УДК 517.958; 621.372.8

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ *E* И *B*

М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Электромагнитное поле, в котором $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})=0$, истолковано геометрически как сопоставление точке (x,y,z,t) проективной прямой в $\mathbb{P}^3$. Для такого поля найдено общее решение первой четверки уравнений Максвелла $\mathfrak{Rot}\,F=0$. Вторая четверка в области вне зарядов и токов сведена к задаче, связанной со скалярным волновым уравнением.

При исследовании задач электродинамики традиционно используют векторную запись уравнений Максвелла, шестивекторная же запись используется в основном в вопросах, так или иначе связанных с ОТО. Тем не менее рассмотрение краевых задач в шестивекторном виде обладает рядом преимуществ, отмеченных в [1]. При этом выяснилось, что в рамках этого подхода наиболее интересные с практической точки зрения поля, в которых $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})=0$, можно истолковать геометрически весьма просто, этому истолкованию и посвящена настоящая работа.

1. Плюкеровы координаты прямой в проективном пространстве

Произвольная плоскость (плоское двумерное многообразие) в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ задается уравнениями

$$\sum u_i x^i = 0, \quad \sum v_i x^i = 0,$$

где $u_1,\dots v_4$ — параметры, характеризующие прямую. Желая характеризовать 6 параметров прямой однородно, Плюкер [2] ввел *лучевые координаты* прямой

$$p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i$$

(где $X=(x_1,\dots,x_4)$ и $Y=(y_1,\dots,y_4)$ — две любые точки на прямой) и *осевые координаты* прямой

$$q_{ij} = u_i v_j - u_j v_i.$$

Понятно, что p^{ij} и q_{ij} составляют антисимметричные матрицы p и q. Для краткости мы будем далее писать

$$p = x\wedge y, \quad q = u\wedge v.$$

Отметим еще, что для данной прямой лучевые и осевые координаты определены с точностью до множителя.

Не всякая антисимметричная матрица p представляет собой набор лучевых координат, но только такая, коэффициенты которой удовлетворяют уравнению Плюкера

$$[p] = p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0.$$

Для доказательства этого утверждения построим явно саму плоскость. Заметим, что все миноры третьего порядка матрицы p пропорциональны $[p]$. Например, минор, дополнительный к p_{12}, равен

$$A^{12} = -p^{34}[p].$$

Поэтому $\operatorname{rang} p \leqslant 2$ и существуют линейно независимые 4-векторы $u=(u_1,\dots,u_4)$ и v, такие что

$$\sum_{j=1}^{4} p^{ij}u_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} p^{ij}v_j = 0 \quad (i=1,\dots,4).$$

Это позволяет рассмотреть плоскость

$$\sum u_i x^i = 0, \quad \sum v_i x^i = 0, \tag{1}$$

с осевыми координатами $q = u\wedge v$.

Взяв на ней две точки x и y, рассмотрим набор плюкеровых лучевых координат $p' = x\wedge y$. Тогда из совместимости соотношений

$$\sum p^{ij}u_j = 0 \quad (i=1,2), \quad \sum x^i u_i = 0, \quad y^i u_i = 0$$

видно, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & p^{12} & p^{13} & p^{14} \\ -p^{12} & 0 & p^{23} & p^{24} \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{pmatrix}$$

должен быть равен двум. Приравнивая все определители порядка 3 нулю, получим

$$p^{12}p'^{23} = p^{23}p'^{12}, \dots$$

Все это означает, что существует такое число ρ, что

$$\frac{p^{ij}}{p'^{ij}} = \rho,$$

т. е.

$$p = \rho x \wedge y.$$

Поскольку точка ρx тоже лежит на плоскости (1), видим, что P — тоже лучевые координаты плоскости (1), что и требовалось доказать. На самом деле мы доказали даже больше, а именно следующую теорему.

Теорема 1 (Ю. Плюкер [2]). *Пусть коэффициенты антисимметричной матрицы p удовлетворяют уравнению Плюкера $[p]=0$, тогда существуют линейно независимые 4-векторы u и v такие, что*

$$\sum p^{ij} u_j = 0, \quad p^{ij} v_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

При этом плоскость

$$\sum u_i x^i = 0, \quad \sum v_i x^i = 0$$

имеет в качестве осевых координат $q = u \wedge v$, а в качестве лучевых — заданный набор p.

Теперь нетрудно усмотреть связь между лучевыми и осевыми координатами. Пусть p — лучевые координаты плоскости, тогда один из возможных отличающихся множителем наборов осевых координат дается как $q = u \wedge v$, где u и v удовлетворяют уравнению

$$\sum_i p^{ij} u_j = 0, \quad \sum_i p^{ij} v_j = 0.$$

Отсюда

$$\sum_i p^{ij}(u_j v_k - v_j u_k) = 0, \quad i, k = 1, \ldots, 4$$

и при $i=1$ и $k=4$

$$p^{12} q_{24} + p^{13} q_{34} = 0, \quad \text{т. е.} \quad p^{12} : q_{34} = p^{13} : q_{42}.$$

Принимая во внимание прочие соотношения, получим следующую связь лучевых и осевых координат:

$$p^{12} : p^{13} : p^{14} : p^{34} : p^{42} : p^{23} = \\ = q_{34} : q_{42} : q_{23} : q_{12} : q_{13} : q_{14}. \quad (2)$$

Поскольку сюда входят только отношения координат, это соотношение верно для любых наборов лучевых и осевых координат одной и той же плоскости. Если же по данной матрице (p^{ij}) найти матрицу (q_{ij}), просто переставив индексы, — эту перестановку мы будем далее обозначать как $(p^{ij})^* = (q_{ij})$, — то мы получим один из наборов осевых координат.

2. Поля, в которых $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ ортогональны

Электромагнитное поле можно описать при помощи силового бивектора:

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы F_{ij} суть функции

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict.$$

Эта матрица для поля, в котором $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ ортогональны, удовлетворяет условию

$$0 = -ic(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = -cB_z iE_z - cB_y iE_y - cB_x iE_x = \\ = F_{12}F_{34} - F_{13}F_{24} + F_{23}F_{14},$$

или

$$F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23} = 0.$$

Но это в точности уравнение Плюкера. Поэтому поле, в котором $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ ортогональны, можно описать геометрически как сопоставление точке

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

обычного пространства прямой проективного пространства с осевыми координатами (F_{ij}). Такое поле будем далее называть *плюкеровым*.

3. Плюкерово поле, удовлетворяющее первой четверке уравнений Максвелла

Первая четверка уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

означает, что 2-форма

$$\Omega = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

точна, т. е. $d\Omega = 0$. Это условие можно записать как $\mathfrak{Rot}(F_{ij}) = 0$ или $\mathfrak{Div}(F_{ij})^* = 0$ [3].

Пусть (F_{ij}) — плюкерово поле, удовлетворяющее первой четверке уравнений Максвелла. В силу теоремы 1 имеются такие векторы

$$(\Phi^1, \ldots, \Phi^4), \ \ldots, \ (\Psi^1, \ldots, \Psi^4),$$

что

$$(F_{ij})^* = (\Phi^i) \wedge (\Psi^i).$$

Поэтому уравнение $\mathfrak{Div}\, F^* = 0$ дает

$$(\mathfrak{Div}\, F^*)_i = \sum_{j=1}^{4} \partial_{x_j}(\Phi^i \Psi^j - \Phi^j \Psi^i) = \\ = \sum_{j=1}^{4} (\Psi^j \partial_{x_j} \Phi^i - \Phi^j \partial_{x_j} \Psi^i) + \Phi^i\, \mathfrak{Div}\, \Psi - \Psi_i\, \mathfrak{Div}\, \Phi = 0$$

или

$$[\Phi, \Psi] = (\mathfrak{Div}\, \Phi) \sum_{i=1}^{4} \Psi_i \partial_{x_i} - (\mathfrak{Div}\, \Psi) \sum_{i=1}^{4} \Phi_i \partial_{x_i}. \quad (3)$$

Здесь $[\,,]$ означает коммутатор двух векторных полей Φ и Ψ.

Из этого уравнения следует, что векторные поля Φ и Ψ находятся в инволюции, и, значит, по теореме Фробениуса существуют два решения у системы двух линейных уравнений

$$(\Phi, \nabla u) = (\Psi, \nabla u) = 0 \tag{4}$$

с линейно независимыми градиентами. Обозначим их как u и v.

В силу (4) матрица

$$\nabla u \wedge \nabla v$$

сопряжена с исходной F^* в силу теоремы 1 Плюкера. Поэтому с точностью до некоторой функции $\rho(x)$ верно

$$F = F^{**} = \rho(x)\, \nabla u \wedge \nabla v. \tag{5}$$

Это позволяет переписать 2-форму Ω в виде

$$\Omega = \rho(x) du \wedge dv.$$

Но тогда условие $d\Omega = 0$ эквивалентно

$$d\rho \wedge du \wedge dv = 0$$

Таким образом, первая четверка уравнений Максвелла означает лишь, что определители

$$\frac{\partial(\rho, u, v)}{\partial(x_k, x_i, x_j)} = 0.$$

Это в свою очередь эквивалентно тому, что ρ функционально зависит от u и v:

$$\rho = \rho(u, v).$$

Итак, первая четверка утверждает, что

$$F = \rho(u, v)\, \nabla u \wedge \nabla v.$$

Заметим теперь, что

$$\nabla(\mu(u, v)u) \wedge \nabla v = (\mu + u\mu_u) \nabla u \wedge \nabla v.$$

Найдя из уравнения

$$\mu + u\mu_u = \rho(u, v)$$

$\mu(u, v)$, представим F в виде

$$F = \nabla(\mu u) \wedge \nabla v.$$

Переобозначая μu как u, видим, что $F = \nabla u \wedge \nabla v$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого поля F, которое удовлетворяет условию $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = 0$ и первой четверке уравнений Максвелла $\mathfrak{Rot}\, F = 0$, существуют две такие функции u и v, что*

$$F = \nabla u \wedge \nabla v,$$

или

$$F_{ij} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x_i, x_j)}.$$

Например, если

$$u = x_2, \quad v = Ae^{k_1 x_1 + k_4 x_4},$$

то

$$\boldsymbol{E} = iAk_4 e^{k_1 x_1 + k_4 x_4} \boldsymbol{e}_{x_2}, \quad \boldsymbol{B} = -Ak_1 e^{k_1 x_1 + k_4 x_4} \boldsymbol{e}_{x_3},$$

т. е. обычная плоская волна. Примечательно и то, что плоская волна описывается при помощи скалярной волны $v = Ae^{k_1 x_1 + k_4 x_4}$ и еще одной скалярной функции u, задающей плоскость поляризации. Такое описание волны лучше обычного, поскольку оно не вводит проблемы «левой и правой волн» [4].

Утверждение, обратное теореме 2, очевидно, поскольку 2-форма

$$\sum \frac{\partial(u, v)}{\partial(x_i, x_j)} dx_i\, dx_j = du \wedge dv$$

точна.

4. Плюкерово поле, удовлетворяющее однородной системе уравнений Максвелла

Пусть теперь $(F_i j)$ удовлетворяет еще и второй четверке уравнений Максвелла

$$\mathfrak{Div}(F_{ij}) = 0.$$

Меняя ролями осевые и лучевые координаты, видим, что найдутся функции w_1 и w_2 такие, что

$$(F_{ij})^* = \rho(x) \nabla w_1 \wedge \nabla w_2,$$

причем эти функции будут двумя независимыми решениями системы

$$(\nabla u, w) = 0, \quad (\nabla v, w) = 0.$$

Отсюда следует, что поля ∇u и ∇v должны состоять в инволюции, т. е.

$$[\nabla u, \nabla v] = 0.$$

С другой стороны, повторяя выкладки, приведшие к соотношению (3), видим, что

$$\mathfrak{Div}(F_{ij}) = \mathfrak{Div}(\nabla u \wedge \nabla v) = 0$$

означает, что коммутатор

$$[\nabla u, \nabla v] = (\mathfrak{Div}\, \nabla u) \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial v}{\partial x_i} \partial_{x_i} - (\mathfrak{Div}\, \nabla v) \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial u}{\partial x_i} \partial_{x_i}.$$

Поэтому функции u и v должны удовлетворять соотношению

$$\Box u \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial v}{\partial x_i} \partial_{x_i} - \Box v \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial u}{\partial x_i} \partial_{x_i} = 0.$$

Коль скоро поля ∇u и ∇v не коллинеарны, то отсюда следует система

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ \Box v = 0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для любого поля F, которое удовлетворяет условию $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = 0$ и однородной системе уравнений Максвелла*

$$\begin{cases} \mathfrak{Rot}\, F = 0, \\ \mathfrak{Div}\, F = 0, \end{cases}$$

найдутся такие два решения $w = u$ *и* $w = v$ *волнового уравнения* $\Box w = 0$, *что*

$$F = \nabla u \wedge \nabla v,$$

причем

$$[\nabla u, \nabla v] = 0.$$

Следует отметить, что условие $[\nabla u, \nabla v] = 0$ существенно. Например, если взять

$$u = x_1, \quad v = Ae^{k_1 x_1 + k_4 x_4},$$

то получится волна с продольной составляющей

$$E_1 = iF_{14} = i\frac{\partial uv}{\partial x_1 x_4} = iAk_4 e^{k_1 x_1 + k_4 x_4}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* Постановка краевых задач для системы уравнений Максвелла с использованием шестивектора // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция «Физика»: Сб. расширенных тезисов докладов. Ч. 2. М.: Физ. ф-т МГУ, 2004. С. 108.
2. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. М.; Ижевск, 2002.
3. *Паули В.* Теория относительности. М., 1983.
4. *Шубников А.В.* Оптическая кристаллография. М.; Л., 1950.

Поступила в редакцию
30.11.2007