Операторы наблюдаемых для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом в электромагнитном поле

Е. В. Арбузова[1a], А. Е. Лобанов[2b], О. С. Павлова[2]

[1] *Международный университет «Дубна». 141980, Московская обл., г. Дубна;* [2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail:* [a] *arbuzova@uni-dubna.ru,* [b] *lobanov@phys.msu.ru*

Найден явный вид операторов кинетического импульса и проекции спина для нейтральной частицы, обладающей аномальным магнитным моментом, в постоянном и однородном электромагнитном поле. Рассмотрены возможные приложения полученных результатов к физике нейтрино.

PACS: 03.50.De, 12.20.Ds.

Ключевые слова: интеграл движения, аномальный магнитный момент, внешнее поле, нейтрино.

Статья поступила 04.03.2008, подписана в печать 21.05.2008.

В релятивистской квантовой механике наблюдаемыми могут считаться только интегралы движения [1, 2]. Поэтому при классификации состояний частицы требуется составить полный набор операторов, являющихся интегралами движения, т. е. коммутирующих с оператором волнового уравнения. Для свободной частицы физический смысл операторов, входящих в любой полный набор, известен. Однако учет взаимодействия заряда частицы или ее аномального момента с внешним электромагнитным полем сильно усложняет задачу интерпретации операторов полного набора даже в том случае, если он найден.

Поясним это на простом примере. Взаимодействие заряда частицы с внешним полем включается в релятивистские уравнения путем «удлинения производной», т. е. оператор канонического импульса $p^\mu = i\partial^\mu$ заменяется на $p^\mu - eA^\mu$, где e — заряд частицы, а A^μ — четырехмерный потенциал внешнего поля. Оператор $p^\mu - eA^\mu$ можно интерпретировать как оператор кинетического импульса для скалярной частицы. Если же речь идет о частице со спином, то такая интерпретация уже несостоятельна. Например, для частицы со спином 1/2 действие оператора кинетического импульса $\mathfrak{Q}^\mu$ на функции из пространства решений уравнения Дирака должно определяться не только соотношением[1]

$$\hat{\mathfrak{Q}} = m, \tag{1}$$

но и соотношением

$$\mathfrak{Q}^2 = m^2, \tag{2}$$

где m — масса частицы. Как хорошо известно, оператор $p^\mu - eA^\mu$ условию (2) не удовлетворяет. Очевидно, что проблема становится еще серьезнее, когда рассматривается аномальное взаимодействие Паули.

В работе [3] нами были получены решения уравнения Дирака–Паули для нейтральной частицы, обладающей аномальным магнитным моментом, во внешних электромагнитных полях специального вида. Эти решения можно представить как результат действия некоторого, вообще говоря, интегрального, оператора на решения уравнения для свободной частицы. Если решения для свободной частицы выбрать в виде плоских волн, то действие указанного оператора сводится к умножению на матричную функцию, которая зависит от некоторого параметра q^μ. Этот параметр удовлетворяет условию $q^2 = m^2$, вследствие чего его можно интерпретировать как кинетический импульс частицы во внешнем поле. Впоследствии решения указанного вида были обобщены на случай аксиального взаимодействия частиц с постоянным векторным конденсатом [4–6]. Отметим, что взаимодействие такого типа может быть использовано для феноменологического описания распространения нейтрино в плотной среде, состоящей из фермионов [7].

Конечно, наличие полной системы решений позволяет задать действие операторов полного набора (кроме компонент кинетического импульса в полный набор операторов должен входить оператор проекции спина) на функции из области их определения. Однако во многих отношениях интересно знать и явный вид этих операторов. Это имеет особый смысл, если указанные операторы можно задать как псевдодифференциальные.

В настоящей работе мы построим явный вид операторов полного набора для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом μ_0 в наиболее простом случае, когда внешнее электромагнитное поле, с которым частица взаимодействует, является постоянным и однородным.

Рассмотрим уравнение Дирака–Паули

$$\left(i\hat{\partial} - \frac{i}{2}\mu_0 F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - m\right)\Psi(x) = 0. \tag{3}$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Далее для упрощения формул будем считать, что величина аномального магнитного момента включена в тензор электромагнитного поля, т. е. $\mu_0 F^{\mu\nu} \Rightarrow F^{\mu\nu}$.

Как показано в [3], когда второй инвариант тензора $F^{\mu\nu}$ равен нулю, т. е.

$$I_2 = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = 0,$$

где $H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$ — тензор, дуальный тензору электромагнитного поля, решения уравнения (3) можно представить в виде

$$\Psi(x) = R\left(\tau(x)\right)\Psi_0(x),$$

где $R(\tau)$ — резольвента уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди [8], зависящая от собственного времени τ,

$$\Psi_0(x) = e^{-i(qx)}(\hat{q} + m)\big(1 - \zeta_0\gamma^5\hat{S}_0(q)\big)\psi_0 \tag{4}$$

---

[1] Величины со «шляпками» обозначают скалярные произведения матриц Дирака с 4-векторами: $\hat{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$.

— плосковолновое решение уравнения Дирака для свободной частицы. Здесь четырехмерный вектор S_0^μ определяет направление поляризации частицы, $\zeta_0 = \pm 1$ — знак проекции спина на это направление, а ψ_0 — постоянный биспинор, нормированный условием $\bar{\Psi}_0(x)\Psi_0(x) = m/q_0$.

Явный вид системы волновых функций определяется формулой

$$\Psi_{q\zeta_0}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i(P_\zeta x)}\big(1 - \zeta\gamma^5\hat{S}_{tp}(q)\big)\times$$
$$\times\big(1 - \zeta_0\gamma^5\hat{S}_0(q)\big)(\hat{q}+m)\psi_0. \quad (5)$$

Здесь

$$P_\zeta^\mu = q^\mu - \zeta N^\mu\sqrt{\mathcal{N}}\Big/m = q^\mu - \zeta H^{\mu\alpha}H_{\alpha\nu}q^\nu\Big/\sqrt{\mathcal{N}}, \quad (6)$$

где

$$N^\mu = \partial^\mu\tau = mH^{\mu\nu}H_{\nu\rho}q^\rho/\mathcal{N}, \quad \mathcal{N} = q_\mu H^{\mu\nu}H_{\nu\rho}q^\rho,$$
$$S_{tp}^\mu(q) = -H^{\mu\nu}q_\nu\Big/\sqrt{\mathcal{N}}. \quad (7)$$

Очевидно, что система решений (5) является полной системой решений уравнения (3), которая характеризуется кинетическим импульсом частицы q^μ и квантовым числом $\zeta_0 = \pm 1$. Квантовое число ζ_0 можно интерпретировать как знак проекции спина частицы на направление $S_0^\mu(q)$ в момент собственного времени $\tau = (xN) = 0$. Отметим, для того чтобы получить полную систему решений для античастицы, необходимо изменить знак кинетического (а не канонического) импульса q^μ.

В общем случае эта система не является стационарной. Полученные решения стационарны только тогда, когда $S_0^\mu(q) = S_{tp}^\mu(q)$. В этом случае волновые функции являются собственными функциями оператора проекции спина на направление $S_{tp}^\mu(q)$ с собственными значениями $\zeta = \pm 1$ и оператора канонического импульса $p^\mu = i\partial^\mu$ с собственными значениями P_ζ^μ. Ортонормированная система стационарных решений уравнения (3) может быть записана следующим образом:

$$\Psi_{q\zeta}(x) = e^{-i(P_\zeta x)}\sqrt{|J|}\,\big(1 - \zeta\gamma^5\hat{S}_{tp}(q)\big)(\hat{q}+m)\psi_0. \quad (8)$$

Здесь $J = 1 - 2\zeta I_1/\sqrt{\mathcal{N}}$ — якобиан перехода от переменных q^μ к переменным P_ζ^μ, где $I_1 = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ — первый инвариант тензора $F^{\mu\nu}$.

Найдем теперь явный вид оператора кинетического импульса. Волновые функции (8) являются как собственными функциями оператора канонического импульса, так и собственными функциями оператора кинетического импульса $\mathfrak{Q}^\mu$. Поэтому для нахождения оператора кинетического импульса мы выразим собственные значения оператора кинетического импульса q^μ через собственные значения оператора канонического импульса P_ζ^μ. После несложных вычислений получаем

$$q^\mu = P_\zeta^\mu + \zeta\Delta\frac{H^{\mu\alpha}H_{\alpha\nu}P_\zeta^\nu}{\sqrt{P_\zeta^\beta H_{\beta\alpha}H^{\alpha\rho}P_{\zeta\rho}}}, \quad (9)$$

где $\Delta = \mathrm{sign}(J)$. Заметим, что появление фактора Δ в уравнении (9) связано с тем, что ζ представляет собой знак проекции спина на направление, определяемое не каноническим, а кинетическим импульсом частицы, причем $\Delta = -1$ только в очень сильных полях. Так, если внешнее поле является чисто магнитным с напряженностью H, то условие $J < 0$ эквивалентно условию $m^2 + |\boldsymbol{q}|^2\sin^2\vartheta < \mu_0^2 H^2$, где ϑ — угол между направлением движения частицы и вектором напряженности магнитного поля.

Из уравнения (9) следует, что закон дисперсии частицы определяется соотношением

$$P_\zeta^2 = m^2 - 2I_1 - 2\zeta\Delta\sqrt{P_\zeta^\mu H_{\mu\alpha}H^{\alpha\nu}P_{\zeta\nu}}, \quad (10)$$

поэтому

$$q^\mu = P_\zeta^\mu - \frac{2H^{\mu\alpha}H_{\alpha\nu}P_\zeta^\nu}{P_\zeta^2 - m^2 + 2I_1}. \quad (11)$$

Заменим теперь в формуле (11) собственные значения оператора канонического импульса P_ζ^μ на сам оператор p^μ. Поскольку на решениях уравнения (3)

$$m^2 = \left(\hat{p} - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)^2 = p^2 + 2I_1 + 2\gamma^5 H^{\mu\nu}\gamma_\mu p_\nu,$$

то оператор кинетического импульса имеет следующий вид:

$$\mathfrak{Q}^\mu = p^\mu + \gamma^5\frac{H^{\mu\alpha}H_{\alpha\nu}p^\nu H_{\beta\alpha}p^\alpha\gamma^\beta}{p^\beta H_{\beta\alpha}H^{\alpha\rho}p_\rho}. \quad (12)$$

Очевидно, что полученный оператор удовлетворяет как условию (1), так и условию (2).

Получим спиновые операторы. Как хорошо известно [9], в общем случае спиновые операторы представляют собой линейные комбинации сверток вектора Паули–Любаньского–Баргмана W^μ с пространственноподобными нормалями $S_i^\mu(q)$ $(i = 1, 2, 3)$, такими что

$$(qS_i(q)) = 0, \quad (S_i(q)S_j(q)) = -\delta_{ij}.$$

Для свободной частицы со спином 1/2 в координатном представлении

$$W_0^\mu = \frac{1}{2}\gamma^5\big(\gamma^\mu\hat{p} - p^\mu\big).$$

Естественным обобщением данной формулы на случай движения частицы во внешнем поле является выражение

$$W^\mu = \frac{1}{2}\gamma^5\big(\gamma^\mu\hat{\mathfrak{Q}} - \mathfrak{Q}^\mu\big).$$

Если нормировать спиновые операторы $\mathfrak{S}$ условием $\mathfrak{S}^2 = 1$, то базис в пространстве спиновых операторов имеет вид

$$\mathfrak{S}_i = -\gamma^5\hat{S}_i(q).$$

Для нашей задачи удобно выбрать базис следующим образом:

$$\mathfrak{S}_{tp} = -\gamma^5\hat{S}_{tp}(q), \quad \mathfrak{S}_{1\perp} = -\gamma^5\hat{S}_{1\perp}(q), \quad \mathfrak{S}_{2\perp} = -\gamma^5\hat{S}_{2\perp}(q), \quad (13)$$

где нормаль $S_{tp}(q)$ определяется уравнением (7),

$$S_{1\perp}^\mu(q) = \frac{S_0^\mu(q) + S_{tp}^\mu(q)(S_0(q)S_{tp}(q))}{\sqrt{1 - (S_0(q)S_{tp}(q))^2}},$$
$$S_{2\perp}^\mu(q) = \frac{e^{\mu\nu\rho\lambda}q_\nu S_{0\rho}(q)S_{tp\lambda}(q)}{m\sqrt{1 - (S_0(q)S_{tp}(q))^2}}.$$

Из операторов (13) только $\mathfrak{S}_{tp}$ является интегралом движения. Этот оператор, для которого собственными являются функции (8), определяется формулой

$$\mathfrak{S}_{tp} = \frac{\gamma^5\gamma_\mu H^{\mu\nu}\mathfrak{Q}_\nu}{\sqrt{\mathfrak{Q}^\beta H_{\beta\alpha}H^{\alpha\rho}\mathfrak{Q}_\rho}} = \mathrm{sign}\left(1 + \frac{2I_1\gamma^5 H^{\mu\nu}p_\nu\gamma_\mu}{p^\beta H_{\beta\alpha}H^{\alpha\rho}p_\rho}\right)\tilde{\mathfrak{S}}_{tp}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{tp} = \frac{\gamma^5 \gamma_\mu H^{\mu\nu} p_\nu}{\sqrt{p^\beta H_{\beta\alpha} H^{\alpha\rho} p_\rho}}. \quad (15)$$

Оператор (14) имеет простой физический смысл — он характеризует проекцию спина частицы на направление магнитного поля в ее системе покоя $\boldsymbol{H}_0$. Операторы $\mathfrak{S}_{1\perp}$ и $\mathfrak{S}_{2\perp}$ определяют проекции спина на взаимно ортогональные направления в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{H}_0$. Их явный вид можно получить, если заменить в выражении для $S_0^\mu(q)$ кинетический импульс q^μ на оператор (12).

Чтобы найти спиновый оператор $\mathfrak{S}_0$, для которого собственными являются волновые функции (5), рассмотрим линейные комбинации операторов (13) с коэффициентами, зависящими от координат. В результате вычислений получаем

$$\mathfrak{S}_0 = -(S_0(q)S_{tp}(q))\mathfrak{S}_{tp} + \\ + [\cos 2\theta\, \mathfrak{S}_{1\perp} - \sin 2\theta\, \mathfrak{S}_{2\perp}]\sqrt{1-(S_0(q)S_{tp}(q))^2}, \quad (16)$$

где $\theta = (xN)\sqrt{\mathcal{N}}/m = x_\mu H^{\mu\nu} H_{\nu\rho} q^\rho / \sqrt{\mathcal{N}}$. Этот результат нетрудно проверить, если учесть, что на решениях волнового уравнения

$$\mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_j = i e_{ijk} \mathfrak{S}_k + \delta_{ij}.$$

Действительно,

$$\mathfrak{S}_0 \Psi_{q\zeta_0}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i(P_\zeta x)} \big(1 - \zeta\gamma^5 \hat{S}_{tp}(q)\big) \times \\ \times \left(\sqrt{1-(S_0(q)S_{tp}(q))^2}\, \mathfrak{S}_{1\perp} - (S_0(q)S_{tp}(q))\mathfrak{S}_{tp}\right) \times \\ \times \big(1 - \zeta_0 \gamma^5 \hat{S}_0(q)\big)(\hat{q}+m)\psi_0 = \zeta_0 \Psi_{q\zeta_0}(x).$$

Обсудим физический смысл полученных результатов. Вид спинового оператора (16) указывает на то, что решение (5), являющееся линейной комбинацией решений (8), описывает состояние нейтральной частицы, которая движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{q}/q^0$ и спин которой прецессирует вокруг $\boldsymbol{H}_0$ с частотой $\omega = 2m|\boldsymbol{H}_0|/q^0$. Данное состояние является чистым состоянием. Подчеркнем, что существование плосковолновых решений уравнения (3), описывающих чистые состояния нейтральной частицы, проекция спина которой на фиксированную в пространстве ось не сохраняется, возможно только при использованном нами выборе в качестве квантовых чисел компонент кинетического импульса.

Рассмотрим теперь, к каким следствиям приводят полученные нами результаты при описании поведения нейтрино — единственного известного в настоящее время стабильного нейтрального фермиона. Как в пионерской работе [10], так и в других, посвященных изучению влияния постоянного чисто магнитного поля на характер осцилляций нейтрино, в качестве волновых функций частицы использовались стационарные решения $\Psi_{p\tilde{\zeta}}(x)$, впервые найденные в [11]. Эти решения являются собственными функциями оператора канонического импульса p^μ и спинового оператора $\tilde{\mathfrak{S}}_{tp}$ (см. (15)). Предполагалось, что в заданный момент времени среднее значение спиральности нейтрино равно по модулю единице, а дальнейшая эволюция спина описывается линейными комбинациями указанных выше волновых функций $\Psi(x) = \sum_{\tilde{\zeta}=\pm 1} \alpha_{\tilde{\zeta}}(p)\Psi_{p\tilde{\zeta}}(x)$.

Однако в общем случае такое описание некорректно. Так как стандартный оператор спиральности $(\boldsymbol{\Sigma p})/|\boldsymbol{p}|$ не коммутирует с оператором уравнения (3), то из основных принципов квантовой механики следует, что состояние частицы с фиксированным каноническим импульсом, имеющей в заданный момент времени среднее значение спиральности, равное по модулю единице, может быть только смешанным по спину[1]. Но в смешанном состоянии изменение поляризации пучка нейтрино может быть обусловлено исключительно различием групповых скоростей его компонентов, следующим из вида закона дисперсии (10). Этот эффект должен исчезать на больших расстояниях от источника вследствие того, что пучок перестает быть когерентным. Полученные же нами результаты позволяют трактовать возможный эффект изменения поляризации нейтрино в электромагнитном поле как реальную прецессию спина частицы.

Авторы благодарны А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому и А. Е. Шабаду за обсуждение полученных результатов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президента РФ «Ведущие научные школы» (грант НШ-3312.2008.2).

Список литературы

1. *Landau L.D., Peierls R.* // Zs. f. Phys. 1931. **69**. P. 56.
2. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1989.
3. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 4. С. 3.
4. *Lobanov A.E.* // Phys. Lett. B. 2005. **619**. P. 136.
5. *Лобанов А.Е., Мурчикова Е.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 11.
6. *Arbuzova E.V., Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // arXiv:0711.2649 [hep-ph].
7. *Wolfenstein L.* // Phys. Rev. D. 1978. **17**. P. 2369.
8. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
9. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М., 1987.
10. *Fujikawa K., Shrock R.E.* // Phys. Rev. Lett. 1980. **45**. P. 963.
11. *Тернов И.М., Багров В.Г., Хапаев А.М.* // ЖЭТФ. 1965. **48**. С. 921.
12. *Борисов А.В., Жуковский В.Ч., Тернов А.И.* // Изв. вузов. Физика. 1988. № 3. С. 64.

[1] Кроме частного случая, когда нейтрино распространяется перпендикулярно магнитному полю [12].

Operators of observables for neutral particle with anomalous magnetic moment in electromagnetic field

E. V. Arbuzova[1a], **A. E. Lobanov**[2b], **O. S. Pavlova**[2]

[1]*International University «Dubna», Dubna 141980, Russia;* [2]*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a]*arbuzova@uni-dubna.ru,* [b]*lobanov@phys.msu.ru.*

An explicit form of the kinetic momentum and spin projection operators is found for a neutral particle with anomalous magnetic moment interacting with a constant homogeneous electromagnetic field. Possible applications of obtained results for neutrino physics are discussed.

PACS: 03.50.De, 12.20.Ds.
Keywords: integral of motion, anomalous magnetic moment, external field, neutrino.
Received 4 March 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторах

1. Арбузова Елена Владимировна — к. ф.-м. н, доцент; e-mail: arbuzova@uni-dubna.ru.
2. Лобанов Андрей Евгеньевич — д. ф.-м. н, доцент, вед. научн. сотр.; тел.: 939-31-77, e-mail: lobanov@phys.msu.ru.
2. Павлова Ольга Серафимовна — к. ф.-м. н, доцент; тел.: 939-31-77.