Связь давления и энергии Казимира в одномерных полевых моделях

Ю. С. Воронина[a], П. К. Силаев[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] voronina-yulya@yandex.ru, [b] silaev@bog.msu.ru

Предложен способ вычисления давления Казимира с помощью функции Грина в одномерном случае. В отсутствие внешнего поля этот метод позволяет получить перенормированное давление, в противном случае — зависимость давления на одной границе от координаты другой. Полученное давление позволяет вычислить энергию Казимира для этих случаев.

PACS: 03.70.+k.

Ключевые слова: Эффект Казимира, вакуумные эффекты в квантовой теории поля, перенормировки в квантовой теории поля.

Статья поступила 20.02.2008, подписана в печать 14.03.2008.

Введение

В 1948 г. Казимир впервые показал, что существует сила притяжения между двумя поверхностями в вакууме [1]. Это явление обусловлено наличием нулевых колебаний в вакуумном состоянии квантованного поля. Суть эффекта заключается в поляризации вакуума квантованного поля, которая возникает вследствие изменения спектра нулевых колебаний при ограничении объема квантования или при отличии топологии пространства от евклидовой. Несмотря на квантовую природу эффекта, оно является макроскопическим наблюдаемым явлением [2], играющим важную роль в различных областях физики — от статистической физики до физики элементарных частиц и космологии. Эффект Казимира возникает при рассмотрении таких вопросов, как модели кварковых мешков [3–5], механизмы спонтанной компактификации дополнительных размерностей, космологические модели, темная материя и т. д. [5–9].

В настоящей работе рассматривается регуляризация и перенормировка давления Казимира в модели скалярного поля в одномерном случае. Производится расчет давления Казимира на границе области в одномерном случае: с нулевыми граничными условиями, с граничными условиями общего вида и при наличии внешнего поля.

Следует отметить, что существует много различных методов регуляризации, например введение под знак суммы некоторой обрезающей функции, метод, основанный на использовании формулы Абеля–Плана, метод ковариантного раздвижения аргументов в билинейной форме тензора энергии–импульса либо функции Грина задачи. В настоящей работе рассматривается способ вычисления и регуляризации давления Казимира с помощью функции Грина. Преимущество данного метода заключается в том, что функцию Грина, через которую определяется давление, можно искать различными способами. В частности, функция Грина может быть построена с помощью приближенных методов.

Одним из самых простых методов перенормировки энергии Казимира является вычитание из энергии поля рассматриваемой задачи энергии поля при отсутствии границ [5, 10]. Рассмотрим действительное скалярное поле в вакууме, определенное на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Поскольку поле существует в ограниченной области, то вследствие эффекта Казимира границы этой области должны испытывать давление.

Полная вакуумная энергия поля $\varphi(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ определяется с помощью компоненты T^{00} тензора энергии–импульса:

$$E = \int_a^b \langle 0|T^{00}(x)|0\rangle\, dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n. \qquad (1)$$

Используя метод, предложенный в [5], можно перейти от суммы (1) к интегралу следующего вида:

$$E = \frac{1}{\pi}\int_m^{\infty}\sqrt{\kappa^2 - m^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa}{-\kappa^2-\lambda_n}\right) d\kappa = -\frac{1}{2\pi}\int_m^{\infty}\sqrt{\kappa^2-m^2}\,\frac{\partial_\kappa W}{W}\,d\kappa, \qquad (2)$$

где $W = W(g_1(x), g_2(x))$ — определитель Вронского, являющийся на действительной оси уравнением на уровни энергии, а $g_1(x)$, $g_2(x)$ — решения рассматриваемой краевой задачи, удовлетворяющие левому и правому граничным условиям соответственно. Поскольку для данного случая определитель Вронского равен $W = \kappa\sinh(\kappa(b-a))$, то полная энергия поля на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$

$$E = -\frac{1}{2\pi}\int_m^{\infty}\sqrt{\kappa^2-m^2}\,\frac{\cosh(\kappa(b-a))}{\sinh(\kappa(b-a))}(b-a)\,d\kappa. \qquad (3)$$

Этот интеграл очевидно расходится. Чтобы найти конечную энергию Казимира, обычно применяют перенормировку следующего вида: из исходного выражения вычитается та часть энергии поля, квантованного во всем пространстве, которая сосредоточена на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда после такой перенормировки энергия поля на отрезке определяется выражением [5]

$$E^{\text{ren}} = -\frac{1}{2\pi}\int_m^{\infty}\sqrt{\kappa^2-m^2}\left[\frac{\cosh(\kappa(b-a))}{\sinh(\kappa(b-a))} - 1\right](b-a)\,d\kappa. \qquad (4)$$

Однако при применении этого метода к другим задачам могут возникнуть неопределенности в процедуре вычитания. Действительно, рассмотрим скалярное поле на отрезке $0 < a \leqslant x \leqslant b < \infty$ при наличии внешнего поля

V^{ext} с нулевыми граничными условиями. В случае существования внешнего поля уравнение движения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (m^2 + V^{\text{ext}}(x))\varphi = 0,$$

причем предполагается, что внешнее поле достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \infty$.

Квантовое поле, являющееся решением этого уравнения, раскладывается по системе ортонормированных собственных функций следующей задачи:

$$\psi_n'' + (\lambda_n - V^{\text{ext}}(x))\psi_n = 0. \tag{5}$$

Применим теперь описанный выше метод для вычисления энергии, выбирая в качестве внешнего потенциала

$$V^{\text{ext}}(x) = \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}, \tag{6}$$

где ν — некоторая константа. Такая задача возникает, в частности, при расчете эффекта Казимира в областях со сферическими границами [5]. Решениями соответствующей краевой задачи, удовлетворяющими левому и правому граничным условиям соответственно, являются функции

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x}\,(I_\nu(\kappa a)K_\nu(\kappa x) - K_\nu(\kappa a)I_\nu(\kappa x)),\\ f_2(x) &= \sqrt{x}\,(I_\nu(\kappa b)K_\nu(\kappa x) - K_\nu(\kappa b)I_\nu(\kappa x)). \end{aligned} \tag{7}$$

Используя (2), находим вакуумную энергию

$$E = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \sqrt{\kappa^2 - m^2}\left[b\frac{I_\nu'(\kappa b)}{I_\nu(\kappa b)} + a\frac{I_\nu'(\kappa a)}{I_\nu(\kappa a)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\kappa W(f_1, f_2)}\left(\frac{I_\nu(\kappa a)}{I_\nu(\kappa b)} + \frac{I_\nu(\kappa b)}{I_\nu(\kappa a)}\right)\right] d\kappa.$$

К сожалению, в данном случае возникает неоднозначность процедуры вычитания. Вычитание из полученного выражения энергии «свободного» поля, т. е. энергии поля при отсутствии граничных условий, относящейся к отрезку $[a, b]$, не приведет к конечному результату. При этом можно построить бесконечно много вычислительных рецептов, которые будут давать разные конечные ответы. В настоящей работе будет предложен способ регуляризации, позволяющий фиксировать эту неоднозначность. В первом разделе с помощью этого способа будет найдена энергия Казимира для рассмотренных выше задач. Во втором разделе будет найдена энергия Казимира для скалярного поля, удовлетворяющего граничным условиям общего вида, при наличии некоторого внешнего поля V^{ext}, а также рассмотрены некоторые частные случаи такой задачи.

1. Регуляризация и перенормировка давления Казимира

Вычислим энергию Казимира при наличии внешнего поля (6) другим способом: найдем сначала в задаче давление, например на левой границе, и проведем его перенормировку, а затем определим энергию с помощью формулы

$$E^{\text{ren}} = \int\limits_{-\infty}^{a} p^{\text{ren}}(\tilde a)d\tilde a. \tag{8}$$

Преимущество этого метода перед рассмотренным выше состоит в том, что давление является однозначной физической величиной, в то время как энергия определена с точностью до константы. Используя операторы рождения и уничтожения, оператор скалярного поля можно записать в виде

$$\varphi = \sum_k \left(a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^+ e^{i\omega_k t}\right)\psi_k(x)\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}. \tag{9}$$

Так как компонента T^{11} тензора энергии–импульса представляет собой количество импульса, протекающее в единицу времени через границу рассматриваемого отрезка, то давление в точке a определяется следующим образом:

$$p(a) = \langle 0|T^{11}(a)|0\rangle, \tag{10}$$

где компонента T^{11} для действительного скалярного поля имеет вид

$$T^{11}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\big(m^2 + V^{\text{ext}}\big)\varphi^2.$$

Поскольку поле $\varphi(x, t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям, то давление, испытываемое левой границей,

$$p(a) = \big\langle 0\big|\frac{1}{2}\varphi'(a)\varphi'(a)\big|0\big\rangle. \tag{11}$$

Давление на правой границе вычисляется совершенно аналогичным образом.

Подставляя теперь в формулу (11) явное выражение для оператора поля (9) и воспользовавшись перестановочными соотношениями, а также определением вакуума, получаем в результате давление на правой границе

$$p(a) = \frac{1}{4}\sum_k \frac{\psi_k'(a)\psi_k'(a)}{\omega_k} = \frac{1}{4}\sum_k \frac{\psi_k'(a)\psi_k'(a)}{\sqrt{\lambda_k + m^2}}.$$

Далее нам потребуется функция Грина для оператора $\partial_x^2 - \kappa^2 + V^{\text{ext}}(x)$, удовлетворяющая нулевым граничным условиям. Она определяется как решение задачи

$$\begin{gathered} \big[\partial_x^2 - \kappa^2 + V^{\text{ext}}(x)\big]G_\kappa(x, y) = \delta(x - y),\\ G_\kappa(a, y) = G_\kappa(b, y) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Функция Грина исследуемой задачи имеет вид

$$G_\kappa(x, y) = \frac{1}{W(f_1, f_2)}\begin{cases} f_1(x)f_2(y), & a < x < y,\\ f_1(y)f_2(x), & b > x > y, \end{cases} \tag{13}$$

где f_1, f_2 — решения (7) соответствующей однородной задачи, а $W(f_1, f_2)$ — соответствующий определитель Вронского.

С другой стороны, решение задачи (12) может быть разложено по собственным функциям задачи (5):

$$G_\kappa(x, y) = \sum_k \psi_k(x)\psi_k(y)\frac{1}{-\kappa^2 - \lambda_k}.$$

Для $G_\kappa(x, y)$ справедливо равенство

$$\int\limits_m^\infty G_\kappa(x, y)\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}}\,d\kappa = -\frac{\pi}{2}\sum_n \psi_n(x)\psi_n(y)\frac{1}{\sqrt{\lambda_n + m^2}}. \tag{14}$$

Для доказательства равенства (14) необходимо рассмотреть интеграл $\int\limits_C F(q)\,dq$, где

$$F(q) = \frac{1}{q^2 - \lambda_n}\,\frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}},$$

а C — замкнутый контур в верхней полуплоскости, составленный из отрезков мнимой оси $[i(m+\rho), iR]$ на правом и левом берегах разреза, разомкнутых окружности C_ρ, $|q-im|=\rho$, и дуги полуокружности C_R, $|q|=R$, а также из дуг полуокружностей C_{ρ_n}, $|q-\sqrt{\lambda_n}|=\rho_n$, и $C_{\rho_{-n}}$, $|q+\sqrt{\lambda_n}|=\rho_{-n}$. Используя основную теорему вычетов и положив $q=i\kappa$, можно получить (14), где $q=i\kappa$.

Заметим, что сходимость интеграла в левой части равенства (14) при $x\neq y$ обеспечивается функцией Грина, поскольку в этом случае G_κ экспоненциально убывает с ростом κ.

Значит, располагая функцией Грина для данной задачи, можно определить давление

$$p(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-m^2}}\,\partial_x\partial_y G_\kappa(x,y)\Big|_{x=y=a} d\kappa. \qquad (15)$$

Отметим, что при $x=y=a$ интеграл в (15) расходится. Выражение (15) было получено с помощью равенства (14), продифференцированного по x и y. Однако такая процедура в данном случае является не вполне корректной, поскольку ряд в (14) не сходится абсолютно, и в данном случае ряд, полученный после операции дифференцирования, перестает сходиться. Корректность этой процедуре можно придать путем регуляризации выражений, входящих в рассматриваемые равенства, с помощью обрезающей функции $F(n)$. При этом достаточно, чтобы она убывала не медленнее, чем $e^{-\alpha n}$.

Для выделения конечного давления из полученного выражения можно воспользоваться процедурой регуляризации данного расходящегося интеграла.

Подставляя в явном виде функцию Грина в выражение для давления, получаем

$$p(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \times \left[\frac{I_\nu(\kappa b)K'_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I'_\nu(\kappa a)}{I_\nu(\kappa b)K_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I_\nu(\kappa a)} + \frac{1}{2a\kappa}\right] d\kappa.$$

Заметим, что подынтегральное выражение в правой части последнего равенства имеет гладкий предел при $b\to\infty$, что позволяет разделить полученное давление на два слагаемых — конечное и расходящееся

$$p(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \times \left[\left(\frac{I_\nu(\kappa b)K'_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I'_\nu(\kappa a)}{I_\nu(\kappa b)K_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I_\nu(\kappa a)} - \frac{K'_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)}\right) + \left(\frac{K'_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)} + \frac{1}{2a\kappa}\right)\right] d\kappa.$$

Вообще говоря, в данном случае вопрос о перенормировке давления требует дополнительного исследования, но выбор точки нормировки в $b=\infty$ имеет непосредственный физический смысл, так как в реальных экспериментах измеряется именно зависимость давления на левой границе от положения правой [5].

Найденное выражение для давления имеет структуру $p(a)=p(a,b)+p_\infty(a)$, где $p_\infty(a)$ — расходящийся интеграл, а конечное слагаемое

$$p(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \times \left[\frac{I_\nu(\kappa b)K'_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I'_\nu(\kappa a)}{I_\nu(\kappa b)K_\nu(\kappa a) - K_\nu(\kappa b)I_\nu(\kappa a)} - \frac{K'_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)}\right] d\kappa$$

дает зависимость физического давления от координаты правой границы b. Поместим правую границу в некоторую точку с координатой b_0. Тогда давление на левой границе окажется равным $p_0(a)=p_\infty(a)+p(a,b_0)$. Разность между давлениями $p(a)-p_0(a)=p(a,b)-p(a,b_0)$ не зависит от расходящегося слагаемого. Проводя перенормировочную процедуру, получаем, что для перенормированных давлений $\tilde p(a)$ и $\tilde p_0(a)$ справедливо аналогичное равенство. Перепишем его в виде $\tilde p(a)=\tilde p_0(a)+[p(a,b)-p(a,b_0)]$. С помощью последнего равенства можно определить давление на левой границе, если известно давление для некоторого случая, когда правая стенка находится в точке b_0, т.е. определена точка нормировки давления. К сожалению, в данной задаче выбор этой точки нормировки не очевиден. Однако ясно, что второе слагаемое дает зависимость давления от положения правой границы с точностью до некоторой константы.

С помощью формулы (8) можно вычислить конечную энергию Казимира

$$E = \int\limits_0^a p(\tilde a, b)\, d\tilde a = \frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \ln\left[1 - \frac{K_\nu(\kappa b)I_\nu(\kappa a)}{I_\nu(\kappa b)K_\nu(\kappa a)}\right] d\kappa.$$

Отметим, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, сходится. Следует подчеркнуть, что полученная энергия является энергией взаимодействия границ.

Проверим теперь, что с помощью предложенного метода можно получить энергию Казимира и при отсутствии внешнего поля, т.е. воспроизвести результат [5]. Для этого определим сначала давление на левой границе. Вычисляя функцию Грина соответствующей задачи и подставляя ее в (15), имеем

$$p(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \frac{\operatorname{ch}(\kappa(b-a))}{\operatorname{sh}(\kappa(b-a))}\, d\kappa. \qquad (16)$$

Интеграл в правой части равенства (16) расходится. Однако подынтегральное выражение при $b\to\infty$ имеет гладкий предел, в отличие от аналогичного выражения для энергии в (3). Поэтому в качестве точки нормировки выберем давление на левой стенке при условии, что правая удалена на бесконечность. В случае, когда $b\to\infty$, появляется инвариантность давления, испытываемого левой границей при сдвиге координаты этой границы на некоторую величину Δa, т.е. $p(a)=p(a+\Delta a)$, так как в такой системе правая и левая стенки не оказывают никакого влияния друг на друга. Поскольку в реальных системах давление на бесконечности обращается в нуль, то в силу равенства давления на правой и левой границах получаем $p^{\mathrm{ren}}(a)=0$.

Для получения перенормированного давления вычтем из (16) давление, когда координата правой стенки устремлена к бесконечности. В результате получим

$$p^{\mathrm{ren}}(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}} \frac{e^{-\kappa(b-a)}}{\operatorname{ch}(\kappa(b-a))}\, d\kappa. \qquad (17)$$

Последнее выражение является регулярным. Кроме того, если в нем сделать предельный переход $b \to \infty$, оно обратиться в нуль. Поэтому это конечное выражение возможно отождествить с физическим давлением, т.е. в результате перенормировочной процедуры приходим к конечному однозначному давлению на левой границе.

Подставляя теперь конечное давление (17) в (8) и проводя интегрирование по координате левой границы $\tilde{a}$, приходим к уже приведенному ранее ответу для энергии (4).

Таким образом, предложенный метод позволяет вычислить переномированную энергию. Хотя этот метод является одним из многих, однако он обладает некоторыми преимуществами. Во-первых, здесь необходимо перенормировать давление, а не энергию. А как видно из рассмотренного только что примера, при перенормировке давления выбор точки нормировки упрощается, так как давление, в отличие от энергии, которая определена с точностью до константы, имеет непосредственный физический смысл. И во-вторых, регуляризация осуществляется с помощью раздвижения аргументов в функции Грина соответствующей задачи. А, как уже отмечалось, функцию Грина можно искать, используя также и приближенные методы.

2. Эффект Казимира для скалярного поля при наличии внешнего поля и произвольных граничных условий

Рассмотрим теперь задачу, не конкретизируя вид потенциала с граничными условиями общего типа. Для нахождения давления снова потребуется функция Грина оператора $\partial_x^2 - \kappa^2 - V^{\mathrm{ext}}(x)$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\cos\alpha f(a) + \sin\alpha f'(a) = 0, \quad \cos\beta f(b) + \sin\beta f'(b) = 0.$$

Как и в случае с тривиальными граничными условиями, давление в точке x вычисляется с помощью компоненты T^{11} тензора энергии–импульса по формуле (10). Снова будем искать давление, которое испытывает левая граница. Тогда выражение для компоненты T^{11} тензора энергии–импульса в точке $x = a$ принимает вид

$$T^{11}(a) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}(a)^2 + \frac{1}{2}\varphi'(a)^2 - \frac{1}{2}\left(m^2 + V^{\mathrm{ext}}(a)\right)\varphi(a)^2. \quad (18)$$

Как и в предыдущем разделе, подставляя в (10) соответствующую компоненту тензора энергии–импульса (18) и явное выражение для оператора скалярного поля (9), а затем используя перестановочные соотношения, получаем давление на левой границе

$$p(a) = \frac{1}{4}\sum_k \omega_k \psi_k(a)\psi_k(a) + \frac{1}{4}\sum_k \frac{\psi_k'(a)\psi_k'(a)}{\omega_k} - \frac{1}{4}\left(m^2 + V^{\mathrm{ext}}\right)\sum_k \frac{\psi_k(a)\psi_k(a)}{\omega_k}.$$

Аналогично тому, как была получена формула (14), можно доказать справедливость равенства

$$\int_m^\infty G_\kappa(x,y)\kappa\sqrt{\kappa^2 - m^2}\,d\kappa = \frac{\pi}{2}\sum_k \psi_k(x)\psi_k(y)\sqrt{\lambda_k + m^2}. \quad (19)$$

Этому выражению можно придать смысл совершенно аналогично тому, как это было сделано для (15). Интеграл, стоящий в левой части равенства (19), сходится при $x \neq y$, так как при этом условии функция Грина данной задачи тоже экспоненциально убывает при $\kappa \to \infty$. Используя формулы (14) и (19), получаем выражение для давления на левой границе, выраженное через функцию Грина

$$p(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} \times \left[\partial_x\partial_y G_\kappa(a,a) - (\kappa^2 + V^{\mathrm{ext}})G_\kappa(a,a)\right] d\kappa. \quad (20)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - (\kappa^2 + V^{\mathrm{ext}}(x))f(x) = 0. \quad (21)$$

Так как оно является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, значит, оно имеет два линейно независимых решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих при $x \to \pm\infty$ асимптотику $e^{\kappa x}$ и $e^{-\kappa x}$ соответственно. Для построения функции Грина рассматриваемой краевой задачи выберем функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, удовлетворяющие левому и правому граничным условиям соответственно:

$$g_1(x) = f_1(x)F_2(a) - f_2(x)F_1(a),$$
$$g_2(x) = f_1(x)F_2(b) - f_2(x)F_1(b),$$

где

$$F_i(a) = \cos\alpha f_i(a) + \sin\alpha f_i'(a),$$
$$F_i(b) = \cos\beta f_i(b) + \sin\beta f_i'(b), \quad i = 1, 2.$$

Подставляя функции g_1 и g_2 в (13), а также вычисляя соответствующий определитель Вронского

$$W(g_1, g_2) = [F_1(a)F_2(b) - F_1(b)F_2(a)]\,[f_1(y)f_2'(y) - f_1'(y)f_2(y)],$$

получаем функцию Грина для данной краевой задачи. Убедимся, что, как и в предыдущих двух случаях, найденная функция Грина экспоненциально убывает с ростом κ. Очевидно, что при $\kappa \to \infty$ эта функция удовлетворяет уравнению (12). Следовательно, асимптотика этой функции Грина совпадает с асимптотикой функции Грина для первой задачи. Значит, для найденной функции Грина формула (14) справедлива. Из уравнения (21) очевидно, что определитель Вронского от y не зависит.

Подставляя теперь эту производную в выражение (20), получаем давление на левой границе

$$p(a) = \frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}}\left[\frac{\sin\alpha g_2''(a) + \cos\alpha g_2'(a)}{\sin\alpha g_2'(a) + \cos\alpha g_2(a)}\right] d\kappa.$$

В данном случае в силу наличия внешнего поля вопрос о выборе точки нормировки остается открытым. Однако оказывается возможным установить зависимость наблюдаемого давления от координаты правой стенки. Вычитая из подынтегрального выражения его предел при $b \to \infty$, получаем

$$p(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}}\left[\frac{\sin\alpha g_2''(a) + \cos\alpha g_2'(a)}{\sin\alpha g_2'(a) + \cos\alpha g_2(a)} - \frac{\sin\alpha f_2''(a) + \cos\alpha f_2'(a)}{\sin\alpha f_2'(a) + \cos\alpha f_2(a)}\right] d\kappa. \quad (22)$$

Следует отметить, что полученное давление не является полным давлением Казимира, однако $p(a,b)$ представляет собой вклад, связанный с наличием правой стенки. И тогда конечная энергия Казимира имеет вид

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-m^2}}\log\left[1-\frac{\sin\alpha f_1' + \cos\alpha f_1(a)}{\sin\alpha f_2' + \cos\alpha f_2(a)}\,\frac{F_2(b)}{F_1(b)}\right]d\kappa.$$

В частности, положив в (22) $f_1 = e^{\kappa x}$, $f_2 = e^{-\kappa x}$, получим давление Казимира в случае граничных условий общего вида при отсутствии внешнего потенциала:

$$p^{\mathrm{ren}}(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-m^2}}\left[\frac{2h(\beta)e^{-\kappa(b-a)}}{h(\alpha)e^{\kappa(b-a)} - h(\beta)e^{-\kappa(b-a)}}\right]d\kappa, \tag{23}$$

где

$$h(\theta) = \frac{\cos\theta - \kappa\sin\theta}{\cos\theta + \kappa\sin\theta}.$$

Поскольку в данном случае внешнее поле отсутствует, то в качестве точки нормировки можно выбрать давление на левой стенке при условии, что правая удалена на бесконечность, т. е. полученное давление (23) является полным давлением Казимира. И тогда энергия Казимира определяется выражением

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-m^2}}\log\left[1-\frac{h(\beta)}{h(\alpha)}e^{-2\kappa(b-a)}\right]d\kappa. \tag{24}$$

Также заметим, что положив в (23) и (24) $\alpha=\beta=0$, получаем давление на левой границе и энергию Казимира для задачи с нулевыми граничными условиями, совпадающие с результатами, полученными в предыдущем разделе. Проводя аналогичные вычисления давления на правой границе, можно убедиться, что давление на правой и левой стенках, как и следовало ожидать, совпадает.

Заключение

Таким образом, предложенный в работе возможный способ вычисления давления Казимира позволяет определять перенормированное давление в случае отсутствия внешнего поля. Если внешнее поле существует, то предложенный метод позволяет установить зависимость измеряемого в экспериментах давления на одной границе от координаты другой границы.

С помощью полученного таким образом перенормированного давления можно найти и перенормированную энергию Казимира. Следует отметить, что предложенный метод является, конечно, одним из возможных способов фиксации неоднозначности при перенормировке. Но одним из его достоинств является то, что давление вычисляется с помощью функции Грина, которую можно искать, используя приближенные методы. Кроме того, этот способ дает однозначный ответ для задачи наиболее общего вида, в то время как вычитание энергии свободного поля оказывается эффективным далеко не всегда. При этом в частных случаях этот метод дает ответы, совпадающие с уже полученными ранее результатами [5].

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность Д. А. Славнову и К. А. Свешникову за плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4476.2006.2).

Список литературы

1. *Casimir H.B.G.* // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. **51**. P. 793.
2. *Sparnaay M.J.* // Physica. 1958. **24**. P. 751.
3. *Hosaka A., Toki H.* // Phys. Reports. 1996. **277**. P. 65.
4. *Vepstas L., Jackson A.D.* // Phys. Reports. 1990. **187**. P. 109.
5. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V.M.*// Phys. Reports. 2001. **353**. P. 1.
6. *Milonni P.W.* The Quantum Vacuum. San Diego, 1994.
7. *Mostepanenko V.M., Trunov N.N.* The Casimir effect and its applications. Oxford, 1997.
8. *Milton K.A.* The Casimir effect. Singapore, 2001.
9. *Bordag M., Geyer B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // Phys. Rev. D. 1999. **60**. P. 055004.
10. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Т. 1. Новокузнецк, 2000.

The Casimir effect, vacuum effects and renormalisations in quantum field theory

Yu. S. Voronina[a], **P. K. Silaev**[b]

Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *voronina-yulya@yandex.ru,* [b] *silaev@bog.msu.ru.*

Method for calculation of the Casimir pressure using the surface Green's function in a one-dimensional case is proposed. In the absence of an external field, it results in the renormalized pressure, otherwise it gives the pressure dependence at one of the boundaries on the coordinate of the other boundary. The calculated pressure allows one to calculate the Casimir energy in both cases.

PACS: 03.70.+k.
Keywords: Casimir effect, vacuum effects in quantum field theory, renormalization in quantum field theory.
Received 20 February 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторах

1. Воронина Юлия Сергеевна — аспирант; e-mail: voronina-yulya@yandex.ru.
2. Силаев Петр Константинович — д. ф.-м. н., доцент, профессор; тел.: 939-26-96, e-mail: silaev@bog.msu.ru.