УДК 550.388.2

ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С РЕГУЛЯРНОЙ РЕФРАКЦИЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

О. К. Власова, Л. И. Приходько

(*Центр гидрофизических исследований*; *кафедра физики атмосферы*)

Рассмотрены флуктуации лучевого вектора и амплитуды волны вдоль луча в случайной среде с регулярной рефракцией в приближении геометрической оптики. Решение задачи основано на описании процесса рассеяния динамическими стохастическими уравнениями типа уравнения Ланжевена. В предположении, что радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости мал по сравнению с расстоянием, пройденным лучом, рассеяние можно рассматривать как процесс Маркова и перейти от динамических уравнений к уравнению Эйнштейна–Фоккера [1]. Решением уравнения Эйнштейна–Фоккера является плотность вероятности амплитуды волны вдоль луча.

Задача диффузии луча во флуктуирующей среде с регулярной рефракцией решена в работе [2] путем перехода от уравнений луча к уравнению Эйнштейна–Фоккера. Переход от уравнений луча к уравнению Эйнштейна–Фоккера не является тривиальным, поскольку уравнения луча отличаются от динамических уравнений типа уравнения Ланжевена тем, что случайные флуктуации диэлектрической проницаемости в уравнениях луча не зависят от длины дуги, пройденной лучом, а определяются координатами заданной точки. Последнее обстоятельство делает невозможным непосредственный переход от уравнений луча к уравнению Эйнштейна–Фоккера, поскольку для этого требуется δ-корреляция случайной силы по пройденному лучом пути. В связи с этим затруднением в работе [1] было предложено в уравнениях луча перейти от длины дуги к координате, вдоль которой первоначально направлен луч. Для среды в среднем однородной при условии малых флуктуаций направления луча относительно невозмущенного направления подобный переход означает переход к новой переменной, указывающей положение луча на невозмущенной траектории и являющейся при этом одной из координат радиус-вектора. Очевидно, что для этого достаточно, чтобы одна из координатных линий совпадала с невозмущенной траекторией луча, и, следовательно, нужно знать невозмущенную траекторию луча.

Рассмотрим линейный слой, диэлектрическая проницаемость которого в системе координат $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ имеет вид

$$\varepsilon_p(\bar{z}) = n_p^2(\bar{z}) = 1 - \frac{\bar{z}}{z_0}, \tag{1}$$

$z_0 = \mathrm{const}$ характеризует размер слоя. Невозмущенная траектория луча является в этом случае параболой

$$\bar{z}(\bar{y}) = -\frac{\bar{y}^2}{4z_0 s_0^2} + \bar{y} ctg\vartheta^0, \tag{2}$$

$s_0 = \sin\vartheta^0$, ϑ^0 — угол падения луча на слой.

Введем систему координат параболического цилиндра таким образом, чтобы одна из координатных линий описывала невозмущенную траекторию (2). Для этого рассмотрим новую декартову систему координат x, y, z, начало которой совпадает с фокусом параболы (2), т. е. связанную с первоначальной системой $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ соотношением

$$\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{r}}_f, \quad \bar{\boldsymbol{r}}_f\{0, 2z_0c_0s_0, z_0(c_0^2 - s_0^2)\}, \quad c_0 = \cos\vartheta^0.$$

В системе координат без черты уравнение невозмущенной траектории имеет вид

$$\frac{y^2}{\tau_0^2} = -2z + \tau_0^2, \quad \tau_0^2 = 2z_0 s_0^2. \tag{3}$$

Координаты параболического цилиндра x, τ, σ [3, 4] определим следующим образом:

$$x = x, \quad y = \mp\sigma\tau, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2).$$

Новые координатные поверхности предсталяют собой системы софокусных цилиндрических параболоидов с осью вдоль оси x

$$\frac{y^2}{\tau^2} = -2z + \tau^2, \quad \frac{y^2}{\sigma^2} = 2z + \sigma^2$$

и плоскостей $x = \mathrm{const}$. Таким образом, если задать две следующие координатные поверхности: $\tau^2 = \tau_0^2$, $x = 0$, — то получаемая при их пересечении координатная линия будет совпадать с невозмущенной траекторией (3), а координата σ будет указывать положение луча на ней. В работе [2] подробно описан вывод уравнений положения и направления луча в приближении малых флуктуаций диэлектрической проницаемости, когда

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \alpha\varepsilon_\alpha, \quad \alpha \ll 1, \tag{4}$$

где ε_p удовлетворяет соотношению (1) и как функция переменных параболического цилиндра имеет вид

$$\varepsilon_p = n_p^2 = \frac{1}{z_0}\left[\tau_0^2 - \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)\right].$$

Поскольку в уравнение переноса для амплитуды волны входит лучевой вектор $\boldsymbol{S}$, то необходимо использовать уравнения луча, полученные в работе [2] и записанные с точностью до $O(\alpha^2)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = S_x\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}, \quad \dot{\tau} = S_\tau, \\
&\dot{S}_x = -\frac{\dot{n}_0}{n_0}S_x + \frac{\alpha}{n_0}\frac{1}{2n_0}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial x}\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}, \\
&\dot{S}_\tau = -\frac{\dot{n}_0}{n_0}S_\tau + \frac{\alpha}{n_0}f_{\varepsilon_\alpha} - 4\alpha\tau_\alpha\frac{\ddot{n}_0}{n_0} - \alpha S_{\tau\alpha}\frac{\dot{n}_0}{n_0},
\end{aligned} \tag{5}$$

точка означает дифференцирование по σ и

$$n_0 = \frac{\sqrt{\sigma^2 + s_0^2}}{\sqrt{2z_0}}, \quad f_{\varepsilon_\alpha} = \frac{1}{n_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\tau} + \frac{\tau_0}{\sigma^2 + \tau_0^2}\varepsilon_\alpha\right].$$

Коэффициенты уравнения Эйнштейна–Фоккера получены из (5) при выполнении условий

$$\frac{r_0}{2z_0} \ll \operatorname{tg}\vartheta^0, \quad \frac{r_0}{2z_0} \ll s_0^2, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&v_x = \sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}S_x, \quad v_\tau = S_\tau, \\
&v_{S_x} = -\frac{\dot{n}_0}{n_0}S_x, \quad v_{S_\tau} = -\frac{\dot{n}_0}{n_0}S_\tau, \\
&F_{xx'} = F_{\tau\tau'} = A_x = A_\tau = F_{x\tau'} = 0, \\
&F_{S_xS_x'} = F_{S_\tau S_\tau'} = \frac{D}{n_0^4}\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}, \quad D = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{4r_0},
\end{aligned} \tag{7}$$

r_0 характеризует радиус корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости, коэффициент корреляции имеет вид $\rho = e^{-r^2/r_0^2}$.

Уравнение для амплитуды волны вдоль луча, полученное в работе [5], следует из уравнения переноса и уравнения эйконала нулевого приближения геометрической оптики:

$$\frac{dA}{dl} = -\frac{A}{2}\left\{\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\frac{\nabla_{\boldsymbol{r}}\varepsilon}{2\varepsilon}\right\}, \tag{8}$$

где l — длина дуги вдоль луча. Для представления уравнения (8) в виде уравнения Ланжевена в рассматриваемой среде с регулярной рефракцией следут записать его в выбранной параболической системе координат и перейти от дифференцирования по длине дуги к дифференцированию по координате σ, используя следующие выражения:

$$\frac{dA}{dl} = \frac{dA}{d\sigma}\frac{S_\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}},$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}\frac{\boldsymbol{i}_\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\frac{\boldsymbol{i}_\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left(\frac{\partial S_\sigma}{\partial\sigma} + \frac{\partial S_\tau}{\partial\tau}\right) + \frac{S_\sigma\sigma + S_\tau\tau}{\left(\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right)^3}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\sigma} = -\frac{A}{2S_\sigma}\Bigg[&\frac{\partial S_x}{\partial x}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} + \frac{\partial S_\sigma}{\partial\sigma} + \frac{\partial S_\tau}{\partial\tau} + \frac{S_\sigma\sigma + S_\tau\tau}{\sigma^2 + \tau^2} + \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon}\left(S_x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} + S_\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + S_\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{9}$$

В приближении малых флуктуаций (4) запишем решение уравнения (9) в виде $A = A_0 + \alpha A_\alpha + \ldots$. При $\alpha = 0$ имеем $\frac{dA_0}{d\sigma} = -\frac{A_0\sigma}{\sigma^2 + \tau_0^2}$.

Уравнение для A_α имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dA_\alpha}{d\sigma} = &-A_\alpha\frac{\sigma}{\sigma^2 + \tau_0^2} - \\
&- \frac{A_0}{2}\left(\frac{\partial S_{x\alpha}}{\partial x}\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2} + \frac{\partial S_{\tau\alpha}}{\partial\tau} + \frac{z_0}{\sigma^2 + \tau_0^2}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Объединяя оба уравнения, получим с точностью до $O(\alpha^2)$ уравнение для амплитуды в виде уравнения Ланжевена

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\sigma} = &-A\frac{\dot{n}_0}{n_0} - \alpha\frac{A_{00}\sqrt{2z_0}}{2} \times \\
&\times \left[\frac{\partial S_{x\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial S_{\tau\alpha}}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}} + \frac{z_0}{\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\sigma}\right],
\end{aligned}$$

поскольку $\frac{\dot{n}_0}{n_0} = \frac{\sigma}{\sigma^2 + \tau_0^2}$ и уравнение для амплитуды в нулевом приближении можно представить в виде

$$\frac{d}{d\sigma}(A_0 n_0) = 0, \quad A_0 n_0 = A_{00}, \tag{10}$$

где A_{00} — амплитуда вдоль луча на входе в среду. Воспользуемся теперь выражениями, полученными при выводе уравнений для направления луча в [2], которые при выполнении условий (6) имеют вид

$$\frac{\partial S_{x\alpha}}{\partial x} = \frac{\sqrt{2z_0}}{2n_0}\int_{\sigma_n}^{\sigma}\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2}\,d\sigma', \quad \frac{\partial S_{\tau\alpha}}{\partial\tau} = \frac{1}{2n_0}\int_{\sigma_n}^{\sigma}\frac{1}{n'_0}\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial\tau'^2}\,d\sigma'.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\sigma} = &-A\frac{\dot{n}_0}{n_0} - \alpha\frac{A_{00}\sqrt{2z_0}}{2}\Bigg\{\frac{\sqrt{2z_0}}{2n_0}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2}\,d\sigma' + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}}\frac{1}{2n_0}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{1}{n'_0}\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial\tau'^2}\,d\sigma' + \frac{z_0}{\left(\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}\right)^3}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\sigma}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Найдем теперь коэффициенты уравнения Эйнштейна–Фоккера, связанные с амплитудой. Из (11) следует

$$F_{AA} = \frac{\alpha^2 A_{00}^2 2z_0}{4} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \Bigg\langle \Bigg\{ \frac{\sqrt{2z_0}}{2n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2}\, d\sigma'' + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau_0^2}} \frac{1}{2n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1}{n''_0} \frac{\partial^2 \varepsilon''^2_\alpha}{\partial \tau''^2}\, d\sigma'' + \frac{z_0}{\left(\sqrt{\sigma^2+\tau_0^2}\right)^3} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \sigma} \Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg\{ \frac{\sqrt{2z_0}}{2n'_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma'} \frac{\partial^2 \varepsilon'''_\alpha}{\partial x'''^2}\, d\sigma''' + \frac{1}{\sqrt{\sigma'^2+\tau_0^2}} \frac{1}{2n'_0} \times \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma'} \frac{1}{n'''_0} \frac{\partial^2 \varepsilon'''_\alpha}{\partial \tau'''^2}\, d\sigma''' + \frac{z_0}{\left(\sqrt{\sigma'^2+\tau_0^2}\right)^3} \frac{\partial \varepsilon'_\alpha}{\partial \sigma'} \Bigg\} \Bigg\rangle d\sigma'.$$

При вычислении коэффициента F_{AA} рассматривается ряд интегралов, например

$$I = \frac{2z_0}{4n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma'} d\sigma'' \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \overline{\frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2} \frac{\partial^2 \varepsilon'''_\alpha}{\partial x'''^2}}\, d\sigma''' = \frac{2z_0}{4n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'_0} \overline{\delta \varepsilon^2_\alpha} \int d\sigma'' \int \frac{\partial^4 \rho}{\partial x''^2 \partial x'''^2}\, d\sigma'''.$$

Поскольку в параболической системе координат расстояние между точками имеет вид

$$r^2 = (x'' - x''')^2 + (\mp \sigma'' \tau'' \pm \sigma''' \tau''')^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\tau''^2 - \sigma''^2 \right) - \left(\tau'''^2 - \sigma'''^2 \right) \right]^2,$$

а коэффициенты в уравнении Эйнштейна–Фоккера должны быть определены в точке, где $x'' = x'''$, $\tau'' = \tau''' = \tau_0$, то

$$\left. \frac{\partial^4 \rho}{\partial x''^2 \partial x'''^2} \right|_{x''=x'''} = 12 \frac{d^2 \rho}{d\left(r^2\right)^2} = 12 \frac{1}{r_0^4} e^{-r^2/r_0^2}.$$

Введем переменные

$$\xi = \sigma'' - \sigma''', \quad \eta = \frac{\sigma'' + \sigma'''}{2}.$$

Тогда рассматриваемый интеграл имеет вид

$$I = \frac{2z_0}{4n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta\, 2 \int\limits_{0}^{\infty} 12 \frac{1}{r_0^4} \exp\left[-\frac{\xi^2(\tau_0^2 + \eta^2)}{r_0^2} \right] d\xi.$$

Проинтегрировав по ξ, получим

$$I = \frac{\sqrt{2z_0}}{4n_0} \frac{12 \overline{\delta \varepsilon^2_\alpha} \sqrt{\pi}}{r_0^3} \left(\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'_0} \right)^2.$$

Вычисляя подобным образом остальные члены F_{AA} и учитывая, что $r_0 \ll z_0$, имеем

$$F_{AA} = \frac{A_{00}^2 \left(\sqrt{2z_0}\right)^3 D}{n_0 r_0^2} \Bigg\{ 3L_\tau^2 + \frac{3}{n_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'^2_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma'\, n'_0 + \frac{L_x}{\sqrt{2z_0}} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'^2_0} + \frac{L_x L_\tau}{\sqrt{2z_0} n_0} \Bigg\}, \quad (12)$$

$$L_x = \sqrt{2z_0} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma' = \sqrt{2z_0} \left(\sigma + \sqrt{2z_0}\, c_0 \right),$$

$$L_\tau = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'_0} = \sqrt{2z_0} \ln \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}}{\sqrt{2z_0}(1 - c_0)}.$$

Из соотношений (5), (11) найдем следующие коэффициенты, входящие в уравнение Эйнштейна–Фоккера:

$$v_A = -\frac{\dot{n}_0}{n_0} A, \quad F_{AS_\tau} = -\frac{A_{00} D s_0}{2n_0^2} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n'^2_0}.$$

В результате получаем уравнение Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятности состояния системы $W(A, S_x, S_\tau, x, \tau, \sigma)$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2} S_x \frac{\partial W}{\partial x} + S_\tau \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\dot{n}_0}{n_0} \left(S_x \frac{\partial W}{\partial S_x} + S_\tau \frac{\partial W}{\partial S_\tau} + A \frac{\partial W}{\partial A} \right) - 3 \frac{\dot{n}_0}{n_0} W - \frac{D\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}}{n_0^4} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial S_x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial S_\tau^2} \right) - F_{AA} \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} - F_{AS_\tau} \frac{\partial^2 W}{\partial S_\tau \partial A} = 0. \quad (13)$$

Для решения (13) введем функцию χ следующим образом:

$$W = n_0^3 \chi.$$

Кроме того, как показано в работе [6], в качестве новых переменных следует выбрать независимые интегралы уравнений луча (5) и амплитуды (11), а именно

$$\rho_x = x - S_x n_0 L_x, \quad p_x = n_0 S_x,$$
$$\rho_\tau = \tau - S_\tau n_0 L_\tau, \quad p_\tau = n_0 S_\tau,$$
$$a = n_0 A.$$

В результате в новых переменных уравнение для χ имеет вид

$$\frac{\partial \chi(p_x, p_\tau, \rho_x, \rho_\tau, a, \sigma)}{\partial \sigma} - \frac{D\sqrt{\sigma^2 + \tau_0^2}}{n_0^2} \times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial p_x^2}-2\frac{\partial^2\chi}{\partial p_x\partial\rho_x}L_x+\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho_x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial p_\tau^2}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho_\tau\partial p_\tau}L_\tau+\frac{\partial^2 2\chi}{\partial p_\tau^2}L_\tau^2\right)-$$
$$-F_{AA}n_0^2\frac{\partial^2\chi}{\partial a^2}+F_{AS_\tau}n_0^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial p_\tau\partial a}-\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho_\tau\partial a}L_\tau\right)=0. \quad (14)$$

Уравнение (14) указывает на зависимость флуктуаций амплитуды и флуктуаций положения и направления луча. Проинтегрируем (14) по переменным $\rho_x, p_x, \rho_\tau, p_\tau$ и получим уравнение для плотности вероятности переменной a в виде

$$\frac{\partial\chi(a,\sigma)}{\partial\sigma}=F_{AA}n_0^2\frac{\partial^2\chi}{\partial a^2}.$$

Решение этого уравнения приведено в [6]:

$$\chi=\frac{1}{\left\{4\pi\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}F_{AA}n_0^2\,d\sigma\right\}^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left[-(a-a_0)^2\Big/4\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}F_{AA}n_0^2\,d\sigma\right],$$
$$a_0=a(\sigma=\sigma_0).$$

Возвращаясь к переменной $A=\frac{a}{n_0}$ и функции $W=n_0^3\chi$, получим, учитывая (10) и условие нормировки, выражение для плотности вероятности амплитуды

$$W=\frac{n_0}{\left[4\pi\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}F_{AA}n_0^2\,d\sigma\right]^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left[-(A-A_0)^2\Big/4\frac{1}{n_0^2}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}F_{AA}n_0^2\,d\sigma\right]. \quad (15)$$

Таким образом, дисперсия амплитуды, как следует из (15), определяется выражением

$$\overline{\delta A^2}=\frac{2}{n_0^2}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}F_{AA}n_0^2\,d\sigma. \quad (16)$$

Подынтегральное выражение в (16) следует из уравнения (12). Поскольку проинтегрировать (16) не удается, запишем выражение для дисперсии амплитуды как функцию безразмерной переменной $y=\frac{\sigma}{\sqrt{2z_0}}$ для численного вычисления

$$\overline{\delta A^2}=\frac{A_{00}^2\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{2n_0^2(y)}\left(\frac{2z_0}{r_0}\right)^3\times$$
$$\times\int\limits_{-c_0}^{y}\left\{3\sqrt{y'^2+s_0^2}\ln^2\frac{y'+\sqrt{y'^2+s_0^2}}{1-c_0}+\right.$$
$$+\frac{5}{2s_0}\operatorname{arctg}\frac{y'}{s_0}y'\sqrt{y'^2+s_0^2}+\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\vartheta^0\operatorname{arctg}\frac{y'}{s_0}+$$
$$+\frac{3s_0}{2}\operatorname{arctg}\frac{y'}{s_0}\ln\frac{y'+\sqrt{y'^2+s_0^2}}{1-c_0}+$$
$$+\operatorname{ctg}\vartheta^0\sqrt{y'^2+s_0^2}\operatorname{arctg}\frac{y'}{s_0}+\frac{5}{2s_0}y'\sqrt{y'^2+s_0^2}\operatorname{arctg}\frac{c_0}{s_0}+$$
$$+\operatorname{ctg}\vartheta_0\sqrt{y'^2+s_0^2}\operatorname{arctg}\frac{c_0}{s_0}+y'\ln\frac{y'+\sqrt{y'^2+s_0^2}}{1-c_0}+$$
$$+\ln\frac{y'+\sqrt{y'^2+s_0^2}}{1-c_0}\left(c_0+\frac{3s_0}{2}\operatorname{arctg}\frac{c_0}{s_0}\right)+$$
$$\left.+\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\vartheta^0\operatorname{arctg}\frac{c_0}{s_0}\right\}dy'. \quad (17)$$

Графики функции $f(y)$, представляющей интеграл в выражении (17), для различных углов падения на слой изображены на рис. 1.

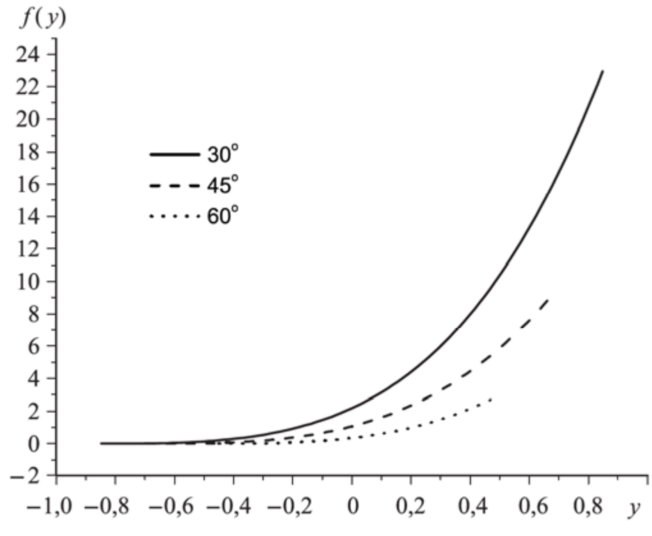

Рис. 1. Графическое представление функции $f(y)$ (17), полученной с помощью численного интегрирования для различных углов падения волны на слой

Сравним дисперсию амплитуды в среде с регулярной рефракцией с дисперсией амплитуды в среде в среднем однородной, которая определяется кубической зависимостью отношения пройденного лучом пути вдоль невозмущенной траектории к величине радиуса корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости [5]. Запишем дисперсию амплитуды в среде с регулярной рефракцией через отношение пройденного лучом пути к радиусу корреляции. Записывая пройденный лучом путь от начала слоя до заданной точки траектории в виде

$$L(\sigma)=\int\limits_{-\sqrt{2z_0}\,c_0}^{\sigma}d\sigma'\sqrt{\sigma'^2+\tau_0^2}=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma\sqrt{\sigma^2+\tau_0^2}+(2z_0)^2c_0+\tau_0^2\ln\frac{\sigma+\sqrt{\sigma^2+\tau_0^2}}{\sqrt{2z_0}(1-c_0)}\right]$$

и переходя к безразмерной переменной y, представим дисперсию амплитуды следующим образом:

$$\overline{\delta A^2} = \frac{A_{00}^2\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{2n_0^2}\left(\frac{L(y)}{r_0}\right)^3\frac{f(y)}{X}, \qquad (18)$$

где

$$X = \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+s_0^2}+c_0+s_0^2\ln\frac{y+\sqrt{y^2+s_0^2}}{1-c_0}\right)\right]^3.$$

Графики функции $\frac{f(y)}{n_0^2X}$, определяющей отклонение дисперсии (18) от представленного выше кубического закона, изображены на рис. 2. Из графиков следует, что если угол падения волны на слой больше 45°, то поведение дисперсии амплитуды практически такое же, что и в среде в среднем однородной. Для малых углов падения (меньше 45°) поведение дисперсии резко меняется, флуктуации амплитуды сильно увеличиваются вблизи точки поворота луча ($\sigma = 0$). Объяснить подобное поведение дисперсии можно, если обратить внимание на условия применимости метода диффузии луча, которые также зависят от угла падения на слой. Помимо условий (6) существует условие $r_0 \ll L$, которое на выходе из слоя можно записать в виде

$$\frac{r_0}{2z_0} \ll c_0 + \frac{s_0^2}{2}\ln\frac{1+c_0}{1-c_0}.$$

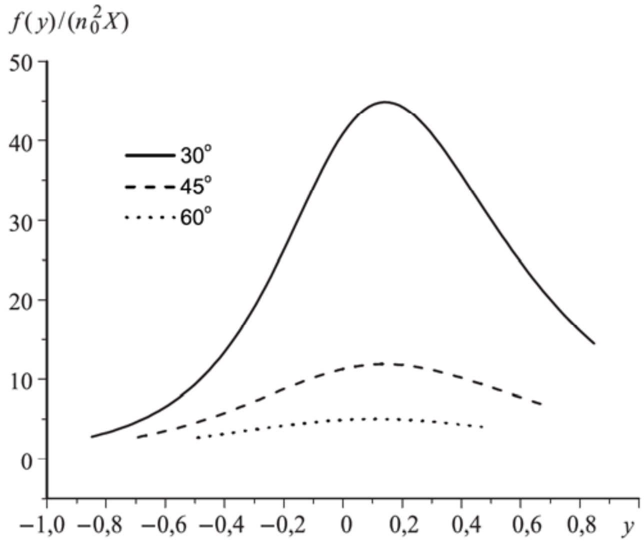

Рис. 2. Графики функции $\frac{f(y)}{n_0^2X}$, определяющей отклонение дисперсии в рассматриваемой среде с регулярной рефракцией (18) от дисперсии в однородной в среднем среде для различных углов падения

Нетрудно убедиться в том, что приведенные выше условия с большей точностью выполняются для углов больших 45°.

Найдем далее относительную дисперсию амплитуды волны, которую с учетом $\frac{A_{00}}{n_0} = A_0$ можно записать в виде

$$\frac{\overline{\delta A^2}}{A_0^2} = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{L(y)}{r_0}\right)^3\frac{f(y)}{X}. \qquad (19)$$

Численный расчет функции $\frac{f(y)}{X}$ представлен в виде графиков на рис. 3. Из полученных графиков следует, что относительная дисперсия амплитуды (19) в большей степени соответствует кубической зависимости отношения пройденного лучом пути вдоль невозмущенной траектории к радиусу корреляции неоднородностей, а рассеяние в среде с градиентом ε происходит как в квазиоднородной среде.

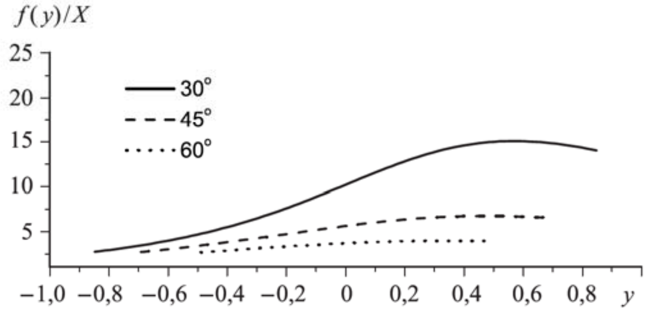

Рис. 3. Графики функции $\frac{f(y)}{X}$, определяющей отклонение относительной дисперсии амплитуды в среде с регулярной рефракцией (19) от дисперсии в однородной в среднем среде

Использование метода перехода от уравнений Ланжевена к уравнению Эйнштейна–Фоккера возможно лишь в том случае, когда невозмущенная траектория луча является координатной линией. Поскольку невозмущенной траекторией луча в линейном слое является парабола, то, осуществляя переход к системе координат параболического цилиндра, можно решить задачу рассеяния в плоскослоистой среде с учетом полного отражения и найти закон распределения и дисперсию амплитуды волны вдоль невозмущенного луча в любой точке траектории (включая точку поворота луча). Это принципиально новый результат, так как в традиционной геометрической оптике невозмущенная амплитуда и флуктуации амплитуды обращаются в бесконечность вблизи точки поворота луча. Однако решить данную задачу для произвольной зависимости регулярной диэлектрической проницаемости от координат не удается, что создает трудности в установлении общих закономерностей рассеяния.

Отметим, что при сопоставлении экспериментальных данных с теоретическими наряду с распределением Гаусса используют и другие виды распределений, корректно описывающие слабые флуктуации амплитуды и интенсивности, в частности распределение Накагами [7].

Литература

1. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. **14**, № 5. С. 707.
2. *Гусев В.Д., Власова О.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1984. № 5. С. 74.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров. М., 1973.
4. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М., 1960.
5. *Власова О.К., Приходько Л.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 5. С. 18.
6. *Чандрасекар С.* Стохастические процессы в физике и астрономии. М., 1947.
7. *Xu Z-W., Wu J., Wu Z-S.* // Waves Random Media. 2004. **14**. P. S189.

Поступила в редакцию
07.11.2007