

УДК 537.621

## ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОБРАЗЦА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Д. В. Вагин, Т. Н. Герасименко, П. А. Поляков

(кафедра общей физики)

E-mail: vagin@gen5521.phys.msu.ru

**В работе получено аналитическое выражение для напряженности магнитного поля внутри и вне намагниченного образца прямоугольной формы в отсутствие нефизических расходимостей на его границах.**

Известно всего несколько нетривиальных примеров намагниченных тел, для которых магнитное поле может быть представлено в аналитическом виде (сфера, эллипс) [1, 2]. Для образцов более сложной формы магнитное поле рассчитывается только численными методами [3]. Однако недавно были получены аналитические формулы для вычисления поля однородно намагниченного прямоугольного параллелепипеда [4]. Но приведенные в статье [4] выражения приводят к расходимости магнитного поля вблизи ребер образца, что говорит о нефизичности данного решения, так как магнитное поле образца не может превышать  $4\pi M_0$ , где  $M_0$  — намагниченность насыщения. В настоящей работе построена физически и математически корректная модель для расчета намагниченности параллелепипеда, имеющая аналитическое решение для магнитного поля образца прямоугольной формы в отсутствие сингулярностей.

Наличие сингулярности в модели однородно намагниченного прямоугольного параллелепипеда [4] говорит о том, что в реальной ситуации в образце будут существовать области неоднородной намагниченности. Рассмотрим модель, в которой эффективные молекулярные токи, обусловленные намагниченностью, равномерно распределены в некоторой области  $\delta$  вблизи боковых граней. Покажем, что данная задача имеет аналитическое физически корректное решение, переходящее в пределе малых  $\delta$  в результаты работы [4].

Рассмотрим однородно намагниченный вдоль оси  $OZ$  параллелепипед со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , ориентированными вдоль координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Используя гипотезу Ампера, легко показать, что поле такого бруска эквивалентно полю тока, текущего по его боковым граням. Вектор намагниченности изменяет свое направление вблизи поверхности ферромагнитного тела, тем самым минимизируя его свободную энергию. Будем считать, что ток течет не по поверхности образца, а в тонком приповерхностном слое  $\Omega$  постоянной толщины  $\delta$ . Величину плотности тока  $j$  считаем постоянной по всему слою ( $j \equiv |j|$ ) и равной  $j = M_0 C / \delta$ , где  $C$  — скорость света. В этом случае интегральное выра-

жение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  магнитного поля в точке с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$  будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{C} \int_{\Omega} \frac{j \, dx \, dy \, dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}}. \quad (1)$$

Выражения для компонент вектора магнитного поля с учетом (1) имеют следующий вид:

$$B_x(\xi, \eta, \zeta) = \frac{j}{C} \left\{ 2|z - \zeta| \operatorname{arctg} \frac{(y - \eta) + (z - \zeta) + R}{|z - \zeta|} + (x - \xi) \ln[(y - \eta) + R] + (y - \eta) \ln[(x - \xi) + R] \right\} \times \\ \times \left( |_{\delta,0,0}^{a-\delta,\delta,c} - |_{\delta,b-\delta,0}^{a-\delta,b,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,0,0}^{\delta,\delta,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,0,0}^{a,\delta,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,b-\delta,0}^{a,b,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,b-\delta,0}^{\delta,b,c} \right), \quad (2)$$

$$B_y(\xi, \eta, \zeta) = \frac{j}{C} \left\{ 2|z - \zeta| \operatorname{arctg} \frac{(x - \xi) + (z - \zeta) + R}{|z - \zeta|} + (x - \xi) \ln[(y - \eta) + R] + (y - \eta) \ln[(x - \xi) + R] \right\} \times \\ \times \left( |_{a-\delta,\delta,0}^{a,b-\delta,c} - |_{0,\delta,0}^{\delta,b-b,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,0,0}^{\delta,\delta,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,0,0}^{a,\delta,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,b-\delta,0}^{a,b,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,b-\delta,0}^{\delta,b,c} \right), \quad (3)$$

$$B_z(\xi, \eta, \zeta) = \frac{j}{C} \left\{ 2|x - \xi| \operatorname{arctg} \frac{(y - \eta) + (z - \zeta) + R}{|x - \xi|} + (z - \zeta) \ln[(y - \eta) + R] + (y - \eta) \ln[(z - \zeta) + R] \right\} \times \\ \times \left( |_{\delta,0,0}^{a-\delta,\delta,c} - |_{\delta,b-\delta,0}^{a-\delta,b,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,0,0}^{\delta,\delta,c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,0,0}^{a,\delta,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta,b-\delta,0}^{a,b,c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0,b-\delta,0}^{\delta,b,c} \right) + \\ + \frac{j}{C} \left\{ 2|y - \eta| \operatorname{arctg} \frac{(x - \xi) + (z - \zeta) + R}{|y - \eta|} + \right.$$

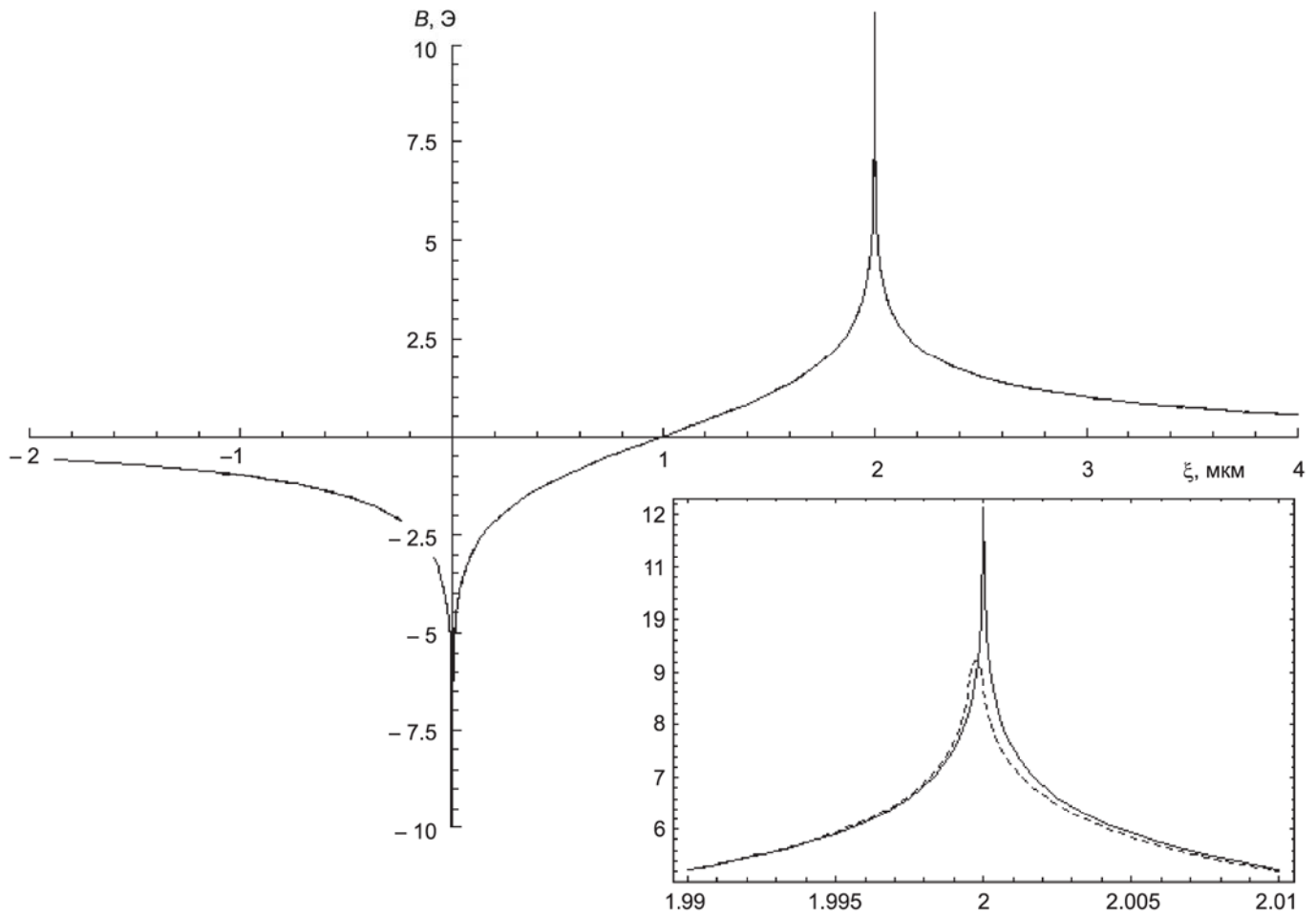


Рис. 1. График зависимости компоненты  $B_x$  магнитного поля от координаты  $\xi$  (направление вдоль оси OX). Пунктирная кривая — результат расчета по формулам (2)–(4), сплошная кривая — результаты работы [4],  $M_0 = 10^4$  Гс

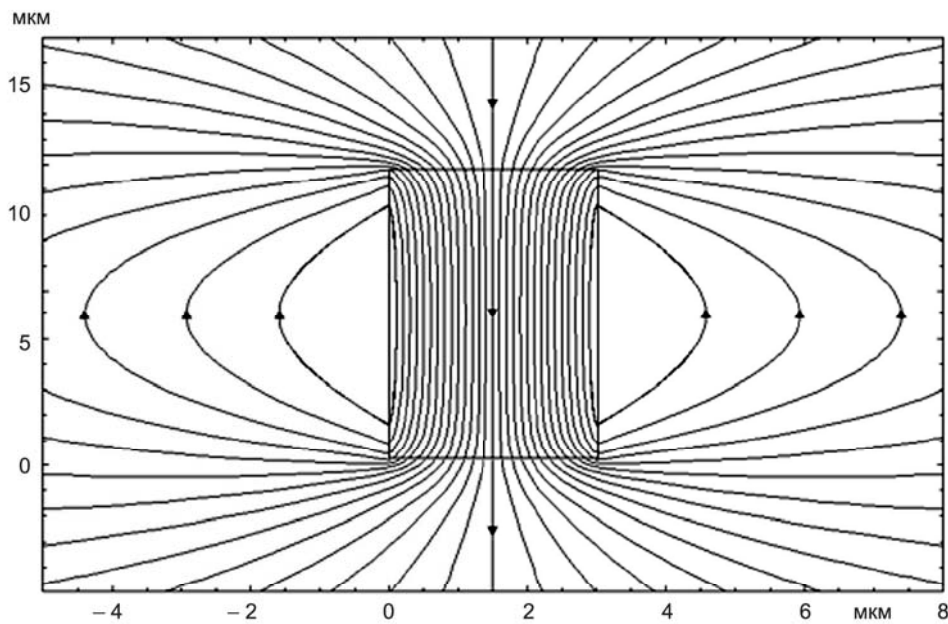


Рис. 2. Картина силовых линий магнитного поля, рассчитанного по формулам (2)–(4), в центральном сечении образца прямоугольной формы с размерами  $(a : b : c : d) = (3 : 4 : 12 : 0.0005)$

$$\begin{aligned}
& + (x - \xi) \ln[(z - \zeta) + R] + (z - \zeta) \ln[(x - \xi) + R] \Big\} \times \\
& \times \left( |_{a-\delta, \delta, 0}^{a, b-\delta, c} - |_{0, \delta, 0}^{\delta, b-\delta, c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0, 0, 0}^{\delta, \delta, c} + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta, 0, 0}^{a, \delta, c} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} |_{a-\delta, b-\delta, 0}^{a, b, c} - \frac{1}{\sqrt{2}} |_{0, b-\delta, 0}^{\delta, b, c} \right). \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь  $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ , а в круглых скобках записаны подстановки для  $x, y, z$ . Такая запись использована для того, чтобы представить результат в более компактном виде. Толщина  $\delta$  определяется из условия  $|\mathbf{B}| \leq 4\pi M$  во всем объеме образца и на его границах. Параметру математической регуляризации  $\delta$  можно придать физический смысл. Как известно, вследствие конечности размеров образца его нельзя намагнитить строго однородно. Размер неоднородности распределения намагнитченности как раз и определяется этим параметром. В качестве примера приведем график зависимости величины компоненты магнитного поля  $B_x$  от координаты  $\xi$  (рис. 1) в сравнении с результатами работы [4] для значений параметров параллелепипеда  $a = 2$  мкм,  $b = 4$  мкм,  $c = 10$  мкм,  $\delta = 0.5$  нм.

Видно, что предложенная физическая модель, в отличие от формализма, рассмотренного в [4], позволяет избежать сингулярности на ребрах образца прямоугольной формы и не имеет нефизических значений магнитного поля, превышающих  $4\pi M_0$ .

При удалении от границ образца результаты обеих моделей совпадают.

Для наглядности построим картину силовых линий поля, рассчитанного по формулам (2)–(4) (рис. 2). Полученная картина силовых линий совпадает с экспериментальными результатами [5, 6] как вне, так и внутри магнита.

Таким образом, в работе впервые получено точное аналитическое выражение для магнитного поля однородно намагнитченного прямоугольного параллелепипеда как внутри, так и вне образца в отсутствие нефизических расходимостей на его гранях.

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 2001.
2. Вонсовский С.В. Магнетизм. М., 1971.
3. FEM: [http://www.integratedsoft.com/papers/benchmark/bar\\_magnet](http://www.integratedsoft.com/papers/benchmark/bar_magnet); LLG Simulator: <http://llgmicro.home.mindspring.com>; OOMMF: <http://math.nist.gov/oommf>.
4. Engel-Herbert R., Hesjedal T. // J. Appl. Phys. 2005. **97**. P. 074504.
5. Парсел Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики. М., 1975.
6. Cingoski V., Yamashita H. // J. Appl. Phys. 1997. **81**. P. 4088.

Поступила в редакцию  
13.05.2008