Спектр модельной системы фермионов

Д.С. Голиков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: golikov@mail.crossnet.ru

Рассмотрена система тождественных фермионов. Исходя из концепции истинного символа получено решение соответствующих уравнений Гамильтона. Исследована система уравнений в вариациях, приведены спектры коллективных колебаний квазичастиц.

PACS: 67.10.Fj.

Ключевые слова: фермионы, квантовая статистическая теория.

Статья поступила 16.01.2008, подписана в печать 20.08.2008.

Рассмотрим систему N тождественных частиц массы m, которые находятся на трехмерном прямоугольнике $\boldsymbol{T}$, длины сторон которого равны L_1, L_2 и L_2. Случай бозонов исследован в работе [1]. Мы же рассмотрим случай тождественных фермионов. Будем считать, что потенциал взаимодействия ферми-частицами между собой имеет вид

$$V(x,y) = V\left(\sqrt[3]{N}(x-y)\right), \tag{1}$$

где $V(\xi)$ — финитная четная функция, x, y — координаты бозонов на прямоугольнике $\boldsymbol{T}$. Отметим, что потенциал взаимодействия (1) зависит от N таким образом, что радиус потенциала взаимодействия уменьшается с увеличением числа частиц N, при этом в среднем число частиц, с которыми взаимодействует одна частица, остается постоянным.

Истинный символ

Для исследования этой системы применим методы ультравторичного квантования В.П. Маслова. При ультравторичном квантовании по парам рассматриваемой фермионной системе соответствует ультравторично-квантованный оператор $\overline{\overline{H}}$, для которого выполняется тождество [2]

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{E}}\widehat{A}, \tag{2}$$

где $\overline{\overline{E}}$ — ультравторично-квантованный единичный оператор, а $\widehat{A}$ — оператор в пространстве ультравторичного квантования. Этому тождеству, в частности, удовлетворяет оператор следующего вида:

$$\begin{aligned}\widehat{A} = \int\int dx\,dy\,\widehat{C}^+(x,y) \times \\ \times \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+V(x,y)\right)\widehat{C}^-(x,y) + \\ +2\int\int\int\int dx\,dy\,dx'\,dy'\,V(x,y)\times \\ \times \widehat{C}^+(x,y)\widehat{C}^+(x',y')\widehat{C}^-(x,x')\widehat{C}^-(y',y),\end{aligned} \tag{3}$$

где Δ_x — оператор Лапласа, действующий по переменной x, $V(x,y)$ — потенциал взаимодействия, симметричный относительно перестановки переменных x и y, $\hbar$ — постоянная Планка, $\widehat{C}^+(x,y)$ и $\widehat{C}^-(x,y)$ — фермионные операторы рождения и уничтожения пары частиц в фоковском пространстве ультравторичного квантования, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$[\widehat{C}^-(x_1,x_2),\widehat{C}^+(x_1',x_2')]_+ = \delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2'),$$
$$[\widehat{C}^\pm(x_1,x_2),\widehat{C}^\pm(x_1',x_2')]_+ = 0.$$

Интегрирование здесь и далее производится по трехмерному прямоугольнику $\boldsymbol{T}$.

В силу тождества (2) для нахождения асимптотики спектра рассматриваемой бозонной системы в пределе при $N\to\infty$ нужно найти соответствующую асимптотику [3] для оператора (3).

Оператор числа частиц при квантовании по парам частиц имеет вид

$$\widehat{N} = 2\int\int\widehat{C}^+(x,y)\widehat{C}(x,y).$$

Следовательно, при потенциале в этом предельном случае стоит малый параметр $1/N$. Это означает, что для нахождения асимптотики собственных значений и собственных функций оператора $\widehat{A}$ можно применить квазиклассические методы, развитые в [4]. Асимптотика собственных значений и собственных функций определяется символом оператора (3), этот символ называется *истинным символом* ультравторично-квантованной задачи.

Оператор $\widehat{A}$ имеет вид

$$N\mathcal{H}\left[\frac{\widehat{C}^+(\cdot)}{\sqrt{N}},\frac{\widehat{C}^+(\cdot)}{\sqrt{N}}\right],$$

где $\mathcal{H}$ — следующий функционал:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left[\Phi^+(\cdot),\Phi(\cdot)\right] = \int\int dx\,dy\,\Phi^+(x,y)\times \\ \times\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+V(x,y)\right)\Phi(x,y) + \\ +2N\int\int\int\int dx\,dy\,dx'\,dy'\,V(x,y)\times \\ \times\Phi^+(x,y)\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y',y).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в первом интеграле порядка $1/N$, поэтому при $N\to\infty$ им можно пренебрегать. Введем параметр $\alpha\in[0,1]$, который будет показывать степень учета этого малого слагаемого.

Истинным символом ультравторично-квантованной задачи, соответствующим оператору (3), будем называть функционал

$$\mathcal{H}_\alpha\left[\Phi^+(\cdot),\Phi(\cdot)\right] = \int\int dx\,dy\,\Phi^+(x,y)\times$$

$$\times \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\Phi(x,y)+ \\ +2N\int\int\int\int dx\,dy\,dx'\,dy'\,V(x,y)\times \\ \times\Phi^+(x,y)\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y',y), \quad (4)$$

определенный для пары антисимметричных относительно перестановок аргументов функций $\Phi^+(x,y)$, $\Phi(x,y)$, заданных на $L_2(\boldsymbol{T}^2)$.

Из сохранения числа частиц в системе для функций $\Phi^+(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ следует условие

$$\int\int dx\,dy\,\Phi^+(x,y)\Phi(x,y)=\frac{1}{2}. \quad (5)$$

Система Гамильтона

Согласно асимптотическим методам [4], каждому решению нестационарной системы уравнений

$$i\dot{\Phi}(x,y,t)=\frac{\delta\mathcal{H}_\alpha}{\delta\Phi^+(x,y,t)}, \quad -i\dot{\Phi}^+(x,y,t)=\frac{\delta\mathcal{H}_\alpha}{\delta\Phi(x,y,t)}, \quad (6)$$

удовлетворяющему условию (5), в пределе при $N\to\infty$ соответствует асимптотическая серия собственных функций и собственных значений оператора (3).

Решение системы уравнений (6) будем искать в виде

$$\Phi(x,y,t)=\Phi(x,y)e^{-i\Omega t}, \\ \Phi^+(x,y,t)=\Phi^+(x,y)e^{i\Omega t}. \quad (7)$$

Из явного вида истинного символа (4) следует, что система уравнений (6) после подстановки записывается в виде

$$\Omega\Phi(x,y)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\Phi(x,y)+ \\ +2N\int\int dx'\,dy'\,\big(V(x,y)+V(x',y')\big)\times \\ \times\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y',y),$$

$$\Omega\Phi^+(x,y)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\Phi^+(x,y)+ \\ +2N\int\int dx'\,dy'\,\big(V(x,x')+V(y,y')\big)\times \\ \times\Phi(x',y')\Phi^+(x,x')\Phi^+(y',y). \quad (8)$$

Представим потенциал взаимодействия $NV(x,y)$, зависящий от разности своих аргументов, в виде ряда Фурье:

$$NV\left(\sqrt[3]{N}x\right)=\sum_p v_p e^{ipx},$$

$$v_p=\frac{1}{L_1L_2^2}\int dx\,NV\left(\sqrt[3]{N}x\right)e^{-ipx}, \quad v_p=v_{-p},$$

где p — вектор вида

$$2\pi\left(\frac{n_1}{L_1},\frac{n_2}{L_2},\frac{n_3}{L_2}\right), \quad (9)$$

n_1, n_2, n_3 — целые числа, суммирование производится по всем значениям n_1, n_2, n_3.

Утверждение. *Система уравнений* (5), (8) *при* $\alpha=0$ *имеет решения*

$$\Phi^+(x,y)=\frac{1}{L_1L_2^2}e^{-ik_1(x+y)}\sin(k_2(x-y)), \\ \Phi(x,y)=\frac{1}{L_1L_2^2}e^{ik_1(x+y)}\sum_l\varphi_{k_2,l}\,e^{il(x-y)} \quad (10)$$

с собственным значением

$$\Omega=\frac{\hbar^2}{m}\left(k_1^2+k_2^2\right)+v_{2k_2}-v_0,$$

где k_1, k_2, l — *трехмерные векторы вида* (9). *Числа* $\varphi_{k_2,l}$ *имеют вид*

$$\varphi_{k_2,l}=-\frac{ib_{k_2,l}}{2}\pm\frac{i\sigma_l}{2}\sqrt{b_{k_2,l}^2-1}, \\ b_{k_2,l}\equiv\frac{\frac{\hbar^2}{m}(l^2-k_2^2)+(v_0-v_{2k_2})}{v_{l-k_2}-v_{l+k_2}}. \quad (11)$$

Через σ_l *обозначено отношение*

$$\sigma_l=\frac{v_{l-k_2}-v_{l+k_2}}{|v_{l-k_2}-v_{l+k_2}|}.$$

Вектор k_1 имеет ясный физический смысл: величина $\hbar k_1/m$ равна скорости течения системы.

Главный член асимптотики собственных значений серии, соответствующей решению (10), равен значению символа (4) на этих функциях, умноженному на N:

$$E_{k_1,k_2}=N\left(\frac{\hbar^2\left(k_1^2+k_2^2\right)}{2m}+\frac{v_{2k_2}-v_0}{4}\right).$$

Следующие после E_{k_1,k_2} члены асимптотики собственных значений и собственных функций помимо системы уравнений (6) определяется также решениями системы уравнений в вариациях для системы уравнений Гамильтона.

Система уравнений в вариациях

Для получения системы уравнений в вариациях запишем нестационарную систему уравнений Гамильтона (6). Как следует из вида истинного символа (4), нестационарные гамильтоновы уравнения имеют вид

$$i\,\dot{\Phi}(x,y,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\Phi(x,y,t)+ \\ +2N\int\int dx'\,dy'\,\big(V(x,y)+V(x',y')\big)\times \\ \times\Phi^+(x',y',t)\Phi(x,x',t)\Phi(y',y,t),$$

$$-i\,\dot{\Phi}^+(x,y,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\Phi^+(x,y,t)+ \\ +2N\int\int dx'\,dy'\,\big(V(x,x')+V(y,y')\big)\times \\ \times\Phi(x',y',t)\Phi^+(x,x',t)\Phi^+(y',y,t). \quad (12)$$

Рассмотрим малые вариации около решений (7):

$$\Phi(x,y,t)+\delta\Phi(x,y,t), \\ \Phi^+(x,y,t)+\delta\Phi^+(x,y,t), \quad (13)$$

где

$$\delta\Phi(x,y,t)=\delta\Phi(x,y)e^{-i\Omega t+i\lambda t}, \\ \delta\Phi^+(x,y,t)=\delta\Phi^+(x,y)e^{i\Omega t+i\lambda t}. \quad (14)$$

Тогда после подстановки (13) в уравнения (12) получим нестационарную систему уравнений в вариациях

$$
\begin{aligned}
i\,\delta\dot{\Phi}(x,y,t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\delta\Phi(x,y,t)+\\
&+2N\int\!\!\int dx'\,dy'\,\big(V(x,y)+V(x',y')\big)\times\\
&\times\big(\delta\Phi^+(x',y',t)\Phi(x,x',t)\Phi(y',y,t)+\\
&+\Phi^+(x',y',t)\,\delta\Phi(x,x',t)\Phi(y',y,t)+\\
&+\Phi^+(x',y',t)\Phi(x,x',t)\,\delta\Phi(y',y,t)\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-i\,\delta\dot{\Phi}(x,y,t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\delta\Phi^+(x,y,t)+\\
&+2N\int\!\!\int dx'\,dy'\,\big(V(x,x')+V(y,y')\big)\times\\
&\times\big(\delta\Phi(x',y',t)\Phi^+(x,x',t)\Phi^+(y',y,t)+\\
&+\Phi(x',y',t)\,\delta\Phi^+(x,x',t)\Phi^+(y',y,t)+\\
&+\Phi(x',y',t)\Phi^+(x,x',t)\,\delta\Phi^+(y',y,t)\big).
\end{aligned}
\quad (15)
$$

Учитывая (7), (14), имеем систему уравнений для вариаций $\delta\Phi(x,y)$, $\delta\Phi^+(x,y)$

$$
\begin{aligned}
(\Omega-\lambda)\,\delta\Phi(x,y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\delta\Phi(x,y)+\\
&+2N\int\!\!\int dx'\,dy'\,\big(V(x,y)+V(x',y')\big)\times\\
&\times\big(\delta\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y',y)+\\
&+\Phi^+(x',y')\,\delta\Phi(x,x')\Phi(y',y)+\\
&+\Phi^+(x',y')\Phi(x,x')\,\delta\Phi(y',y)\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Omega+\lambda)\,\delta\Phi^+(x,y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)+\alpha V(x,y)\right)\delta\Phi^+(x,y)+\\
&+2N\int\!\!\int dx'\,dy'\,\big(V(x,x')+V(y,y')\big)\times\\
&\times\big(\delta\Phi(x',y')\Phi^+(x,x')\Phi^+(y',y)+\\
&+\Phi(x',y')\,\delta\Phi^+(x,x')\Phi^+(y',y)+\\
&+\Phi(x',y')\Phi^+(x,x')\,\delta\Phi^+(y',y)\big).
\end{aligned}
\quad (16)
$$

Решения системы уравнений в вариациях при $\alpha=0$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi_l^+(x,y) &= u_{1,l}\big(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y}-e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}\big)+\\
&+u_{2,l}\big(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y}-e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}\big),\\
\delta\Phi_l(x,y) &= v_{1,l}\big(e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y}-e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x}\big)+\\
&+v_{2,l}\big(e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y}-e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x}\big)+\\
&+\sum_{l'\neq l,\,l+2k_2} w_{l,l'}\big(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y}-e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}\big),
\end{aligned}
\quad (17)
$$

где $l\neq -k_2$. Числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$ определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в стандартном виде

$$\tilde{\lambda}X = MX. \quad (18)$$

Здесь

$$\widetilde{\lambda} = \lambda+\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l), \quad (19)$$

X — вектор-столбец вида

$$X=\begin{pmatrix}u_{1,l}\\u_{2,l}\\v_{1,l}\\v_{2,l}\end{pmatrix},$$

M — матрица

$$M=\begin{pmatrix}B_1 & V & V_1 & 0\\ V & B_2 & 0 & V_2\\ M_1 & F & -B_1 & -V\\ F & M_2 & -V & -B_2\end{pmatrix}$$

с элементами

$$
\begin{aligned}
B_1 &= B_{k_2,l}+\frac{v_{l-k_2}}{2},\\
V &= \frac{v_{l+k_2}-v_{2k_2}}{2},\\
B_2 &= B_{k_2,l+2k_2}+\frac{v_{l+3k_2}}{2},\\
V_1 &= \frac{v_{l-k_2}-v_{l+k_2}}{2},\\
M_1 &= 2i(v_{l-k_2}-v_0)\varphi_{k_2,l},\\
V_2 &= \frac{v_{l+3k_2}-v_{l+k_2}}{2},\\
M_2 &= 2i(v_0-v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2},\\
F &= i(v_{2k_2}-v_{l+k_2})(\varphi_{k_2,l+2k_2}-\varphi_{k_2,l}),
\end{aligned}
\quad (20)
$$

числа $B_{k_2,l}$ имеют вид

$$B_{k_2,l}=\frac{\hbar^2}{2m}\big(l^2-k_2^2\big)+i(v_{l+k_2}-v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l}-\frac{v_{2k_2}}{2},$$

где $\varphi_{k_2,l}$ определяются соотношениями (11).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Собственные значения λ системы уравнений в вариациях имеют вид*

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,k_1k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l)\pm\sqrt{\frac{\xi_{k_2,l}+\sqrt{\xi_{k_2,l}^2-4\eta_{k_2,l}}}{2}},\\
\lambda_{1,k_1k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l)\pm\sqrt{\frac{\xi_{k_2,l}-\sqrt{\xi_{k_2,l}^2-4\eta_{k_2,l}}}{2}}.
\end{aligned}
\quad (21)
$$

Коэффициенты $\xi_{k_2,l}$, $\eta_{k_2,l}$ определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
\xi_{k_2,l} &= a^2\left(\big(l_1^2-k_2^2\big)^2+\big(l^2-k_2^2\big)^2\right)+\\
&+a\big(l_1^2(v_{l+3k_2}-v_{2k_2})+l^2(v_{l-k_2}-v_{2k_2})-\\
&-k_2^2(v_{l-k_2}+v_{l+3k_2}-2v_{2k_2})\big)+\\
&+(v_{l+k_2}-v_{2k_2})(v_{l-k_2}+v_{l+3k_2}-2v_{2k_2})/2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{k_2,l} &= a\Big(2a\big(k_2^4-k_2^2\big(l_1^2+l^2\big)+l_1^2l^2\big)+\\
&+\big(l_1^2+l^2-2k_2^2\big)(v_{l+k_2}-v_{2k_2})\Big)\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Big(2a^2\big(k_2^4-k_2^2(l_1^2+l^2)+l_1^2l^2\big)+\\
&+a\big(l_1^2(2v_{l-k_2}-v_{2k_2}-v_{l+k_2})+l^2(2v_{l+3k_2}-v_{2k_2}-v_{l+k_2})-\\
&-2k_2^2(v_{l+3k_2}+v_{l-k_2}-v_{l+k_2}-v_{2k_2})\big)+\\
&+2(v_{l+3k_2}-v_{2k_2})(v_{l-k_2}-v_{2k_2})-\\
&-(v_{l+k_2}-v_{2k_2})(v_{l+3k_2}+v_{l-k_2}-2v_{2k_2})\Big)/4,
\end{aligned}
$$

где для сокращения введены обозначения

$$a=\frac{\hbar^2}{2m},\quad l_1=l+2k_2.$$

Доказательство. Линейная система уравнений (18) имеет нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы равен нулю. Равенство

$$\det(M-\widetilde{\lambda}E)=0, \tag{22}$$

где E — единичная матрица четвертого порядка, представляет собой уравнение для определения спектра.

Как и в случае бозонов, уравнение (22) может быть записано в форме

$$\widetilde{\lambda}^4-\xi_{k_2,l}\widetilde{\lambda}^2+\eta_{k_2,l}=0.$$

Коэффициенты $\xi_{k_2,l}$, $\eta_{k_2,l}$ аналогично выражаются через элементы матрицы M:

$$
\begin{aligned}
\xi_{k_2,l}&=B_1^2+B_2^2+2V^2+V_1M_1+V_2M_2,\\
\eta_{k_2,l}&=B_1^2B_2^2+B_1^2V_2M_2+B_2^2V_1M_1-2V^2B_1B_2+V^4+\\
&+V^2(V_1M_2+V_2M_1)-2VF(B_1V_2+B_2V_1)-\\
&-V_1V_2F^2+M_1M_2V_1V_2.
\end{aligned}
$$

Учитывая соотношения (20), (11), а также (19), приходим к утверждению теоремы.

Отметим, что полученные собственные значения системы уравнений в вариациях, в отличие от решений системы Гамильтона, допускают предельный переход при $k_2\to 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k_1,0,l}&=-2alk_1\pm\\
&\pm\left[a^2l^4+al^2(v_l-v_0)+\frac{(v_l-v_0)^2}{2}\pm\right.\\
&\left.\pm\left|(v_0-v_l)\Big(al^2+\frac{v_l-v_0}{2}\Big)\right|\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Раскрывая модуль, получим

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,k_1,l}&=-\frac{\hbar^2}{m}lk_1\pm\frac{\hbar^2l^2}{2m},\\
\lambda_{2,k_1,l}&=-\frac{\hbar^2}{m}lk_1\pm\left|\frac{\hbar^2l^2}{2m}+v_l-v_0\right|.
\end{aligned}
$$

В пределе при $N\to\infty$ фурье-образы v_q стремятся к величине

$$V_0=\frac{1}{L_1L_2^2}\int\limits_{\boldsymbol{R}^3}V(y)\,dy,$$

и точные формулы (21) переходят в спектры

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,k_1,k_2,l}&=-\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l)\pm\frac{\hbar^2}{2m}(l_1^2-k_2^2),\\
\lambda_{2,k_1,k_2,l}&=-\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2+l)\pm\frac{\hbar^2}{2m}(l^2-k_2^2),
\end{aligned}
$$

не зависящие от величины V_0.

В заключение автор приносит благодарность Г. В. Ковалю за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2005. **143**, № 3. С. 307.
2. *Маслов В.П.* Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. Ижевск, 2000.
3. *Maslov V.P.* // Russian J. of Math. Physics. 2002. **9**, N 4. P. 437.
4. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
5. *Коваль Г.В., Маслов В.П.* // Матем. заметки. 2007. **82**, № 1. С. 52.
6. *Маслов В.П., Рууге А.Э.* // Матем. заметки. 1999. **66**, № 5. С. 792.

Spectrum of model fermionic system

D. S. Golikov

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: golikov@mail.crossnet.ru.

The system of identical fermions is considered and solution of the corresponding Hamilton enquations is given. Also, the system of variation equations is analysed and spectra of collective vibrations of quasiparticles are discussed.

PACS: 67.10.Fj.
Keywords: fermions, quantum statistical theory.
Received 16 January 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторе

Голиков Дмитрий Сергеевич — аспирант; e-mail: golikov@mail.crossnet.ru.