Зависимость эффективности апостериорной оценки точности приближенного решения эллиптической краевой задачи от входных данных и параметров алгоритма

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. А. Панин[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: [a] a-panin@yandex.ru

На примере численных экспериментов рассмотрена зависимость эффективности предложенной С. И. Репиным оценки погрешности приближенных решений эллиптических уравнений от параметров этой оценки.

PACS: 02.60.Lj, 02.70.–c.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, оценка погрешности, апостериорная оценка погрешности.

Статья поступила 26.12.2007, подписана в печать 27.02.2008.

Введение

В настоящее время в связи с ростом возможностей вычислительной техники все более актуальной становится проблема апостериорной оценки точности получаемых приближенных решений. Вероятно, один из самых универсальных методов был предложен С. И. Репиным (см. [1–5] и обзор [6]).

В применении к классическим эллиптическим задачам типа

$$\begin{cases} \triangle u = -f, & x \in \Omega, \\ u = u_0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

где Ω — область с липшицевой границей, этот метод позволяет получить оценку вида

$$\|\nabla(u-v)\|^2 \leqslant (1+\beta)\|\nabla v - \boldsymbol{y}\|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right) C_\Omega^2 \|\operatorname{div}\boldsymbol{y} + f\|^2 \equiv M(v,\beta,\boldsymbol{y}), \quad (1)$$

где v — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) + u_0$, $\boldsymbol{y}$ — произвольная вектор-функция из $H(\Omega, \operatorname{div}) \equiv \{\mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{div}\mathbf{y} \in L^2(\Omega)\}$, а $\beta > 0$ — любое положительное число. Константа C_Ω, зависящая только от области Ω, — это константа из неравенства Фридрихса $\forall w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $C_\Omega\|\nabla w\| \geqslant \|w\|$. Здесь $\|\cdot\|$ всюду обозначает L_2-норму, скалярную или векторную.

В частности, если v — приближенное решение рассматриваемой задачи, принадлежащее допустимому многообразию $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)+u_0$, то (1) дает оценку сверху, которая ни при каких $\boldsymbol{y}$ и β не может оказаться меньше точного значения погрешности. Проблема, как видно, состоит в минимизации полученного функционала $M(v,\beta,\boldsymbol{y})$, называемого *мажорантой*. При этом можно как использовать выбранные заранее значения β, так и применить алгоритм выбора оптимального β [5, формула (48)].

1. Численные эксперименты

Мы рассматриваем совокупность одномерных задач вида

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & x \in (0;L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Длину отрезка L и правую часть $f(x)$ при этом можно задавать произвольно.

Для рассматриваемой задачи оценка (1) выглядит следующим образом:

$$\int_0^L (u'-v')^2\,dx \leqslant (1+\beta)\int_0^L (v'-y)^2\,dx + \frac{1+\beta}{\beta} C_\Omega^2 \int_0^L (y'+f(x))^2\,dx \equiv M(v,\beta,y), \quad (3)$$

где $y \in W_2^1(0;L)$ («вырожденное» при одномерной задаче $H(\Omega, \operatorname{div})$) и $\beta > 0$ — произвольны, $C_\Omega = \frac{L}{\pi}$.

В качестве метода приближенного решения был выбран метод конечных элементов. Отрезок $[0;L]$ разбивался на N равных отрезков. Рассматривались кусочно-аффинные элементы, позволяющие построить непрерывное приближенное решение (первая серия экспериментов) и кусочно-кубические, позволяющие построить решение с непрерывной первой производной (вторая серия экспериментов).

Рассмотрим процесс минимизации функционала $M(v,\beta,y)$ относительно y. Необходимо было выбрать некоторую последовательность подпространств Y_{h_n}, предельно плотную в $W_2^1(0;L)$. Для этого каждый из N отрезков разбивался еще на $n \geqslant 1$ отрезков. Сужение каждой функции y из пространства Y_{h_n} на каждый из этих отрезков представляло собой аффинную (первая серия) или квадратичную функцию (вторая серия). Вдоль всего отрезка $[0;L]$ функция y была непрерывной. Таким образом, для каждой фиксированной пары (N,n) имелось взаимно однозначное соответствие между функцией y и некоторым конечномерным вектором $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$ ($M = Nn+1$ в первой серии и $M = 2Nn+1$ во второй), что позволило, вычислив для этих N и n необходимые интегралы один раз (те, что зависят только от базисных функций, выбранных для построения v и $\boldsymbol{y}$, — аналитически, остальные — численно), представить функционал $M(v,\beta,y)$ в виде квадратичного функционала

$$\frac{1}{2}(A(\beta),\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{b}(\beta),\boldsymbol{y}) + c, \quad (4)$$

где $A(\beta) \in \mathbb{M}^{M\times M}$ — матрица, а $\boldsymbol{b}(\beta) \in \mathbb{R}^M$ — вектор, зависящие от параметра β. Такое представление позволило найти $\boldsymbol{y}_0$ как $-A(\beta)^{-1}\boldsymbol{b}(\beta)$, что в силу структуры матрицы и благодаря существованию специально ориентированного на работу с матрицами пакета Matlab является чрезвычайно дешевой операцией. Впрочем, при больших N и n вектор $-A(\beta)^{-1}\boldsymbol{b}(\beta)$ вычисляется с погрешностью, существенной для рассматриваемой задачи, поэтому оказалось полезным взять найденный вектор $\boldsymbol{y}_0$ в качестве начального приближения и провести минимизацию методом сопряженных градиентов, получив y_1.

Были проведены численные эксперименты, выявляющие характер зависимости качества полученных оценок от величин N (т. е. от вида самого приближенного решения), n (т. е. от вида пространства Y_h) и параметра β.

Для характеристики качества оценки мы использовали так называемый индекс (показатель) эффективности [1], равный отношению найденного минимума функционала к действительному значению погрешности, $I_{\rm eff} = M(v, \beta, y_1)/\|\nabla(u-v)\|^2$, где функция y_1 соответствует найденному вектору y_1. Таким образом, чем *меньше* (ближе к единице) показатель эффективности, тем *лучше* оценка. Полученные результаты представлены в виде таблиц. В каждой таблице представлено точное значение оцениваемой погрешности приближенного решения, полученного в пространстве конечных элементов при данном N, далее идут значения N и n, затем значения показателя эффективности при разных β. Значения, приведенные в предпоследнем столбце каждой таблицы, получены минимизацией мажоранты с выбором оптимального β в три итерации, а значения, приведенные в последнем столбце, представляют найденные оптимальные $\beta = \beta_{\rm opt}$. Все числа, кроме $\beta_{\rm opt}$, округлены до пяти десятичных знаков, $\beta_{\rm opt}$ — до трех.

1.1. Серия I. Линейные конечные элементы для функций v и y

Данная серия экспериментов состоит из трех подсерий (Iа, Iб, Iв). В каждой из них приближенно решается задача вида (2) при $L = 1$, в которой различаются лишь правые части f.

Подсерия Iа: $f = 2$, $u = -x^2 + x$, $u' = -2x + 1$, $u'' = -2$, $\|u'\|^2 = 0.33333$.

Подсерия Iб: $f = 2x$, $u = -\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}$, $u' = -x^2 + \frac{1}{3}$, $u'' = -2x$, $\|u'\|^2 = 8.8888 \cdot 10^{-2}$.

Подсерия Iв: $f = x^2$, $u = -\frac{x^4}{12} + \frac{x}{12}$, $u' = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{12}$, $u'' = -x^2$, $\|u'\|^2 = 8.9286 \cdot 10^{-3}$.

1.2. Серия II. Кубические конечные элементы для функции v и кусочно-квадратичная функция y

В данной серии данные дифференциальной задачи те же, что в подсерии Iв: $L = 1$, $f = x^2$, $u = -\frac{x^4}{12} + \frac{x}{12}$, $u' = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{12}$, $u'' = -x^2$, $\|u'\|^2 = 8.9286 \cdot 10^{-3}$.

Таблица 1

Подсерия Iа

$\|v'-u'\|^2$	N	n	$\beta=0.5$	$\beta=0.01$	$\beta=0.0001$	$\beta=\beta_{\rm opt}$	$\beta_{\rm opt}$
$3.7037 \cdot 10^{-2}$	3	1	1.4509	1.0091	1.0001	1.0084	$0.928 \cdot 10^{-2}$
	3	5	1.4422	1.0089	1.0001	1.0111	$1.24 \cdot 10^{-2}$
	3	10	1.4384	1.0089	1.0001	1.0116	$1.29 \cdot 10^{-2}$
$1.3333 \cdot 10^{-2}$	5	1	1.4822	1.0097	1.0001	1.0020	$2.07 \cdot 10^{-3}$
	5	5	1.4783	1.0096	1.0001	1.0026	$2.75 \cdot 10^{-3}$
	5	10	1.4776	1.0096	1.0001	1.0028	$2.89 \cdot 10^{-3}$
$3.3333 \cdot 10^{-3}$	10	1	1.4955	1.0099	1.0001	1.0003	$2.66 \cdot 10^{-4}$
	10	5	1.4945	1.0099	1.0001	1.0003	$3.53 \cdot 10^{-4}$
	10	10	1.4944	1.0099	1.0001	1.0005	$3.69 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Подсерия Iб

$\|v'-u'\|^2$	N	n	$\beta=0.5$	$\beta=0.01$	$\beta=0.0001$	$\beta=\beta_{\rm opt}$	$\beta_{\rm opt}$
$1.2071 \cdot 10^{-2}$	3	1	2.3722	$3.2401 \cdot 10^1$	$3.1100 \cdot 10^3$	2.3562	$5.96 \cdot 10^{-1}$
	3	5	1.4747	2.2649	$1.2536 \cdot 10^2$	1.2228	$1.19 \cdot 10^{-1}$
	3	10	1.4450	1.3229	$3.2090 \cdot 10^1$	1.1083	$6.08 \cdot 10^{-2}$
	3	50	1.4354	1.0215	2.2437	1.0232	$1.83 \cdot 10^{-2}$
	3	100	1.4351	1.0120	$1.3110 \cdot 10^3$	1.0156	$1.52 \cdot 10^{-2}$
$1.1089 \cdot 10^{-3}$	10	1	2.4082	$3.1771 \cdot 10^1$	$3.0470 \cdot 10^3$	2.4022	$5.55 \cdot 10^{-1}$
	10	5	1.5308	2.2404	$1.2284 \cdot 10^2$	1.2318	$1.11 \cdot 10^{-1}$
	10	10	1.5032	1.3175	$3.1460 \cdot 10^1$	1.1129	$5.55 \cdot 10^{-2}$
	10	50	1.4944	1.0222	2.2185	1.0221	$1.11 \cdot 10^{-2}$
	10	100	1.4941	1.0130	1.3047	1.0110	$5.56 \cdot 10^{-3}$
$2.7764 \cdot 10^{-4}$	20	1	2.4110	$3.1796 \cdot 10^1$	$3.0425 \cdot 10^3$	2.4055	$5.52 \cdot 10^{-1}$
	20	5	1.5351	2.2386	$1.2266 \cdot 10^2$	1.2325	$1.10 \cdot 10^{-1}$
	20	10	1.5076	1.3171	$3.1415 \cdot 10^1$	1.1132	$5.52 \cdot 10^{-2}$
	20	50	1.4989	1.0223	2.2167	1.0222	$1.10 \cdot 10^{-2}$
	20	100	1.4986	1.0130	1.3042	1.0110	$5.52 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3

Подсерия Iв

$\|v'-u'\|^2$	N	n	$\beta=0.5$	$\beta=0.01$	$\beta=0.0001$	$\beta=\beta_{\rm opt}$	$\beta_{\rm opt}$
$1.7396\cdot10^{-3}$	3	1	3.5462	$7.2034\cdot10^{1}$	$7.0324\cdot10^{3}$	3.2444	$9.39\cdot10^{-1}$
	3	5	1.5232	3.9138	$2.8840\cdot10^{2}$	1.3503	$1.82\cdot10^{-1}$
	3	10	1.4547	1.7356	$7.2897\cdot10^{1}$	1.1676	$9.15\cdot10^{-2}$
	3	50	1.4327	1.0380	3.8766	1.0334	$2.34\cdot10^{-2}$
	3	100	1.4320	1.0162	1.7192	1.0197	$1.74\cdot10^{-2}$
$1.6574\cdot10^{-4}$	10	1	3.5278	$6.9477\cdot10^{1}$	$6.7805\cdot10^{3}$	3.3129	$8.31\cdot10^{-1}$
	10	5	1.5756	3.7540	$2.7270\cdot10^{2}$	1.3553	$1.66\cdot10^{-1}$
	10	10	1.5141	1.6960	$6.8930\cdot10^{1}$	1.1708	$8.29\cdot10^{-2}$
	10	50	1.4944	1.0373	3.7173	1.0031	$1.66\cdot10^{-2}$
	10	100	1.4938	1.0168	1.6794	1.0165	$8.29\cdot10^{-3}$
$4.1609\cdot10^{-5}$	20	1	3.5268	$6.9294\cdot10^{1}$	$6.7624\cdot10^{3}$	3.3176	$8.24\cdot10^{-1}$
	20	5	1.5797	3.7427	$2.7159\cdot10^{2}$	1.3557	$1.65\cdot10^{-1}$
	20	10	1.5187	1.6932	$6.8648\cdot10^{1}$	1.1711	$8.24\cdot10^{-2}$
	20	50	1.4992	1.0373	3.7060	1.0331	$1.65\cdot10^{-2}$
	20	100	1.4986	1.0168	1.6765	1.0165	$8.23\cdot10^{-3}$

Таблица 4

Подсерия II

$\|v'-u'\|^2$	N	n	$\beta=0.5$	$\beta=0.01$	$\beta=0.0001$	$\beta=\beta_{\rm opt}$	$\beta_{\rm opt}$
$1.2217\cdot10^{-7}$	3	1	$1.7132\cdot10^{2}$	$5.7454\cdot10^{3}$	$5.6886\cdot10^{5}$	$6.4772\cdot10^{1}$	$1.90\cdot10^{1}$
	3	5	1.7593	$1.0203\cdot10^{1}$	$9.1118\cdot10^{2}$	1.6879	$3.07\cdot10^{-1}$
	3	10	1.5012	1.5844	$5.7886\cdot10^{1}$	1.1549	$7.64\cdot10^{-2}$
	3	50	1.4840	1.0107	1.0911	1.0060	$3.44\cdot10^{-3}$
	3	100	1.4840	1.0098	1.0058	1.0020	$1.76\cdot10^{-3}$
$1.1918\cdot10^{-10}$	10	1	$1.4171\cdot10^{3}$	$4.7703\cdot10^{4}$	$4.7235\cdot10^{6}$	$4.8425\cdot10^{2}$	$9.21\cdot10^{1}$
	10	5	3.7657	$7.7335\cdot10^{1}$	$7.5587\cdot10^{3}$	3.4914	$8.72\cdot10^{-1}$
	10	10	1.6400	5.7803	$4.7335\cdot10^{2}$	1.4814	$2.18\cdot10^{-1}$
	10	50	1.4985	1.0176	1.7561	1.0174	$8.70\cdot10^{-3}$
	10	100	1.4983	1.0105	1.0473	1.0043	$2.18\cdot10^{-3}$
$1.9645\cdot10^{-12}$	20	1	$5.3726\cdot10^{3}$	$1.8088\cdot10^{5}$	$1.7910\cdot10^{7}$	$1.8078\cdot10^{3}$	$2.42\cdot10^{2}$
	20	5	$1.0096\cdot10^{1}$	$2.9041\cdot10^{2}$	$2.8657\cdot10^{4}$	7.2495	1.70
	20	10	2.0368	$1.9098\cdot10^{1}$	$1.7920\cdot10^{3}$	2.0253	$4.23\cdot10^{-1}$
	20	50	1.5004	1.0389	3.8665	1.0341	$1.69\cdot10^{-2}$
	20	100	1.4996	1.0118	1.1795	1.0085	$4.23\cdot10^{-3}$

2. Наблюдения и выводы

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать следующие наблюдения и выводы.

1. Эффективность оценок зависит от того, насколько хорошо производная функции y из выбранного пространства Y_h может приблизить $-f$ (см. второе слагаемое в (3)). Так, в первой серии наших экспериментов мы увидели, что для $f=\mathrm{const}$, которая, естественно, может быть приближена кусочно-постоянной y' точно, оценка очень близка к точному значению ошибки уже при $n=1$, и это достигается при малых β. При росте же степени многочлена в правой части эффективность оценки несколько ухудшается. Это легко заметить, если сравнить столбцы, соответствующие одним и тем же N, n, β, табл. 1, 2, 3. Это наблюдение находится в полном соответствии с результатами численного эксперимента, проведенного авторами метода и описанного в [4, раздел 5.1]. В этом примере для построения пространства Y_h разбиение области не производилось, но в качестве y брались многочлены, и с ростом их степени улучшалась эффективность оценки (см. [4, п. 5.1.4]). Таким образом, рост степени y, равно как и уменьшение степени f, ведет к уменьшению показателя эффективности, т. е. к улучшению качества оценки. Аналогичный эффект наблюдался и в примере, описанном в [1, раздел 4.2].

В этой связи смысл рекомендации в [4, п. 5.1.8] брать для y многочлены той же степени, что и для исходной переменной u, понятен: хотя такая степень является излишней для аппроксимации v', она существенна для того, чтобы погрешность в приближении функции $-f$ функцией y' (и соответственно функции v' функцией y) была существенно меньше, чем погрешность самого решения задачи, т. е. $\|u'-v'\|$. В этом случае второе слагаемое мажоранты будет не слишком велико даже при малых β, что позволит первому слагаемому приблизить искомую погрешность. То же наблюдение позволяет сделать и эксперимент из [1, раздел 4.1] с уравнением $u''=c$.

2. Из табл. 1–4 можно видеть, что при больших β показатель эффективности имеет порядок нескольких единиц уже при $n=1$, но он не стремится к 1 при $n\to\infty$. В то же время при малых β в общем случае для небольших n показатель эффективности получается очень большим, но практически стремится к 1 при $n\to\infty$.

3. В то время как, согласно двум предыдущим наблюдениям, получение весьма точных оценок может оказаться достаточно трудоемким, оценки, завышающие погрешность в разумное количество раз (скажем, до 3–4), требуют намного меньше расчетов (см. первые строки каждой подсерии). На это указывают и авторы метода (см., напр., [3], обсуждение примера 1). Таким образом, имеется альтернатива: очень быстро получить оценку, превышающую погрешность в небольшое число раз, или тщательно рассчитать очень точную оценку.

4. Для исключительного случая, представленного в подсерии Ia, когда правая часть точно приближается производными функций y, оценки наиболее эффективны (см. также п. 2), хотя измельчение сетки приводит к некоторому их ухудшению. Возможно, это связано с погрешностями расчета. Кроме того, заметно, что при старте с $\beta=0.5$ (мы выбирали начальное $\beta=0.5$ во всех сериях) значение β, построенное по методу выбора оптимального β при количестве итераций, равном трем, еще не оказывается оптимальным: из предыдущего столбца табл. 1 ясно, что $\beta=10^{-4}$ заведомо лучше. Причина здесь в том, что в силу обращения второго слагаемого мажоранты в 0 минимум по β достигается при $\beta\to 0$, как в «идеальном» случае (который реализовывался бы, если бы можно было минимизировать $M(v,\beta,\boldsymbol{y})$ на всем $H(\Omega,\mathrm{div})$), что не может быть получено за конечное число шагов, каждый из которых дает некоторое ненулевое β. Также нами были проведены эксперименты, показывающие, что в данном случае выбор меньшего начального приближения для β, как и следовало ожидать, улучшает оценки. Увеличение количества итераций в выборе оптимального β тоже их улучшает. В качестве же практического критерия, позволяющего определить, достигнуто ли уже оптимальное для данного n значение β, мы можем предложить отслеживать монотонность итерационной последовательности. Нами было замечено (в экспериментах, где производилось большое количество итераций по β), что после достижения оптимума последовательность начинает колебаться около него. В данном же случае происходит монотонное уменьшение.

5. В целом способ выбора оптимального β оказался чрезвычайно эффективным, поскольку обращение второго слагаемого (3) в нуль — единственный случай, когда оптимальное β ($\beta\to 0$) известно заранее. Как видно из табл. 2, 3 и 4, выбор оптимального β в три итерации, что по вычислительным затратам практически эквивалентно взятию наудачу трех произвольных β, приводит, вообще говоря, к гораздо более эффективной оценке, чем выбор наудачу.

6. В пределах каждой подсерии серии I (т. е. для каждой конкретной правой части уравнения) эффективность оценок при росте N остается практически постоянной, т. е. оказалось, что получение оценки такого же качества для более точного решения требует измельчения сетки в одно и тоже число раз. Это можно заметить, сравнивая строки каждой из табл. 1, 2 и 3, соответствующие одним и тем же n, но разным N.

7. Для получения эффективной оценки желательно, как и рекомендуют авторы цитируемых работ, брать для пространства функций y элементы того же порядка, что взяты и для приближенного решения, а то и большего порядка. Это убедительно доказывает вторая серия экспериментов, где мы умышленно взяли y равными на каждом частичном отрезке многочленам на 1 более низкой степени, чем конечные элементы, с помощью которых разыскивалось решение. Так, свойство «постоянной эффективности», отмеченное нами в серии I, здесь нарушается. Напротив, чем точнее решение, тем бóльшим приходится брать n, чтобы оценить его погрешность с некоторой заданной эффективностью. Это видно, если сравнить строки табл. 4, соответствующие одинаковым n при разных N.

8. Функционал (4), как уже было сказано, очень удобен для отыскания $\boldsymbol{y}$, на котором он достигает минимума. Но, к сожалению, его структура такова, что вычисление *значения* этого минимума требует вычитания одного из другого чисел, существенно бóльших самой погрешности, а именно чисел, имеющих порядок порядка квадрата L_2-нормы производной решения. В то же время в процессе минимизации эти числа не участвуют. Поэтому оказалось полезным, найдя $\boldsymbol{y}_1$, рассчитывать правую часть (3) численным интегрированием.

Список литературы

1. *Repin S.I.* // Mathematics and Computers in Simulation. 1999. **50**, N 1–4. P. 305.
2. *Репин С.И.* Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений // Тр. Санкт-Петерб. матем. об-ва. 2001. **9**. С. 148. Новосибирск, 2001.
3. *Репин С.И., Фролов М.Е.* // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 12. С. 1774.
4. *Repin S., Sauter S., Smolianski A.* // Computing. 2003. **70**, N 3. P. 205. (http://www.math.unizh.ch/fileadmin/math/preprints/03-02.pdf).
5. *Repin S., Sauter S., Smolianski A.* Two-sided a posteriori error estimates for mixed formulations of elliptic problems (http://www.math.unizh.ch/fileadmin/math/preprints/21-05.pdf).
6. http://www.pdmi.ras.ru/~repin/ApoPDE.

Dependence of the efficacy of *a posteriori* accuracy estimation of an approximate solution for the elliptic boundary value problem on the input data and the algorithm parameters

A. N. Bogolyubov, M. D. Malykh, A. A. Panin[a]

Departement of Mathematics, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *a-panin@yandex.ru.*

The efficacy dependence on the error estimation method proposed by S. I. Repin for the elliptic boundary value problem is analysed by means of the test calculations, which results are presented in the paper.

PACS: 02.60.Lj, 02.70.–c.
Keywords: elliptic equations, error estimation, *a posteriori* error estimation.
Received 26 December 2007.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — д. ф.-м. н, профессор, профессор; e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Малых Михаил Дмитриевич — к. ф.-м. н, ассистент; e-mail: malykham@mtu-net.ru.
3. Панин Александр Анатольевич — аспирант; e-mail: a-panin@yandex.ru.