

УДК 536.8

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МАШИНЫ КАРНО. I. КОНСЕРВАТИВНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ

А. Н. Заикин

(кафедра биофизики)

E-mail: tverd07@mail.ru

Машина Карно — модель, в процессе изучения которой возникло понятие энтропии, является параметрическим генератором. Определенная модификация машины позволила ввести ее в периодический режим устойчивого предельного цикла. Для частоты колебаний поршня в малоамплитудном квазигармоническом режиме получена формула, совпадающая с выражением для частоты колебаний резонатора Гельмгольца. В вычислительных экспериментах рассмотрены форма колебаний поршня и вид фазовых траекторий при различных начальных условиях и больших амплитудах.

Введение

Тепловые машины поршневого типа — объекты теории колебаний, поскольку в них основной рабочий процесс идет в автоколебательном режиме. Машина Карно принадлежит к этому классу, но является теоретической моделью. Она состоит из цилиндра с поршнем и двух тепловых резервуаров с большой теплоемкостью и температурами $T_2 < T_1$. В цилиндре в качестве рабочего тела находится идеальный газ. Обратимый цикл Карно — замкнутая траектория из двух изотерм и двух адиабат на плоскости с координатами p, V (p — давление в цилиндре, V — объем газа) [1]. Движение между узлами совершается по газовым законам: форму кривой изотермического процесса определяет закон Клапейрона–Менделеева, форму адиабат — закон Пуассона. В прямом цикле Карно тепловая энергия превращается в работу, обратный цикл позволяет превратить работу в тепло при движении против часовой стрелки.

В предлагаемой работе изложены результаты вычислительных экспериментов с модифицированной машиной Карно [2]. В классическую конструкцию машины [3] внесены следующие изменения (рис. 1).

1. Поршень сделан весоым.
2. Между телом A и цилиндром введена байпасная (параллельная, с переключением) теплоемкость C_1 , которая приводится рычагом H_1 в тепловой контакт с телом A после его перемещения в другую позицию.
3. Между телом B и цилиндром введена байпасная теплоемкость C_2 , которая приводится рычагом H_2 в тепловой контакт с газом в цилиндре после его перемещения в позицию над телом B .
4. Если в классической машине Карно смена тепловых резервуаров производится мысленно или вручную, а автофазирующие металлические переключатели (золотники) появились на машинах

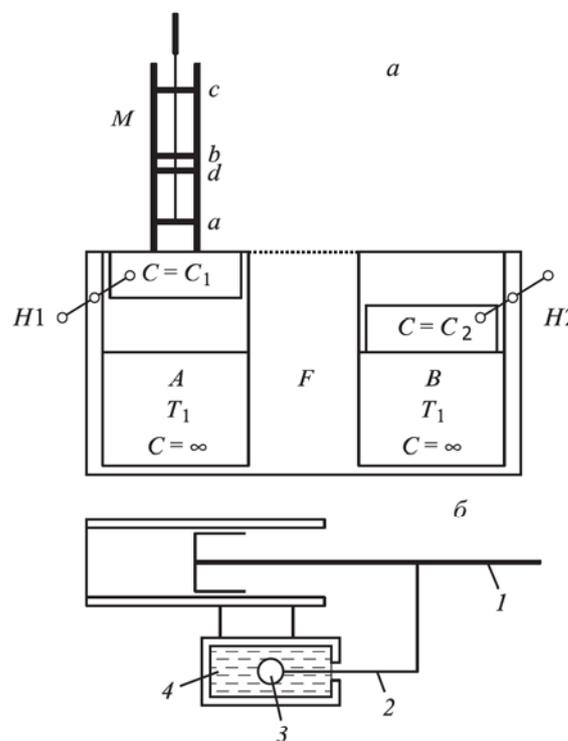


Рис. 1. Конструкция модифицированной машины Карно (а): цилиндр M (из не проводящего тепло материала, без дна), заполненный газом, можно передвигать между телами A , F и B , при этом $T_2 < T_1$, а тело F — абсолютный теплоизолятор. Конструкция рабочего органа модифицированной машины Карно (б): 1 — шток поршня основного цилиндра; 2 — шток цилиндра нагрузки; 3 — невесомый шар радиуса r ; 4 — вязкая жидкость, заполняющая цилиндр нагрузки

Ньюкомена и Уатта еще в XVIII в., то для модельной машины Карно золотниками могут служить алгоритмы, реализованные в виде компьютерных программ. Программы для компьютера сочетают

дифференциальные уравнения для адиабат и автофазирующий алгоритм.

5. Последнее условие, выполнение которого упрощает моделирование и машины, и золотника: ось цилиндра машины должна лежать в горизонтальной плоскости. Это позволяет исключить влияние гравитационных сил на положение равновесия весомого поршня и облегчить понимание результатов мысленного эксперимента (Gedankenexperiment) Карно.

Даже в мысленном эксперименте машина должна иметь нагрузку. В качестве нее целесообразно взять невесомый шар, погруженный в вязкую жидкость. Примерный вид конструкции, дополняющей чертеж рис. 1, а, приведен на рис. 1, б.

Уравнение баланса сил (сила инерции, сила взаимодействия шара с вязкой жидкостью, давление газа на поршень), действующих вдоль выделенной механической степени свободы:

$$MS^{-1} \frac{d^2V}{dt^2} + 6\pi\eta r S^{-1} \frac{dV}{dt} + (p_0 - p)S = 0, \quad (1)$$

где M — масса поршня, S — его сечение, V — текущее значение объема газа в цилиндре, η — вязкость жидкости в цилиндре нагрузки, r — радиус шара, погруженного в вязкую жидкость, p_0 — атмосферное давление, p — текущее давление газа в цилиндре.

При малых скоростях движения шара в вязкой жидкости, когда отсутствует турбулентность и режим обтекания шара ламинарный, сила сопротивления движению шара определяется формулой Стокса и выступает в качестве второго слагаемого в уравнении (1). Известно, что при скоростях движения тел в вязких жидкостях, близких к скорости звука в этих средах, сила сопротивления становится пропорциональной кубу скорости движения тел. Если для изучения консервативных режимов колебаний достаточно выражения (1), то вычислительные эксперименты в режиме параметрического возбуждения машины с выходом на предельный цикл требуют введения в это выражение силы, пропорциональной кубу скорости движения поршня.

Консервативные режимы колебаний

Теплоемкости машины Карно, влияющие на ее динамику. Их всего три: C_V — теплоемкость газа в цилиндре при остановленном поршне, C_p — теплоемкость газа при постоянном давлении в цилиндре, C — теплоемкость резервуара. В каждом из четырех узлов диаграммы Карно [1], где пересекаются адиабаты и изотермы, происходит включение или отключение теплового резервуара, и его теплоемкость входит в плотный тепловой контакт с теплоемкостью рабочего тела — газа, либо такой контакт прекращается. Соединение теплоемкостей в узловой точке производится при температуре газа, равной температуре резервуара. При движении поршня равенство температур может быть наруше-

но, но оно восстанавливается при остановке поршня. Постоянную времени восстановления температурно-го равенства можно оценить следующим образом.

Пусть разность температур двух теплоемкостей C_1 и C_2 составляет $\Delta T = T_1 - T_2$. После того как теплоемкости приведены в тепловой контакт через стенку с теплопроводностью κ , разность температур начинает уменьшаться по закону Фурье, при этом скорости изменения температур обратно пропорциональны теплоемкостям:

$$\frac{dT_1}{dt} = -\Delta T \frac{\kappa}{C_1}, \quad \frac{dT_2}{dt} = \Delta T \frac{\kappa}{C_2}.$$

Из решения этих уравнений следует

$$\Delta T = a \exp \left\{ -\kappa \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) t \right\},$$

или

$$\tau = \frac{C_1 C_2}{\kappa(C_1 + C_2)}.$$

Постоянную времени в конкретных устройствах можно вычислить или измерить. Существенно, что эта величина является ограниченной.

Режим колебаний. Стандартными преобразованиями, используя формулу Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$, выражение (1) можно привести к виду (силу взаимодействия шара с вязкой жидкостью пока исключим, положив $r = 0$)

$$x^\gamma \frac{d^2x}{dt^2} + Q(x^\gamma - 1) = 0, \quad (2)$$

где $x = V/V_0$, V_0 — объем газа в равновесии, при $p = p_0$, $Q = p_0 S^2 / (M V_0)$ — константа, γ — коэффициент Пуассона, равный отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Выражение (2) является уравнением динамики нелинейной консервативной системы, каковой является машина Карно в адиабатическом режиме, т. е. при положении цилиндра с весомым поршнем над «телом» F (рис. 1), не проводящим тепла.

Для малых отклонений от положения равновесия поршня (это окрестности точки $x = 1$) разложение в ряд и отбрасывание нелинейных членов разложения приводит к упрощению (2) до выражения

$$\ddot{u} + \gamma Q u = 0, \quad (3)$$

где $u = x - 1$.

Уравнение (3) является моделью линейных консервативных монотонных систем, круговая частота синусоидальных колебаний в которых определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{M V_0}}. \quad (4)$$

С этим выражением для частоты колебаний модифицированная машина Карно попадает в целый

класс систем, функциональные свойства которых определяют те же параметры, что содержит выражение (4). Классический резонатор Гельмгольца имеет основной тон колебаний на частоте, определяемой этим выражением. Таков же основной тон у многочисленных вариантов этого резонатора: гудящих каминов и печных труб; пор в накипи котлов, самоваров и чайников, поющих или шумящих перед закипанием воды. Поршень устройств может быть газообразным (как в резонаторах Гельмгольца), жидким (как у камчатских гейзеров), твердым (как у машины Карно). *Адиабатическая пружина с присоединенной массой — основа целого класса колебательных и автоколебательных систем.*

Решения нелинейного уравнения (2) получены в вычислительных экспериментах на компьютере, их результаты представлены на рис. 2. Небольшая порция энергии, введенная в колебательную систему, сохраняется в ней в виде квазигармонических незатухающих колебаний $X(t)$ и $Y(t) = dX/dt$. Энергия этих колебаний равна площади меньшей замкнутой траектории на фазовой плоскости X, Y . При энергии, равной площади большей замкнутой траектории, колебания ангармоничны, имеют существенно большие амплитуды и период колебаний.

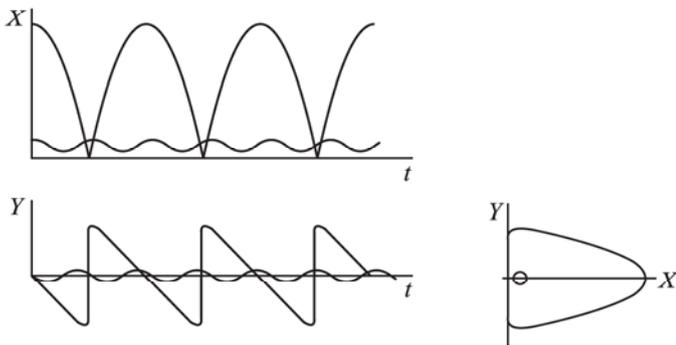


Рис. 2. Зависимость формы и амплитуды колебаний поршня и вид замкнутых траекторий изображающей точки на фазовой плоскости от начальных условий. На рисунке представлены решения уравнения (2); $Y = dX/dt$

В адиабатически изолированной системе нет обмена теплом с внешним миром: осуществляется передача во внешнюю среду только механической энергии. Но в данной модификации машины тепловая энергия, превращенная в механическую, переходит в энергию поршня и остается внутри системы. Поскольку потери энергии внутри машины Карно не предусмотрены, периодический процесс превращения тепловой энергии в механическую и обратно может идти неограниченно долго, а колебательная система является консервативной.

Термофизика модифицированной машины Карно. Обозначим период колебаний поршня через P . Тогда выражение для периода квазигармо-

нических колебаний будет иметь вид

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{MV_0}{\gamma p_0 S^2}}$$

Масса поршня в этом выражении — параметр независимый. Всегда можно выбрать такое значение M , при котором будет справедливым сильное неравенство

$$P \gg \tau, \tag{5}$$

где τ — постоянная времени процесса выравнивания температур резервуара и газа, введенная и определенная выше.

У высокоэнергетических траекторий, как показано выше, период больше, чем определенный выражением (2), но это обстоятельство только усиливает неравенство (5).

При выполнении условия (5) температура газа в процессе колебаний не будет отличаться от температуры резервуара, и в условиях адиабатической изоляции системы газ-резервуар, рабочее тело (газ) будет иметь термические характеристики системы: в частности, теплоемкость газа при постоянном объеме будет выражаться суммой $C|_{V=\text{const}} = C_V + C$.

Здесь уместен вопрос: как влияют наличие и величина емкости резервуара C на характер траекторий изображающей точки при ее движении между узлами на диаграмме Карно? Для ответа на него используем закон сохранения энергии системы в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU_G + p dV + dU_R. \tag{6}$$

Эта запись означает, что в отсутствие адиабатической оболочки поступившая в систему порция тепловой энергии δQ идет на приращение внутренней энергии газа dU_G , теплового резервуара dU_R и на частичное превращение в механическую энергию $p dV$.

Если учесть, что в цилиндре находится один моль газа, $C_V = \text{const}$, а $\delta Q = 0$ (при движении поршня между узлами диаграммы Карно система адиабатически изолирована), то (6) можно представить в виде

$$C dT + T dC + C_V dT + p dV = 0. \tag{7}$$

Из этого уравнения легко получить следующие выражения для различных частных случаев.

1. При $dT = 0$, в изотермическом режиме, с учетом $p = RT/V$ получаем

$$dC + R \frac{dV}{V} = 0.$$

Следовательно, расширение газа и получение механической энергии возможно только за счет уменьшения теплоемкости резервуара $\Delta C = -R \ln(V/V_0)$, где V_0 — начальный объем системы. При обратном движении поршня $\Delta C > 0$, т.е. теплоемкость резервуара увеличивается на ΔC .

2. При $dV = 0$, в изохорном режиме — режиме остановленного поршня, из выражения (3) получаем

$$C dT + T dC + C_V dT = 0.$$

Результат интегрирования этого выражения $(C + C_V)T = \text{const} = Q$. Здесь мы имеем дело с изолированной системой, сохраняющей внутри попавшую туда энергию Q .

3. В адиабатическом режиме, при $dC = 0$ или $C = \text{const}$, получим

$$(C + C_V)T + p dV = 0. \quad (8)$$

Далее используем полный дифференциал от правой и левой частей уравнения Клапейрона–Менделеева

$$p dV + V dp = R dT. \quad (9)$$

Исключая dT из (8) и (9), получим

$$V dP + \psi p dV = 0, \quad (10)$$

где $\psi = (C + C_V + R)/(C + C_V)$.

Интегрирование (10) дает

$$pV^\psi = \text{const}.$$

Это так называемая *формула Пуассона* для кривой, называемой *адиабатой*. Но, в отличие от классической адиабаты, здесь показатель ψ зависит от теплоемкости резервуара C , которая увеличивает C_V до $C_V + C$ и изменением величины которой можно модифицировать термические характеристики рабочего тела — газа.

Некоторые свойства модифицированного газа.

Газ в цилиндре, модифицированный байпасной теплоемкостью C , при соблюдении условия (5) приобретает новые свойства.

1. При плавном изменении C от нуля до бесконечности показатель ψ плавно меняется в интервале $5/3 \geq \psi \geq 1$. Это значит, что между классической адиабатой и изотермой идеального одноатомного газа находится *континуум адиабат*. Пять адиабат из этого интервала ($\psi = 1.05, 1.20, 1.35, 1.50, 1.65$) и замкнутые траектории изображающих точек на фазовой плоскости $(V, dV/dt)$, соответствующие этим адиабатам, представлены на рис. 3.

2. Если к одному молю одноатомного газа с теплоемкостью C_V присоединяется теплоемкость $C = (n - 1)C_V$, то коэффициент Пуассона $\psi = (nC_V + R)/(nC_V)$ имитирует наличие в цилиндре n -атомного газа и динамика системы при соблюдении условия (5) неотличима от динамики системы с натуральным n -атомным газом. Значения коэффициентов Пуассона в этом случае образуют счетное множество $\psi = 1 + 2/(3n) = 5/3; 4/3; 11/9; 7/6; 17/15$.

3. При очень большом n , когда коэффициент Пуассона становится мало отличимым от единицы, адиабаты смыкаются с изотермами. Вычислительные эксперименты показывают, что в этом случае поршень, совершающий колебания

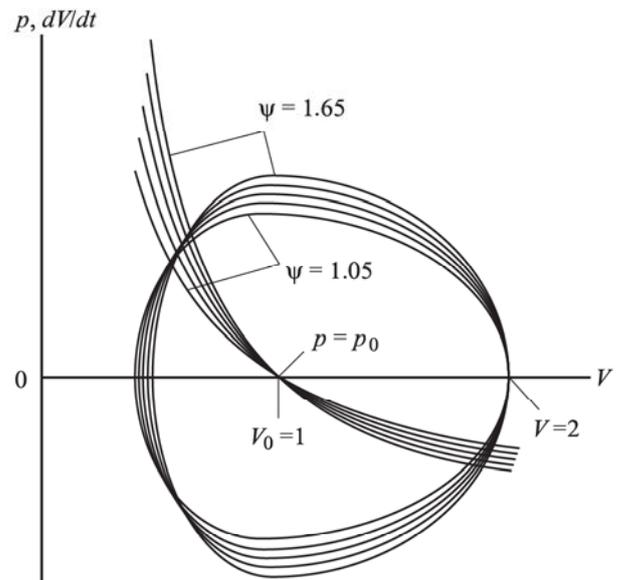


Рис. 3. Веер адиабат, различающихся параметром — коэффициентом Пуассона ψ , и соответствующие адиабатам замкнутые траектории на фазовой плоскости $(V, dV/dt)$. Начальное положение изображающих точек всех траекторий: $V = 2, dV/dt = 0$. Положения равновесия, соответствующие всем адиабатам и фазовым траекториям, совмещены в точке $V = 1, dV/dt = 0$, в которой $p = p_0, V = V_0$

в консервативном режиме, «не отличает» адиабаты от изотермы. Отсюда следует, что функция, определяющая работу в изотермическом режиме $A_1 = RT \ln(V_2/V_1)$, является предельной для другой функции $A_2 = RT[1 - (V_1/V_2)^{\psi-1}]/(\psi - 1)$, определяющей работу в адиабатическом режиме при ψ , стремящемся к единице. Это утверждение легко проверяется применением правила Лопиталья к выражению для A_2 .

4. При использовании газа, модифицированного байпасной теплоемкостью, возможна плавная перестройка частоты колебаний поршня изменением величины этой теплоемкости.

Инкрементный и декрементный режимы колебаний. Если колебательную консервативную систему «заставить» работать, она станет декрементной, амплитуда колебаний будет уменьшаться. Если же в эту систему вводить энергию, амплитуда колебаний начнет увеличиваться, система станет инкрементной. Если в уравнение (3) добавить член вида $L\dot{u}$, получим

$$\ddot{u} + L\dot{u} + \gamma Qu = 0. \quad (11)$$

От знака и величины коэффициента L зависит характер режима колебаний. Декрементный, консервативный и инкрементный режимы и соответствующие этим режимам значения L и фазовые траектории представлены на рис. 4.

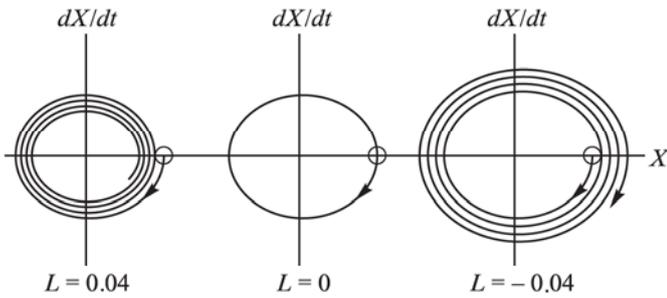


Рис. 4. Фазовые портреты колебательных движений поршня в плоскостях $(X, dX/dt)$. Изображающие точки начинают движение из центров малых кружков, продолжительность времени движения одинакова во всех трех случаях. При $L = 0.04$ — декрементный режим колебаний, при $L = 0$ — консервативный, при $L = -0.04$ — инкрементный

Выше было установлено, что ангармоничность колебаний, вызванная нелинейностью системы (2), усиливает неравенство (5), поскольку период колебаний P растет с увеличением ангармоничности. Колебания в системе, моделируемой уравнением (11), несинусоидальны. Их условный период — это «время между двумя последовательными прохождениями положения равновесия в одну сторону» [4]

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}, \quad (12)$$

где ω — частота основного тона резонатора Гельмгольца (4), $\delta = L/2$.

В квазигармоническом режиме колебаний $|\delta| \ll 1$. Из выражения (12) следует, что период P как в декрементном режиме, так и в инкрементном больше, чем в консервативном. И эта ангармоничность, как видим, также усиливает неравенство (5).

Закключение

1. В консервативном режиме изображающая точка на диаграмме Карно движется возвратно-

поступательно вдоль адиабаты в отличие от классического цикла, где замкнутая траектория изображающей точки окружает некоторую площадь.

2. Установлено неравенство (5), в котором левая и правая части определяются через параметры машины Карно. Соблюдение режима этого неравенства позволяет поддерживать равенство температур рабочего тела и теплового резервуара в процессе колебаний весоного поршня.

3. При соблюдении условия (5) характер адиабат определяет формула Пуассона, при этом к C_V в показателе Пуассона добавляется теплоемкость резервуара C , которая создает виртуальную теплоемкость $C_V^* = C_V + C$.

4. Если натуральные газы рабочего тела образуют счетное множество величин теплоемкости C_V , то использование изменяемой байпасной теплоемкости C дает возможность получать континуум показателей Пуассона.

5. Использование континуального показателя Пуассона позволяет плавно перестраивать частоту колебаний поршня.

6. Ангармоничность, вызванная нелинейностью характеристик машины Карно или небольшой неконсервативностью, увеличивает период колебаний поршня и усиливает неравенство (5). Следовательно, справедливость выводов 2 и 3 не нарушается и в случае ангармоничности колебаний поршня.

Литература

1. Базаров И.П. Термодинамика. М., 1991.
2. Заикин А.Н. Препринт ОНТИ РАН. Пущино, 2005.
3. Mach E. Die Principien Wärmelehre. Leipzig, 1900.
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М., 1964.

Поступила в редакцию
23.11.2007