

## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

**Порог параметрического возбуждения субгармоники в области брэгговского резонанса периодической структуры**И. Г. Захарова<sup>a</sup>, М. В. Комиссарова, В. Ф. Марченко*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: <sup>a</sup>zaharova@phys.msu.ru*

Обсуждены схемы возбуждения субгармоники, частота которой лежит в запрещенной полосе периодической структуры. Найдены зависимости пороговых значений синфазной накачки от параметров структуры.

PACS: 42.65.-k, 42.65.Yj.

*Ключевые слова:* возбуждение субгармоники, брэгговский резонанс, периодическая структура.

Статья поступила 29.02.2008, подписана в печать 23.04.2008.

Параметрическое возбуждение волн осциллирующим однородным полем накачки изучалось при генерации волн на поверхности жидкости [1, 2], спиновых волн в ферромагнетиках [3], ультразвуковых волн на поверхности кристалла [4]. В одномерном приближении и малых значениях надкритичности возбуждаемое поле представляет собой суперпозицию двух встречных волн субгармоники. Синфазность поля накачки обеспечивает точный одномерный синхронизм между волнами  $k_1(\omega) - k_2(\omega) = k_H(2\omega) = 0$  и соответственно сильную параметрическую связь. Порог генерации определяется как потерями внутри среды, так и потерями на излучение (конечностью возбуждаемой области).

Более сложный характер имеет спектр возбуждаемого поля в двумерных системах. Как показано на примере капиллярных волн на поверхности жидкости («рябь Фарадея») [5, 6], здесь возможны режимы как одночастотных регулярных структур, так и пространственно-временных хаотических движений.

В настоящей статье рассматривается синфазное параметрическое возбуждение субгармоники в периодической среде с квадратичной нелинейностью в условиях, когда частота субгармоники попадает в запрещенную (брэгговскую) полосу структуры. Очевидно, что из-за дополнительного затухания в этой полосе пороговое значение накачки возрастает. В отличие от однородной среды зависимость порога генерации от параметров среды приобретает сложный характер, поскольку между встречными волнами существует не только параметрическая, но и брэгговская связь. Такая схема генерации субгармоники может быть реализована, например, при возбуждении капиллярно-гравитационных поверхностных волн в совершающем вертикальные колебания лотке с жидкостью, имеющем периодически неоднородное дно [7]. Другая возможность связана с использованием периодической структуры оптического фотонного кристалла, в которой частота субгармоники лежит в первой запрещенной полосе, а частота накачки — во второй. При этой схеме параметрического взаимодействия, известного в литературе как двойной брэгговский резонанс [8], поле накачки не является однородным, а представляет собой суперпозицию встречных волн. Если использовать кристалл с дополнительной пространственной модуляцией коэффициента квадратичной нелинейности, то и в этом случае возможен режим возбуждения субгармоники синфазной накачкой.

Используя стандартную методику описания взаимодействия волн в брэгговской полосе одномерной периодической структуры, т.е. представляя решение волнового уравнения в виде

$$u = A_1(z)e^{i(\omega t - \pi z/d)} + A_2(z)e^{i(\omega t + \pi z/d)} + A_n e^{2i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (1)$$

получим для медленно меняющихся амплитуд  $A_1, A_2$  уравнения

$$\begin{aligned} i \frac{dA_1}{dz} + \delta A_1 + \kappa A_2 + mA_2^* &= 0, \\ -i \frac{dA_2}{dz} + \delta A_2 + \kappa A_1 + mA_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\kappa$  — брэгговская связь,  $\delta$  — отстройка частоты от брэгговской частоты  $\omega_{br}$ , соответствующей середине первой полосы непропускания,  $m = \chi A_n$  — коэффициент модуляции,  $\chi$  — элемент тензора квадратичной нелинейности. Применительно к плоскостной структуре фотонного кристалла, диэлектрическая проницаемость которого аппроксимируется зависимостью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{d}z$ , при возбуждении ТЕ-волн ( $u = E_y$ ) эти параметры принимают вид  $\kappa = 2\varepsilon_1$ ,  $\delta = \frac{\omega - \omega_{br}}{c} \sqrt{\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} - \frac{\pi}{d}$ .

При оценке пороговых значений  $m$  амплитуду накачки можно считать постоянной. Представляя решение (2) в виде  $A_1 A_2 \approx e^{i\lambda z}$ , из условия существования ненулевых решений для  $A_1, A_2, A_1^*, A_2^*$  получим

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(m + \delta)^2 - \kappa^2}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{(m - \delta)^2 - \kappa^2}. \quad (3)$$

Если выбрать граничные условия в виде  $A_1(0) = A_{10}$ ,  $A_2(l) = 0$ , то пороговое значение накачки определится из условия обращения в бесконечность коэффициента усиления  $G = A_1(l)/A_{10}$ . Это условие эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} (4\delta^2 - (\lambda_1 + \lambda_3)^2) \cos((\lambda_1 + \lambda_3)l) - \\ - (4\delta^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2) \cos((\lambda_1 - \lambda_3)l) - 4\lambda_1 \lambda_3 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $\delta = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{m^2 - \kappa^2}$  условие (4) принимает вид

$$\cos \sqrt{m^2 - \kappa^2} l = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует зависимость пороговой амплитуды накачки от длины системы  $m_{thr} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4l^2} + \kappa^2}$ . Брэгговская связь  $\kappa$  приводит к увеличению порога возбуждения, играя роль дополнительного затухания.

**Зависимость порогового коэффициента модуляции  $m_{\text{thr}}$  от  $\delta$  — отстройки частоты от брэгговской частоты  $\omega_{\text{br}}$  при  $\kappa = 0.05$ ,  $\bar{l} = 11.1$**

$\delta$	0	$\pm 0.01$	$\pm 0.02$	$\pm 0.03$	$\pm 0.04$	$\pm 0.05$
$m_{\text{thr}}$	0.15	0.15	0.15	0.14	0.14	0.14

При  $\delta \neq 0$  зависимость  $m_{\text{thr}}(\delta)$ , рассчитанная численно для параметров  $\kappa = 0.05$ ,  $l = 11.1$ , приведена в виде таблицы. Поскольку показатель линейного затухания волн  $\approx \sqrt{\kappa^2 - \delta^2}$  уменьшается при приближении к границам брэгговской полосы (граничные частоты определяются условием  $\delta = \pm \kappa$ ), то порог должен уменьшаться. Как следует из таблицы, порог практически не меняется с увеличением отстройки. Объяснить это можно фазовым характером обмена энергией между накачкой и волнами субгармоники. В однородной среде максимум параметрического усиления определяется суммой фаз волн субгармоники. Для системы (2) при  $\delta = \kappa = 0$  и фазе накачки  $\varphi_n = 0$  эта сумма  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$  постоянна вдоль  $z$ . Разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ , определяющая положение стоячей волны, остается произвольной. В периодической структуре эта разность, формирующая фактически брэгговское затухание, является определенной величиной. Лишь при  $\delta = 0$  разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  постоянна, при  $\delta \neq 0$  эта разность, а следовательно, и сумма  $\varphi_1 + \varphi_2$  меняются вдоль  $z$ , что и уменьшает эффективность действия накачки.

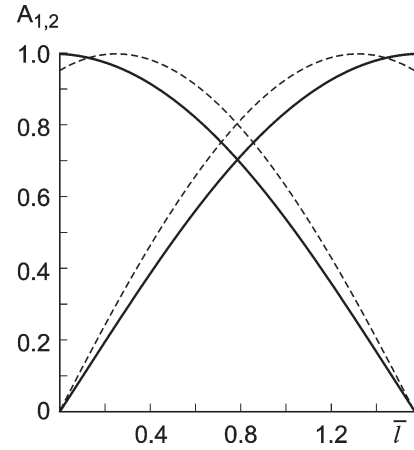
Диссипация в периодической структуре может быть учтена добавлением членов  $i\alpha A_{1,2}$  в уравнения (2). При  $\delta = 0$  соответствующая система примет вид

$$\begin{aligned} i \frac{dA_1}{dz} + i\alpha A_1 + \kappa A_2 + mA_2^* &= 0, \\ -i \frac{dA_2}{dz} + i\alpha A_2 + \kappa A_1 + mA_1^* &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

а соотношение (4) преобразуется к выражению

$$\lambda \cos \lambda l = -\alpha \sin \lambda l, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - \kappa^2 - \alpha^2}. \quad (7)$$

Приближенно можно считать, что  $m_{\text{thr}} \approx \sqrt{\frac{\pi^2}{4l^2} + \kappa^2 + \alpha^2}$ . Пространственное распределение амплитуд  $|A_1|$ ,  $|A_2|$  вдоль структуры при нулевых граничных условиях на концах малых надкритичностей приведено на рисунке.



Распределение амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$ , нормированных на максимальное значение вдоль структуры: сплошные кривые относятся к случаю  $\alpha = 0$ , пунктирные — к случаю  $\alpha \neq 0$ . Амплитуды  $A_1$  возрастают слева направо, а амплитуды  $A_2$  — справа налево.  $\bar{l} = \sqrt{m^2 - \kappa^2 + \alpha^2} l$

Диссипация приводит к тому, что максимум пространственного распределения амплитуд  $A_1(z)$  и  $A_2(z)$  сдвигается внутрь структуры. Это означает, что с увеличением показателя затухания  $\alpha$  все большая часть генерируемой мощности субгармоники рассеивается в структуре, при этом излучаемая мощность уменьшается.

### Список литературы

1. Beyer J., Friedrich R. // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 1162.
2. Горшков А.С., Марченко В.Ф., Цельковский А.Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. № 2. С. 313.
3. Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М., 1994.
4. Неволин В.Г. // Инженерно-физический журн. 1984. **47**. С. 1028.
5. Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М. // ЖЭТФ. 1986. **91**. С. 2070.
6. Franciso B., Mancebo J., Vega J. // J. Fluid Mech. 2002. **467**. P. 307.
7. Воляк К.И., Горшков А.С. // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. **24**. С. 1077.
8. Trillo S., Conti G., Assanto G. // Chaos. 2000. **10**. P. 590.

### Threshold of subharmonic parametric excitation in the Bragg gap of a periodical structure

I. G. Zakharova<sup>a</sup>, M. V. Komissarova, V. F. Marchenko

Department of Photonics and Microwave Physics, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>zaharova@phys.msu.ru.

The schemes of subharmonic parametric excitation in the Bragg gap of a periodical structure are discussed. Dependencies of the threshold values for cophased pump on the structure parameters are derived.

PACS: 42.65.-k, 42.65.Yj.

Keywords: subharmonic excitation, Bragg resonance, periodical structure.

Received 29 February 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

### Сведения об авторах

1. Захарова Ирина Гургеновна — к.ф.-м.н, ст. научн. сотр., доцент; тел.: 939-16-62, e-mail: zaharova@phys.msu.ru.
2. Комиссарова Мария Валентиновна — к.ф.-м.н, ст. преподаватель; тел.: 939-16-62.
3. Марченко Владимир Федорович — к.ф.-м.н, доцент, доцент; тел.: 939-29-22.