то все остальные длины оказываются безразмерными.

Введение индивидуальной погрешности длины сразу же влечет за собой и введение индивиду-

альной погрешности промежутков времени τ_0 . Действительно, если бы последняя отсутствовала, то сразу можно было бы ввести в качестве минимальной погрешности длин сколь угодно малую величину $C\tau_0$ ^{*)}.

«Алгебра погрешностей» должна быть необычной. Действительно, сохранив гипотезу об аддитивности длин, рассмотрим отрезок AB , длина которого (в указанных выше единицах) равна $L_{AB} = I_{AB} + \delta_L$, где I_{AB} — обычное C -число, а δ_L — погрешность, или, иначе говоря, элемент алгебры погрешностей.

Но участок AD можно разбить на N частей AP_1 , P_1P_2 , ..., $P_{N-1}B$ и, как указано выше, принять, что каждый из составных отрезков также определяется с погрешностями $\delta_{l_1} = \eta$, ..., $\delta_{l_N} = \eta$.

Это приводит к следующему соотношению, определяющему всю алгебру погрешностей:

$$\eta + \eta + \dots + \eta = N\eta = \eta. \quad (2)$$

Иначе говоря, умножение погрешности на любое отличное от нуля C -число не изменяет ее.

Можно, таким образом, утверждать, что индивидуальные погрешности длин в модифицированной геометрии в алгебраическом отношении подобны нулям в традиционной « C -численной геометрии». Образно говоря, в модифицированной геометрии «точкам» приписывается некая протяженность.

Погрешности длин, а значит, и погрешности координат (как и промежутков времени) не являются C -числами и не могут быть выражены через них: это означает, что от арифметизации пространства в традиционном ее понимании, учитывая (1), предлагается отказаться. Это требует построения нового математического аппарата описания, простейший вариант которого и намечается ниже.

На месте принимающих непрерывные значения C -численных координат $X, \dots$ в теории с арифметизуемым пространством будут теперь стоять псевдокоординаты $X + \delta_X$, где к обычным C -числам прибавляются элементы алгебры погрешностей.

В упоминавшихся выше прежних вариантах модификации «геометрии в малом» введение фундаментальных длин встречало очевидное затруднение. Введение такой фундаментальной длины l_0 в некоторой системе отсчета после перехода в новую систему K' , движущуюся относительно K , порождает благодаря релятивистскому сокращению масштабов новую фундаментальную длину l'_0 , которая может быть в любое число раз меньше l_0 . Введение же фундаментальной длины как инвариантной (благо-

*) Имеются в виду не только электромагнитные волны.

**) Конечно, нельзя не учитывать, что чем больше энергия кванта, тем больший вклад вносят квантовые процессы, например рождение пар, так что к допущению о возможности локализации точки нужно относиться осторожно.

***) В отличие от упомянутых выше «парных» погрешностей.

*) Опасение, что введение индивидуальных погрешностей длин и промежутков времени несовместимо с использованием константы C как точно определяемой величины, устраняется тем, что скорость света c — это одна из фундаментальных физических констант, один из масштабов природы, для введения которого вовсе не обязательно опираться именно и только на непосредственное измерение скорости.

даря условию (2)) индивидуальной погрешности, устраняет это противоречие.

Использование оператора G_n позволяет произвести естественное обобщение правила дифференцирования:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x^n} \rightarrow G_n \frac{\partial F(x)}{\partial x^n}.$$

Поскольку функции $F(x)$ от регулярных аргументов являются также регулярными, т.е. C -численными, а произведение C -числа на η в силу (2) дает опять-таки η , то $G_n F(x) \rightarrow \eta + F(x)$. Это приводит к несколько неожиданному выводу: погрешности всех функций от безразмерных псевдокоординат одинаковы.

Переход от теорий, основанных на представлениях об арифметизуемых пространствах к теориям, где эти представления указанным выше образом модифицируются, оказывается, таким образом, тривиальным: ко всем наблюдаемым величинам традиционной теории попросту прибавляются (одинаковые!) соответствующие случайные безразмерные величины.

В предлагаемой здесь модифицированной теории, где используются псевдокоординаты, благодаря (2) погрешности длин выступают как инварианты.

Что же касается C -численных «регулярных» частей координат, то для них сохраняют силу обычные преобразования Лоренца.

Поскольку все наблюдаемые величины в описываемом варианте теории представляются в конечном итоге как функции псевдокоординат, встает вопрос об их сравнении с экспериментом.

Так как псевдокоординаты содержат неустранимые погрешности, последние неизбежно появятся и в (приведенных к безразмерному виду) выражениях для наблюдаемых величин. Таким образом, обсуждаемое обобщение геометрии приводит к выводу, что экспериментальные данные в области

весьма высоких энергий должны быть неоднозначными, что они должны содержать неустранимый разброс, не обусловленный случайными факторами эксперимента. Обнаружение такого разброса явилось бы проявлением «неклассичности» геометрии, а его масштаб — указанием на масштаб фундаментальной длины.

Еще один очевидный путь экспериментального исследования — увеличение не энергии, а точности экспериментальных данных.

Литература

1. *Ambarzumian V., Ivanenko D.* // *Zs. Phys.* 1930. **64**. P. 563.
2. *Snyder H.* // *Phys. Rev.* 1947. **71**. P. 38; *Phys. Rev.* 1947. **72**. P. 68.
3. *Кадышевский В.Г.* // *ЖЭТФ*. 1961. **41**. С. 1885; *ДАН СССР*. 1962. **147**. С. 1336; *Nucl. Phys.* 1968. **136**. P. 125.
4. *Ingraham R.L., Bailey D.T.* // *Nuovo Cimento. Ser. X.* 1964. **33**. P. 246; *Nuovo Cimento. Ser. X.* 1964. **33**. P. 246.
5. *Ingraham R.L.* // *Nuovo Cimento. Ser. X.* 1964. **33**. P. 246; *Nuovo Cimento. Ser. X.* 1964. **34**. P. 182.
6. *Тамм И.Е.* // Тр. XII Междунар. конф. по физике высоких энергий. Т. II. 1964. С. 229.
7. *Киржниц Д.А., Чечин В.А.* // *Письма в ЖЭТФ*. 1971. **14**. С. 261; *Ядерная физика*. 1972. № 5. С. 1051.
8. *Вяльцев А.Н.* *Дискретное пространство-время*. М., 1965.
9. *Блохинцев Д.И.* *Пространство и время в микромире*. М., 1982.
10. *Zade L.A.* // *Fuzzy Sets Inf. Control.* 1965. **8**. P. 338.
11. *Математика сегодня*. № 7. М., 1974.
12. *Гусев Л.А., Смирнова И.М.* // *Автоматика и телемеханика*. 1973. № 59. С. 66.

Поступила в редакцию
25.10.2005