ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530

ОБОБЩЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Б. А. Гришанин, В. Н. Задков

(*кафедра общей физики и волновых процессов*; *Международный учебно-научный лазерный центр*)

E-mail: zadkov@phys.msu.ru

Предложенная нами ранее в работе [1] общая структура обобщенных квантовых измерений с минимальными возмущениями начальной информации рассматривается в приложении к измерению континуальных квантовых переменных и выявляются ее качественные особенности в сравнении с аналогичным традиционным вариантом полностью деквантующего измерения, описываемого соответствующей ему положительно определенной операторной мерой.

Введение

Квантовые физические системы по сравнению с классическими обладают специфической особенностью, проявляющейся в существенно большем разнообразии их свойств в зависимости от способа их использования. В теоретическом плане это отражается в форме соответствующего многообразия аспектов, в рамках которых может рассматриваться, казалось бы, одна и та же — в классическом пределе — проблема. Поэтому неудивительно, что время от времени возникает необходимость возвращаться к изучению одних и тех же проблем под новым углом зрения. Как показал опыт (в частности, обсуждения парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена [2]), такой возврат подчас может давать и практический выход (каковым в указанном примере можно считать создание квантовой криптографии [3]).

Одной из фундаментальных проблем квантовой теории является проблема квантового измерения, в обсуждении которой можно, вообще говоря, проследить множество различных аспектов [4–7]. В контексте данной работы в качестве основных следует выделить два следующих аспекта, относящихся к возможностям отображения классическими системами информации, содержащейся в квантовых системах. Это, во-первых, выяснение принципиальной возможности получения абсолютно точных результатов измерения для совместно измеримых [8] и, во-вторых, возможность получения приближенных — с точностью до минимальной квантовой неопределенности — результатов измерения для совместно неизмеримых квантовых переменных [9] (обсуждение данной проблемы с использованием более общей математической техники и обзор литературы можно найти в работе [10]).

Предположение о классичности измерительной системы представлялось совершенно естественным для стадии освоения фундаментальных положений квантовой теории, на которой экспериментальное вмешательство в квантовый объект с извлечением из него информации представлялось довольно грубым процессом. Однако в настоящее время, когда над квантовыми системами различного типа свободно выполняются серии обратимых квантовых преобразований и такие квантовые системы, как фотоны, свободно используются для реализации протоколов квантовой криптографии, такое ограничение, по нашему мнению, требует пересмотра. А именно под измерительным прибором (далее — прибор) следует понимать в общем случае существенно квантовый объект, а дает ли он результат измерения в квантовой или классической форме, определяется его окружением и соответственно должно отображаться конкретным видом преобразования, фактически реализованного в системе объект–прибор. Эта идея в наиболее компактной форме отображается введением преобразования *перепутывающего* измерения [11]. Оно в предельных случаях сводится либо к стандартному квантовому измерению с классическим представлением его результата, либо к унитарному преобразованию в системе объект–прибор, для которого результат измерения представляется в чисто квантовой форме перепутанности, устанавливающей 100%-ную корреляцию между выделенными переменными объекта и прибора.

Выделение перепутывающего измерения среди множества прочих преобразований связано с тем, что оно, не возмущая выделенный набор состояний $|k\rangle_A$ объекта, позволяет распределить его среди множества квантовых систем. В предельном случае чисто когерентного измерения такое преобразование при фиксированном начальном состоянии прибора $|0\rangle_B$ отображает начальные базисные состояния объекта $|k\rangle_A$ дублированными состояниями объект–прибор $|k\rangle_A |k\rangle_B$, а произвольные линейные комбинации $\sum_k c_k |k\rangle_A$ — такими же линейными комбинациями дублированных состояний. Когерентные же квантовые соотношения между волновыми функциями объекта теперь переносятся на те же соотношения в системе объект–прибор, т. е. не сохраняются в объекте в силу невозможности дублирования существенно квантовой информации. Стандартное же квантовое измерение сопровождается дополнительной потерей начальных фазовых соотношений. Идея квантового измерения, таким образом, в общем случае связывается не с классичностью физического представления добытой информации, а с более первичным понятием классичности — возможностью ее неограниченного размножения. Такой подход позволяет рассматривать процессы извлечения и преобразования квантовой информации с единых позиций, пригодных как для классических, так и для квантовых приборов.

Помимо концепции перепутывающего измерения как установления взаимно однозначного соответствия между наборами классически совместных состояний квантовых систем объекта и прибора, по аналогии со случаем классического прибора, можно также ввести обобщенные типы измерения. Как показано в работе [1], можно выделить два основных варианта измерения как установления соответствия посредством классического информационного индекса: а) «нечеткое» измерение как установление соответствия между классически совместным набором состояний объекта и неполностью различимым набором квантовых состояний прибора (фактически это простейший частный случай так называемых «рыхлых» измерений [12, 13]) и б) частично разрушающее квантовое измерение как установление соответствия между не полностью различимым набором состояний объекта и классически совместным набором состояний прибора.

В [1] были рассмотрены примеры указанных обобщенных измерений двухуровневых квантовых систем. Однако существенный интерес представляет и рассмотрение такого типа измерений для случая систем с бесконечномерными пространствами состояний, когда речь идет об измерении динамических переменных с континуальными значениями. В частности, особый интерес представляет — в силу наличия естественного простого соответствия между наборами канонических переменных в системе объект–прибор — измерение с помощью классически совместного набора координат двух осцилляторных (скажем, фотонных) мод, играющих роль измерителя, двух классически несовместных квадратурных компонент одной моды, играющей роль объекта. Тогда можно ожидать, что простота устанавливаемого при таком измерении соответствия является основанием для возможности его экспериментальной реализации, например, методами нелинейной оптики. Кроме того, измерения данного типа выявляют в наиболее общей и концентрированной форме фундаментальные свойства процесса извлечения информации из квантовых систем, начиная с квантовых ограничений на потенциальную точность измерения и заканчивая количественными характеристиками шумов деквантования.

1. Преобразование континуального измерения канонического набора квантовых переменных

Простейшим и наиболее фундаментальным примером измерения континуальных переменных является рассматриваемое практически во всех учебниках квантовой механики измерение координаты электрона $\hat{q}$. Как известно, только эта половина полного набора канонических динамических переменных $\hat{X}^\top = (\hat{q}, \hat{p})$ ($\top$ — символ матричного транспонирования) квантовой системы с одной степенью свободы в квантовой теории, в отличие от классической, может быть измерена точно.

Для установления боле полной связи квантовой и классической теории логически необходимо рассмотрение и такого измерения, которое дает минимально возможную неточность для обеих канонических переменных $\hat{X}$ и обеспечивает в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$ их точное измерение. Измерения такого типа не только возможны [9], но и при соответствующих условиях являются оптимальными [10, 14, 15]. В их основе лежит тот простой факт, что квантовая система с удвоенным числом степеней свободы содержит столько же совместно измеримых операторов координат, сколько содержится в полном наборе канонических переменных объекта. Измерения данного типа естественно возникают в рамках подхода [1], включающего обобщение на существенно квантовые измерительные приборы на основе концепции перепутывающего измерения и отказ от требования неразрушающего характера измерения на квантовом уровне точности.

1.1. Супероператор частично разрушающего измерения

Измерение в компактной форме описывается супероператором, отображающим матрицы плотности объекта $\hat{\rho}_A$ в матрицы плотности системы объект–прибор $\hat{\rho}_{AB}$. Поскольку начальное состояние измерительного прибора целесообразно считать фиксированным в форме чистого состояния $\hat{\rho}_B^0 = |0\rangle_B \langle 0|_B$, то соответственно полное преобразование в системе объект–прибор, которое для произвольных начальных состояний может быть реализовано различными эквивалентными способами, не представляет интереса.

Супероператор, описывающий в общем случае частично разрушающее перепутывающее измерение набора неортогональных состояний объекта $|\alpha)_A$ с помощью набора ортогональных, т. е. классически различимых, состояний прибора $|\alpha\rangle_B$, имеет вид

$$\mathcal{M} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\alpha \nu_\beta}\,(\alpha|_A \odot |\beta)_A\,|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B\,\langle\beta|_B\,(\beta|_A\,. \tag{1}$$

Здесь $R_{\alpha\beta}$ — матрица перепутанности, удовлетворяющая условиям $R = R^+$, $R_{\alpha\alpha} \equiv 1$, $R \geqq 0$ и определяющая степень деквантования результатов измерения за счет взаимодействия прибора с дефазирующей системой D (в простейшем случае отображаемой матрицей перепутанности вида $R_{\alpha\beta} = (\alpha|\,\beta)_D$ [16]), а набор положительных чисел ν_α описывает степень представленности соответствующих состояний $|\alpha)_A$ и определяет соответствующую положительную операторно-значную меру (POVM)

$$\hat{E}_\alpha = \nu_\alpha\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A\,, \quad \sum \hat{E}_\alpha = \hat{I}_A. \tag{2}$$

Предельные случаи $R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta} = 1$ описывают стандартное проективное измерение, соответствующее полной дефазировке измеряемых состояний, и обратимое изометрическое отображение гильбертова пространства объекта в пространство состояний объект–прибор, соответствующее отсутствию дефазировки.

В случае ортогонального набора состояний $|\alpha)_A = |\alpha\rangle_A$ данный супероператор преобразует начальные состояния данного вида в состояния $|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B$ системы объект–прибор, т. е. является неразрушающим. Неортогональность же измеряемых состояний приводит к невозможности их сохранения и соответственно к частично разрушающему характеру измерения. При этом нетрудно видеть, что подалгебры классически совместимых состояний и соответствующих им динамических переменных асимптотически — при наличии соответствующего малого параметра неклассичности — не искажаются, т. е. данное измерение, рассматриваемое на классическом уровне, является точным и невозмущающим.

Ограничимся для простоты случаем одномерного (одномодового) объекта, которому соответствует коммутатор канонических переменных

$$\hat{X}\hat{X}^\top - (\hat{X}\hat{X}^\top)^\top = C = \begin{pmatrix} 0 & i\hbar \\ -i\hbar & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая на плоскости с координатами q, p равномерную сетку с точками $X_\alpha = (q_\alpha, p_\alpha)$, выберем в выражении (1) в качестве измеряемых состояний $|\alpha)_A$ состояния, получаемые преобразованием сдвига $U(X_\alpha) = \exp\left(-X_\alpha^\top C^{-1}\hat{X}\right)$, начального состояния $|0)_A$:

$$|\alpha)_A = U(X_\alpha)\,|0)_A\,; \tag{3}$$

при этом $U^{-1}(X_\alpha)\hat{X}U(X_\alpha) = \hat{X} + X_\alpha$. При этом в качестве базисного состояния $|0)_A$ можно выбрать состояние, характеризуемое проектором

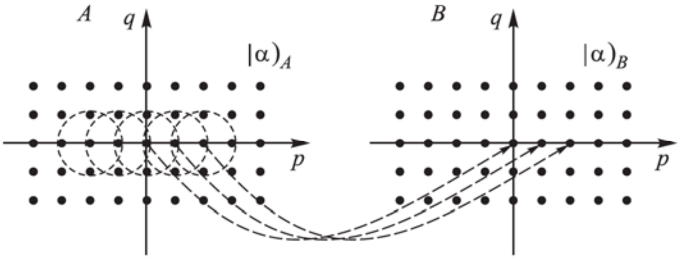
$$|0)_A\,(0|_A = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\Gamma - \frac{1}{\varepsilon}\hat{X}^\top Q_0 \hat{X}}, \tag{4}$$

получаемым как предел гауссовской матрицы плотности с квадратичной формой, определяющей в общем случае сжатое состояние с повернутым эллипсом рассеяния.

Кратность состояний при этом должна быть выбрана в виде

$$\nu_\alpha = \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar}, \tag{5}$$

где dX_α описывает объем ячейки в расчете на одно состояние $|\alpha)_A$. В этом случае, как это хорошо известно для случая $|\alpha)_A$ в форме когерентных состояний [10, 17], набор операторов (2) в пределе $dX_\alpha \to 0$ действительно соответствует POVM, и, следовательно, преобразование (1) задает соответствующее обобщенное измерение с результатами измерения, представленными в форме классически различимых (ортогональных) состояний $|\alpha\rangle_B$. Преобразование континуального измерения набора канонических квантовых переменных, таким образом, определяется как предельный переход к бесконечно плотной сетке. Соответствующее отображение проиллюстрировано на рисунке.



Отображение элементарных состояний в процессе обобщенного измерения. Показана квантовая неопределенность значений координат и импульсов, соответствующая измеряемым состояниям объекта $|\alpha)_A$, отображаемым классически различимыми состояниями прибора $|\alpha\rangle_B$

Для установления на основе описанного отображения квантовых состояний соответствия между переменными $\hat{X}$ объекта и соответствующими коммутирующими переменными $\hat{X}_B$ следует учесть представление

$$\hat{X}_B = \sum_\alpha X_\alpha\,|\alpha\rangle_B\,\langle\alpha|_B \tag{6}$$

для дискретных показаний измерительного прибора. В пределе бесконечно плотной сетки состояний это выражение описывается обобщенными матричными элементами вида $(\hat{X}_B)_{X'X''} = \int X\,\delta(X' - X)\,\delta(X'' - X)\,dX$. Фактически при описанных характеристиках измерение (1) отличается от рассмотренных в [9, 10, 12, 14] лишь одним новым качеством — в общем случае существенно квантовым представлением выходной информации, выражаемым наличием матрицы перепутанности $R_{\alpha\beta}$, отличной от единичной.

Рассматриваемое измерение полностью неселективно по отношению к трансляциям в фазовом пространстве канонических переменных $\hat{X}$ и в этом отношении является аналогом неселективного частично разрушающего измерения в двухуровневой системе [1]. Однако в отличие от последнего, инвариантного относительно любого унитарного преобразования входного состояния, оно все же селективно по отношению, например, к операции сжатия или поворота эллипса рассеяния входного состояния, определяемых квадратичной формой Q_0.

1.2. Количественные характеристики измерения

Во-первых, рассчитаем для начального состояния $\hat{\rho}_A = |\alpha_0)(\alpha_0|$ среднеквадратичную ошибку измерения

$$\Delta_S = \mathrm{Tr}(\hat{X}_B - X_{\alpha_0})^\top Q(\hat{X}_B - X_{\alpha_0})\mathcal{M}\hat{\rho}_A \tag{7}$$

для параметров этого состояния, характеризующую «полуклассические» свойства измерительного канала. Здесь Q — матрица квадратичной формы, учитывающая вклад составляющих компонент измеряемого вектора. При таком подходе фактически оценивается информативность полуклассического информационного канала $\alpha_0 \to \hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A\,\mathcal{M}\hat{\rho}_A$, реализованного с помощью измерения $\mathcal{M}$. Другой мерой информативности является информация Холево [18].

Подставляя в (1) в качестве начального состояния гауссовскую матрицу плотности в форме $\hat{\rho}_A = \exp\left[\Gamma - (\hat{X} - X_{\alpha_0})^\top Q_0(\hat{X} - X_{\alpha_0})/\varepsilon\right]$ при $\varepsilon \to 0$, которая соответствует когерентно смещенному преобразованием $U(X_{\alpha_0})$ вакууму $|0)$, $\hat{X}^\top Q_0 \hat{X}\,|0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,|Q_0 C|\,|0)$, с использованием стандартной техники преобразований гауссовских операторов [19], получаем для распределения X_α гауссовскую плотность с матрицей рассеяния $2K_0$, вдвое превышающей вакуумную:

$$\nu_\alpha|\,(\alpha|\,\alpha_0)_A|^2 \to \frac{dX_\alpha}{\det(4\pi K_0)} e^{-\frac{1}{4}X_\alpha^\top K_0^{-1}X_\alpha},$$

$$K_0 = \frac{1}{2}C\,\mathrm{sign}Q_0 C$$

и соответственно

$$\Delta_S = \sum (X_\alpha - X_{\alpha_0})^\top Q(X_\alpha - X_{\alpha_0})\nu_\alpha|\,(\alpha|\,\alpha_0)_A|^2 = \\ = 2\,\mathrm{Tr}\,QK_0.$$

Для квадратичных форм с матрицами $Q = Q_0$, соответствующими гамильтониану $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{q}^2/2$ одного и того же гармонического осциллятора, отсюда следует содержащийся в неявном виде в [10] результат $\Delta_S = \mathrm{Tr}\,|QC| = \hbar\omega$, т.е. квадратичная неопределенность равна удвоенной энергии вакуумных флуктуаций. Их удвоение имеет принципиальный характер и обусловлено добавлением к начальным квантовым флуктуациям переменных $\hat{X}$ в состоянии $|\alpha_0)_A$ шумов деквантования, содержащихся в переменных $\hat{X}_B$ и независимых от этих флуктуаций.

Среднеквадратичная ошибка для канонических операторов объекта $\hat{X}$

$$\Delta_Q = \mathrm{Tr}(\hat{X}_B - \hat{X})^\top Q(\hat{X}_B - \hat{X})\mathcal{M}\hat{\rho}_A, \tag{8}$$

имеющая место после выполнения измерения, характеризует измерение как квантовый канал, дающий информацию о классически несовместных квантовых переменных объекта. Аналогичный предыдущему расчет для состояния объекта $\hat{\rho}_A\,|\alpha_0)\,(\alpha_0|$ теперь, с учетом инвариантности разностного оператора $\hat{X}_B - \hat{X}$ и его диагональности по состояниям $|\alpha\rangle_B$, дает

$$\Delta_Q = \sum \nu_\alpha\,(\alpha|\,\hat{\rho}_A\,|\alpha)\,\langle\alpha|_B\,(\alpha|_A\,(\hat{X}_B - \hat{X})^\top \times \\ \times Q(\hat{X}_B - \hat{X})\,|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B = (0|_A\,\hat{X}^\top Q\hat{X}\,|0)_A = \mathrm{Tr}\,QK_0,$$

что в два раза меньше величины ошибки для измерителя как полуклассического канала.

Эта ошибка равна минимально возможной, совместимой с некоммутативностью операторов $\hat{X}$ и соответственно $\hat{X}_B - \hat{X}$. Таким образом, можно утверждать, что измерение (1) не только дает эффективную оценку для параметров когерентного гауссовского состояния, но и может рассматриваться как способ получения оптимальной оценки для самих канонических переменных $\hat{X}$ квантового объекта независимо от вида матрицы перепутанности R и соответственно от степени когерентности выполняемого преобразования.

Частично разрушающий характер измерения (1) проявляется в изменении начального состояния при отображении $\hat{\rho}_A \to \hat{\rho}'_A = \mathcal{M}_A\hat{\rho}_A$, где $\mathcal{M}_A = \mathrm{Tr}_B\,\mathcal{M}$ — супероператор преобразования состояний объекта безотносительно к результату измерения. В случае двухуровневого объекта соответствующий супероператор представляется через векторы операторов квазиспина $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ в форме $\mathcal{M}_A = \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \odot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ [1] и разрушающий характер измерения для начального состояния $\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}(\hat{I} + \boldsymbol{s}\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ проявляется в его деполяризации $\boldsymbol{s} \to \frac{1}{3}\boldsymbol{s}$. В рассматриваемом случае имеем $\mathcal{M}_A = \int \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar}\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A\,(\alpha|_A \odot |\alpha)_A$ и для начального состояния $\rho_A = |0)_A\,(0|_A$ получаем искаженное состояние в виде

$$\hat{\rho}'_A = \int \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar}|\,(\alpha|\,0)_A|^2\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A = \\ = \int \frac{dX_\alpha}{\det^{1/2}(4\pi K_0)}\,e^{-\frac{1}{4}X_\alpha^\top K_0^{-1}X_\alpha}\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A = \\ = \frac{1}{\det^{1/2}(6\pi K_0)}\mathcal{W}\,e^{-\frac{1}{6}\hat{X}^\top K_0^{-1}\hat{X}},$$

где символ $\mathcal{W}$ обозначает симметричное по операторам $\hat{q}, \hat{p}$ упорядочение Вигнера. Соответствующая этой гауссовской матрице плотности корреляционная матрица равна $3K_0$. Нетрудно видеть, что и для смещенных начальных состояний вида $|\alpha_0)_A$ возмущение при измерении также сводится к утроению матрицы рассеяния $K_0 \to 3K_0$. В случае же произвольных гауссовских состояний $\hat{\rho}_A$ с корреляционной матрицей K и средним значением $X_0 = \langle \hat{X} \rangle$ искаженное состояние характеризуется изменением корреляционной матрицы $K \to K + 2K_0$ при сохранении среднего значения согласно справедливому для корреляционных гауссовских матриц плотности соотношению

$$\sum \nu_\alpha \, (\alpha| \, \hat{\rho}_A \, |\alpha) \, |\alpha) \, (\alpha| \to K + 2K_0.$$

Для чистого когерентного состояния $\hat{\rho}_A = |\alpha_0) \, (\alpha_0|$ соответствует $3K_0$.

2. Шумы деквантования

С учетом изометричности преобразования $\mathcal{M}$ при $R_{\alpha\beta} \equiv 1$ имеем для произвольной скалярной функции f тождество $\mathrm{Tr}\, f[\mathcal{M}\hat{\rho}_A] = \mathrm{Tr}\, f[\hat{\rho}_A]$, из которого следует, что что энтропия системы объект–прибор после такого полностью когерентного измерения совпадает с исходной энтропией объекта и равна нулю в случае его чистого состояния, которому соответствует матрица плотности $K = K_0$: $S_{AB}[K]\big|_{K=K_0} = 0$. Из-за неортогональности состояний $|\alpha)_A$ они кодируются в сложной комбинации ортогональных двухкомпонентных состояний $|\alpha)_A \, |\alpha\rangle_B$. Явный вид отображения квантовой информации $A \to A{+}B$ задается соответствующим выражениями для переполненного базиса

$$|\alpha)_A \to \sum_\beta \sqrt{\nu_\beta} \, (\beta| \, \alpha)_A \, |\beta)_A \, |\beta\rangle_B \, .$$

При переходе к стандартному измерению двухчастичные состояния $|\alpha)_A \, |\alpha\rangle_B$ приобретают дополнительную степень свободы, которая соответствует независимым ортогональным состояниям $|\alpha\rangle_D$ дефазирующей подсистемы — дробовой шум. Тем самым энтропия системы объект–прибор отражает независимые флуктуации деквантования и соответственно неограниченно растет с уменьшением объема ячейки измерительной сетки.

Для расчета эффекта дробового шума, вносимого дефазирующей подсистемой при частичном деквантовании результата измерения, рассмотрим совместную матрицу плотности

$$\rho^{AB}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \rho^A_{\alpha\beta} \sqrt{\nu_\alpha} \sqrt{\nu_\beta}. \tag{9}$$

При $R_{\alpha\beta} \equiv 1$ она определяет изометрическое отображение входной матрицы плотности, и их энтропии совпадают, что соответствует отсутствию шумов деквантования. Неравенство же $R_{\alpha\beta} \neq 1$ описывает селекцию дефазирующей подсистемой классически совместных состояний прибора $|\alpha\rangle_B$, когерентно связанных при $R_{\alpha\beta} \equiv 1$. Вводимая ею фазовая неопределенность в системе объект–прибор нарушает когерентность отображения и приводит тем самым к деквантованию результирующего набора состояний. Естественной мерой вносимых шумов деквантования является соответствующее приращение энтропии по сравнению с полностью когерентным измерением

$$\Delta S_d = S[\hat{\rho}_{AB}] - S[\hat{\rho}_{AB}]\big|_{R\equiv 1} S[\hat{\rho}_{AB}] - S[\hat{\rho}_A]. \tag{10}$$

Рассчитаем ΔS_d для *квазиклассических* матриц плотности объекта $\hat{\rho}_A$, которые определим следующим образом:

$$\rho^A_{\alpha\beta} \approx dX_\alpha w(X_\alpha) \, (\alpha| \, \beta), \tag{11}$$

где $w(X_\alpha)$ определяет вигнеровскую плотность распределения вероятностей, медленно меняющуюся в масштабах элементарной фазовой ячейки с объемом $2\pi\hbar$. Соответствующая энтропия рассчитывается с учетом соотношения $(\rho^A_{\alpha\beta})^n = [w(X_\alpha) 2\pi\hbar]^{n-1} w(X_\alpha) \, dX_\alpha \, (\alpha| \, \beta)$, вытекающего из условия полноты (2) состояний $|\alpha)$ и выражения (5), и дается хорошо известным в статистической физике квазиклассическим выражением

$$S[\hat{\rho}_A] = -\int \log[w(X) 2\pi\hbar] w(X) dX. \tag{12}$$

Здесь фазовый объем $2\pi\hbar$ отображает квантовую неразличимость состояний α, учитываемую в представлении (11) фактором $(\alpha| \, \beta)$.

При расчете же энтропии $S[\hat{\rho}_{AB}]$ с учетом наличия дефазировки $R_{\alpha\beta}$ рассмотрим случай интенсивной дефазировки, когда недиагональные матричные элементы $R_{\alpha\beta}$ спадают как функция разности $X_\alpha - X_\beta$ значительно быстрее, чем на масштабе элементарного фазового объема $2\pi\hbar$, соответствующего фактору квантовой неортогональности $(\alpha| \, \beta)$. Тогда в выражении для совместной матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$ последним фактором можно пренебречь и исходить из выражения

$$\rho^{AB}_{\alpha\beta} \approx dX_\alpha w(X_\alpha) R_{\alpha\beta}.$$

Эта аппроксимация позволяет получить аналогичную вышеприведенной асимптотическую оценку $S[\hat{\rho}_{AB}] = -\int \log[w(X) v_c] w(X) \, dX$, которая взамен элементарного квантового объема содержит соответствующий $R_{\alpha\beta}$ *объем когерентности* v_c. Этой оценке соответствует следующее выражение для приращения энтропии

$$\Delta S_d = \int \log\left(\frac{2\pi\hbar}{v_c}\right) w(X) \, dX, \tag{13}$$

справедливое при $v_c \ll 2\pi\hbar$ и в общем случае учитывающее возможную зависимость объема когерентности v_c от фазовых переменных X. Данная эвристическая оценка будет строгой, если предположить специальную структуру матрицы перепутанности $R_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta)_v$, где скалярное произведение воспроизводит такое же для когерентных состояний, но его соотношение с алгеброй операторов отличается заменой постоянной Планка $\hbar \to v_c/2\pi$. В этом предположении нет никакого противоречия с основами квантовой теории, поскольку единственными условиями, которым удовлетворяет матрица $R_{\alpha\beta}$, является ее положительность и равенство единице диагональных элементов.

Таким образом, деквантование измеренной информации сопровождается введением шумов деквантования, вклад которых в полную квантовую энтропию системы объект–прибор в пределе стандартного измерения стремится к бесконечности. Этот шум, однако, не отражается на точности измерения, поскольку показания прибора X_α асимптотически не различают потенциально различимые состояния $|\alpha\rangle_B$ в бесконечно малой области значений $X_\alpha \in V$, которой соответствует неограниченно большое число объемов когерентности $v_c \to 0$. Погрешность измерения лимитируется при этом только внутренней квантовой неопределенностью измеряемых переменных $\hat{X}$.

Заключение

Таким образом, в приложении к измерению континуальных переменных общее определение частично разрушающего перепутывающего квантового измерения [1] для случая канонического набора измеряемых переменных дает обобщение обсуждавшегося ранее измерения некоммутирующих квантовых переменных [9, 10, 14, 15] на случай квантового измерительного прибора, извлекающего результирующую информацию не обязательно в классической, но допускающей ее неограниченное размножение форме.

Искажение входных состояний объекта при рассмотренном типе измерения связано с представлением в классической форме квантово несовместных переменных и соответствующих им наборов неортогональных состояний.

Деквантование выходной информации приводит к внесению шума деквантования, обусловленного взаимодействием объекта и измерителя с дефазирующей подсистемой. Этот шум в пределе стандартного полностью деквантующего измерения приводит к увеличению полной квантовой энтропии в системе объект–измерительный прибор до бесконечности, не отражаясь на качестве измерения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 07-02-00128-а) и INTAS (грант 7904).

Литература

1. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Phys. Rev. A. 2006. **73**. P. 042312.
2. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // Phys. Rev. 1935. **47**. P. 777.
3. *Bennett Ch. H., Brassard G.* // Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Computer, System and Signal Processing. Bangalore, India; N. Y., 1984. P. 175.
4. Quantum Theory and Measurement / Ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek. Princeton, 1983.
5. *Ludwig G.* / Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces: Lecture notes in physics. 1974. **29**. P. 122.
6. *Braginsky V.B., Khalili F.Y.* Quantum Measurement. Cambridge, 1992.
7. *Менский М.Б.* // УФН. 1998. **168**. С. 1017.
8. *Neumann J. von.* Mathematical foundation of quantum mechanics. Princeton, 1955.
9. *Personick S.D.* // Bell Syst. Tech. J. 1971. **50**. P. 213.
10. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М., 1979.
11. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Phys. Rev. 2003. **A68**. P. 022309.
12. *Mensky M.B.* Quantum measurements and decoherence: Models and phenomenology. Dordrecht, 2000.
13. *Schlosshauer M.* // Rev. Mod. Phys. 2004. **76**. P. 1267.
14. *Гришанин Б.А.* // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. **11**, N 5. С. 127; e-print quant-ph/0301159 (2003).
15. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М., 1980.
16. *Grishanin B.A., Zadkov V.N.* // Laser Phys. Lett. 2005. **2**, N 2. P. 106.
17. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. М., 1970.
18. *Holevo A.S.* // Probl. Inf. Trans. 1973. **9**. P. 177.
19. *Гришанин Б.А.* Квантовая электродинамика для радиофизиков. М., 1981.

Поступила в редакцию
17.12.2007