ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Квантовый нелинейный резонанс в сильном электромагнитном поле

П. В. Елютин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой электроники. 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: pve@shg.phys.msu.ru

Рассматривается движение одномерной квантовой слабо ангармоничной системы под воздействием гармонического внешнего поля в области, где частота переходов между соседними состояниями близка к частоте поля (квантовый нелинейный резонанс). Изучен случай сильного внешнего поля, в котором частота Раби для переходов между соседними уровнями велика по сравнению с частотой поля. Получено выражение для пакетов компактных квазиэнергетических состояний, которые периодически (и, может быть, сильно) изменяют свой состав и ширину.

PACS: 33.20.Xx, 42.50.Hz.

Ключевые слова: квантовый нелинейный резонанс, сильное поле, квазиэнергия.

Статья поступила 10.03.2008, подписана в печать 22.05.2008.

1. Квантовым нелинейным резонансом называется явление, возникающее в слабо нелинейных системах под действием внешнего поля, гармонически зависящего от времени. Оно состоит в возникновении квазиэнергетических состояний, составленных из многих стационарных состояний системы из области спектра, в которой частоты переходов между соседними состояниями (или, что то же самое, частоты классического движения) близки к частоте внешнего поля. Такое явление было впервые рассмотрено Берманом и Заславским [1] с помощью модели с гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{p}, \hat{x}) - F\hat{x}\cos\omega t, \qquad (1)$$

описывающим воздействие гармонического поля на автономную систему с одной степенью свободы. В дальнейшем амплитуду силы F будем называть полем.

Важной областью применения модели типа (1), подразумевающей выполнение условия квазиклассичности — малости постоянной Планка $\hbar$ в сравнении с масштабом действия, характерным для $\hat{H}_0$, является описание колебаний или вращения двухатомных молекул во внешнем электромагнитном поле [2]. Модель также применима для описания «искусственных атомов» — например электронов над поверхностью жидкого гелия [3] или заряженных частиц в ловушках [4, 5] и систем с джозефсоновскими контактами [6, 7]. Недавно теория квантового нелинейного осциллятора с периодическим возмущением была востребована для описания нового класса объектов — наномеханических резонаторов [8, 9].

В стандартной модели приняты три упрощающих допущения.

Во-первых, энергетический спектр невозмущенной системы описывается квадратичным выражением

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n - \frac{\kappa}{2}n^2\right), \qquad (2)$$

где $\kappa \ll 1$ — безразмерный коэффициент ангармонизма. Знак в (2) соответствует мягкой нелинейности — сгущению уровней (уменьшению частот) с ростом энергии.

Во-вторых, матричные элементы координаты считаются отличными от нуля только для переходов между соседними уровнями:

$$x_{n,k} \propto \delta(k, n+1) + \delta(k, n-1). \qquad (3)$$

Тем самым устраняются матричные элементы, ответственные за генерацию высших гармоник.

В-третьих, матричные элементы считаются постоянными

$$x_{n,k} = X[\delta(k, n+1) + \delta(k, n-1)]. \qquad (4)$$

Основные параметры модели удобно привести к форме частот. Первым является спектральная расстройка $\Delta = \kappa\hbar\omega_0$, представляющая разность частот двух соседних переходов, вторым является частота Раби, $\Omega = FX/\hbar$, а третьим — частота поля ω. Считая невозмущенную систему квазиклассической, будем всегда полагать $\Delta \ll \omega$. Частота Раби Ω может принимать произвольные значения.

Теоретические исследования описанной модели [1, 2, 10] велись в области умеренного поля, $\Delta \ll \Omega \ll \omega$, в которой допустимо использование приближения вращающегося поля (ПВП) [11]. Целью настоящей работы является исследование случая сильного поля, $\Omega \gg \omega$. Такая задача, с одной стороны, представляет принципиальный интерес, так как именно в эту область приводит квазиклассический предельный переход: и X (фурье-амплитуда первой гармоники классических колебаний), и F (сила) — классические величины, а при предельном переходе к классике мы должны принять $\hbar \to 0$, что дает $\Omega \to \infty$. С другой стороны, случай сильного поля достижим экспериментально; так, для значений параметров, типичных для колебаний двухатомной молекулы, ему соответствует интенсивность излучения $I \geqslant 10^{11}$ Вт$\cdot$см$^{-2}$.

2. Нестационарное уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 - F\hat{x}\cos\omega t\right)\Psi$$

подстановкой разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$ собственных функций невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$ ($\hat{H}_0\varphi_n = \hbar\varepsilon_n\varphi_n$),

$$\Psi = \sum c_n(t)\varphi_n(x)\exp(-i\varepsilon_n t),$$

сводится к системе уравнений для амплитуд

$$i\dot{c}_n = \Omega\cos\omega t c_{n+1}e^{i(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})t} + \Omega\cos\omega t c_{n-1}e^{i(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})t}. \qquad (5)$$

Сдвинем начало нумерации состояний, положив $n = r + q$, где r — резонансный уровень, для которого формальная частота перехода

$$\omega_t(n) = \hbar^{-1}\frac{dE_n}{dn} = \omega_0(1-\kappa n)$$

равна частоте внешнего поля: $\omega_t(r) = \omega$. Подстановкой

$$c_q = a_q \exp\left(-i\Delta\frac{q^2}{2}t\right)$$

из (4) получается система уравнений для амплитуд

$$i\frac{da_q}{dt} = -\Delta\frac{q^2}{2}a_q + \frac{\Omega}{2}\left(1+e^{-2i\omega t}\right)a_{q+1} + \frac{\Omega}{2}\left(1+e^{2i\omega t}\right)a_{q-1}. \tag{6}$$

Считая огибающую амплитуд $a(q)$ плавной функцией своего аргумента, проведем континуализацию, положив

$$a(q\pm 1) = a \pm \frac{da}{dq} + \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dq^2}.$$

Тогда система (6) примет вид уравнения в частных производных

$$i\frac{\partial a}{\partial t} = -\Delta\frac{q^2}{2}a + \frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \Omega a(1+\cos 2\omega t) + \frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\cos 2\omega t - i\Omega\frac{\partial a}{\partial q}\sin 2\omega t. \tag{7}$$

Это уравнение можно интерпретировать как нестационарное уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора — частицы с отрицательной массой $\tilde{m}$, обратно пропорциональной полю ($\hbar^2/\tilde{m} = -\Omega$), находящейся в параболической потенциальной яме с жесткостью $\tilde{m}\tilde{\omega}^2 = -\Delta$. Третий член в правой части (7) описывает положение дна потенциальной ямы; эта величина физически несущественна и может быть включена в общую фазу волновой функции. Четвертый член описывает модуляцию эффективной массы: дважды за период поля она проходит значения от $\tilde{m}/2$ до ∞; наконец, последний член описывает гармоническую силу, пропорциональную импульсу. Перед нами задача о движении квантового параметрически модулированного гармонического осциллятора под действием внешней силы. Общие решения такой задачи рассматривались в работах Попова и Переломова [12]. Однако такие решения громоздки и для наших целей неудобны.

Мы обратимся к частному решению, которое описывает наиболее компактный пакет квазиэнергетического состояния (КЭС), сосредоточенный вблизи резонансного уровня. Если пренебречь осциллирующими компонентами в (7), что соответствует ПВП, то искомое решение — основная мода гармонического осциллятора Φ_0, которая описывается гауссовым пакетом

$$\Phi_0(q) = \pi^{-1/4}\beta^{-1/8}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sqrt{\beta}}\right),$$

где $\beta = \Omega/\Delta \gg 1$ (другие решения даются высшими функциями Эрмита [2]). Величина β есть параметр квантовой теории возмущений для первого нерезонансного перехода; величина $\beta^{1/4}$ дает оценку числа состояний базиса, дающих существенный вклад в наиболее компактное резонансное КЭС.

По аналогии будем искать решение уравнения (7) в виде гауссова пакета с переменными параметрами

$$a(q) = \exp\left(-fq^2 - gq - h\right). \tag{8}$$

Параметр f контролирует ширину пакета, g — положение его центра, а h обеспечивает сохранение нормировки пакета. Подставляя (8) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q, получаем систему уравнений

$$-i\dot{f} = -\frac{\Delta}{2} + 2\Omega f^2(1+\cos 2\omega t), \tag{9}$$

$$-i\dot{g} = 2\Omega fg(1+\cos 2\omega t) + 2if\Omega\sin 2\omega t, \tag{10}$$

$$-i\dot{h} = \Omega\left(1 - f + \frac{g^2}{2}\right)(1+\cos 2\omega t). \tag{11}$$

Нас интересуют периодические решения этой системы.

Свойства системы (9)–(11) существенно зависят от величины безразмерного параметра $\varepsilon = \Omega\Delta/\omega^2$, который в области сильного поля может быть как мал, так и велик. Начнем со случая $\varepsilon \ll 1$, в котором можно найти приближенные решения уравнений (9) и (10) в форме быстро сходящегося ряда Фурье. Ограничиваясь гармоникой частоты 2ω, получаем

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Omega}} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\Omega\Delta^3}}{\omega^2-\Omega\Delta}\cos 2\omega t + \frac{i}{4}\frac{\omega\Delta}{\omega^2-\Omega\Delta}\sin 2\omega t, \tag{12}$$

$$g = \frac{2\omega\sqrt{\Omega\Delta}}{4\omega^2-\Omega\Delta}\cos 2\omega t + i\frac{\Omega\Delta}{4\omega^2-\Omega\Delta}\sin 2\omega t. \tag{13}$$

Эти решения показывают, что центр гауссова пакета осциллирует по гармоническому закону с частотой 2ω и амплитудой

$$Q = \frac{2\omega\Omega}{4\omega^2-\Omega\Delta}.$$

В частности, эта амплитуда превосходит ширину пакета при $\Omega > 2^{2/3}\omega^{4/3}\Delta^{-1/3}$, что вписывается в область $\Omega \ll \omega^2\Delta^{-1}$, в которой применимы наши расчеты. Далее, ширина гауссова пакета меняется по гармоническому закону с частотой 2ω, причем относительная амплитуда осцилляций ширины мала вместе с ε:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{1/4}\left[1 + \frac{\Delta\Omega}{2(\omega^2-\Delta\Omega)}\cos 2\omega t\right]. \tag{14}$$

Среднее значение координаты дается выражением

$$x(t) = X\sum_q\left[a_q^*(t)a_{q-1}(t)e^{i\omega t} + a_q^*(t)a_{q+1}(t)e^{-i\omega t}\right]. \tag{15}$$

Используя выражения (8), (12) и (13) и заменяя суммирование в (15) интегрированием, получаем для закона движения в двухмодовом приближении выражение

$$x(t) = B_1\cos\omega t + B_3\cos 3\omega t, \tag{16}$$

где амплитуды гармоник равны

$$B_1 = 2X\left(1 - \frac{\Omega\Delta}{8\omega^2}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\Delta}{16\Omega}}\right), \tag{17}$$

$$B_3 = X\frac{\Omega\Delta}{4\omega^2}\exp\left(-\sqrt{\frac{\Delta}{16\Omega}}\right). \tag{18}$$

Выражение для амплитуды первой гармоники в пределе $\hbar \to 0$ дает $B_1 \approx 2X$, что совпадает с классическим выражением. Второй член в (16) показывает, что в системе, где в спектре невозмущенного движения высшие гармоники по построению модели отсутствуют (отличны от нуля только матричные элементы перехода между соседними состояниями), возмущенное гармоническим полем движение обладает слабой компонентой на третьей гармонике, пропорциональной амплитуде поля, квадрату амплитуды первой гармоники и сохраняющейся в классическом пределе. Подчеркнем, что эта компонента принципиально отличается от обычного в теории нелинейных колебаний вклада на третьей гармонике, пропорционального кубу амплитуды поля.

3. Вывод о наличии компоненты на третьей гармонике не является артефактом приближений, сделанных в квантовой задаче, и может быть получен классически. Пусть, например, гамильтониан $\hat{H}_0$ описывает частицу, движущуюся в потенциале $U(x)$. Выберем начальные условия так, чтобы движение невозмущенной системы в соответствии с уравнением

$$m\ddot{x} + U_x = 0 \tag{19}$$

при некоторой энергии E было периодическим с частотой ω, $x_0(t) = \sum_k A_k \cos k\omega t$. Пусть также и движение возмущенной системы (с уравнением движения $m\ddot{x} + U_x = F\cos\omega t$) происходит с частотой ω, в резонансе с внешним полем: $x_1(t) = \sum_k B_k \cos k\omega t$. Разность между этими двумя законами движения $\xi(t) = x_1(t) - x_0(t)$ назовем резонансным откликом системы. По определению резонансный отклик является периодической функцией, представимой рядом Фурье. Если гармоническое поле мало, $F \to 0$, то в низшем порядке резонансный отклик может быть найден как пропорциональное F периодическое решение уравнения

$$m\ddot{\xi} + U_{xx}\xi = F\cos\omega t.$$

Фундаментальными решениями соответствующего однородного уравнения являются функции $\varphi_1 = \dot{x}_0$ и $\varphi_2 = x_0'$ (здесь и далее штрих означает дифференцирование по энергии E, соответствующей невозмущенному решению). Они позволяют выразить фурье-амплитуды резонансного отклика через фурье-амплитуды невозмущенного движения, их производные по энергии и производную частоты по энергии, $\xi_k\big(A_k, A_k', \omega, \omega'\big)$. Общие формулы громоздки, но в интересующем нас случае, дающем аналог описанной в п. 1 квантовой модели, при $A_k \equiv 0$ для всех $k \geqslant 2$ (эквивалент условия сильного отбора (3)) и $A_k' \equiv 0$ для всех k (эквивалент условия постоянства матричных элементов (4)), они упрощаются и дают

$$\xi_1 = -\frac{1}{16}FA_1^2\frac{\omega'}{\omega} = -\xi_3$$

в полном соответствии с квантовыми формулами (17), (18).

Отметим это согласие как удивительное, ибо навязанные фурье-компонентам условия в «натуральной» модели, заданной потенциалом $U(x)$, недопустимы. Дело в том, что из уравнения (19) и закона сохранения энергии следует тождество

$$\dot{x}\dot{x}' - \ddot{x}x' = \frac{1}{m}. \tag{20}$$

При подстановке в это соотношение периодического закона движения $x_0(t) = \sum_k A_k(E)\cos[k\omega(E)t]$, разложении левой части в ряд Фурье и приравнивании коэффициентов при гармониках формула (20) становится источником бесконечного набора правил сумм, первые три из которых имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega'\sum_k k^2A_k^2 + 2\omega\sum_k k^2A_kA_k' = \frac{2}{m\omega},\\
2\omega'\sum_k\big(k^2+k\big)A_kA_{k+1} + \\
+\,\omega\sum_k\big[k^2A_kA_{k+1}' + \big(k^2+2k+1\big)A_k'A_{k+1}\big] = 0, \qquad (21)\\
\omega'\Big[-A_1^2 + 2\sum_k\big(k^2+2k\big)A_kA_{k+2}\Big] + \\
+\,\omega\sum_k\big[\big(2k^2+k\big)A_kA_{k+2}' + \big(2k^2+6k+4\big)A_k'A_{k+2}\big] = 0.
\end{gathered}$$

Эти соотношения запрещают независимое задание величин A_k, A_k' и ω'. В частности, сделанный выбор обращает левую часть первого из равенств (21) в нуль при единичной, по существу, правой части. Видимо, мы имеем дело с редким случаем «суперстабильности» решения: квантовая модель подчиняется принципу соответствия даже в области, где ее классический аналог не существует.

4. Подведем итог. При воздействии на слабо нелинейную квантовую систему с одной степенью свободы сильного гармонического поля, для которого выполняются условия $\omega \ll \Omega \ll \omega^2\Delta^{-1}$, соответствующие квантовому нелинейному резонансу пакеты КЭС периодически изменяют свой состав. При $\Omega \geqslant \omega^{4/3}\Delta^{-1/3}$ это изменение велико в том смысле, что величина $|\langle\Psi(t_1)|\Psi(t_2)\rangle|$ может стать сколь угодно малой. Ширина пакетов КЭС тоже периодически меняется (ср. (14)), но это изменение является относительно слабым. Фазы (а при $\Omega \geqslant \omega^{4/3}\Delta^{-1/3}$ — и модули) амплитуд, образующих КЭС стационарных состояний, при этом изменяются быстро (характерные скорости изменения порядка $\Omega \gg \omega$), но компенсация вкладов соседних состояний оставляет в законе движения координаты только слабый ангармонический вклад — в соответствии с классической теорией резонансного отклика.

Выше мы ограничивались случаем $\varepsilon = \Omega\Delta\omega^{-2} \ll 1$. Противоположный случай, $\varepsilon \geqslant 1$, который можно назвать случаем гигантского поля, не требует специального рассмотрения. Дело в том, что параметр $\varepsilon = FX\omega'\omega^{-1}$ классичен: не содержит $\hbar$ и потому не затрагивается квазиклассическим предельным переходом. Величина ε определяет тип классического движения системы. Неравенство $\varepsilon \geqslant 1$ можно переписать в виде $\Delta\omega = \sqrt{FX\omega\omega'} \geqslant \omega$. Левая часть неравенства представляет собой характерную ширину нелинейного резонанса по частоте. Если эта величина превосходит частоту внешнего поля, то, в соответствии с известным критерием Чирикова [13], движение является сильно хаотическим, а резонансное решение (периодическое с частотой внешнего поля), которое мы рассматривали, теряет устойчивость. В этом случае конструктивное аналитическое описание системы невозможно.

Автор благодарит за полезные обсуждения Л. В. Келдыша, Г. Х. Китаеву и А. А. Никулина. Настоящая работы была выполнена при поддержке программы «Российские научные школы» (грант НШ-4464.2006.2) и РФФИ (грант 08-02-01020-А).

Список литературы

1. *Berman G.P., Zaslavsky G.M.* // Phys. Lett. A. 1977. **61**. P. 295.
2. *Берман Г.П., Коловский А.Р.* // УФН. 1992. **162**. С. 95.
3. *Berman G.P., Kolovsky A.R., Zaslavsky G.M.* // Phys. Lett. A. 1984. **105**. P. 483.
4. *Brown L.S., Gabrielse G.* // Rev. Mod. Phys. 1986. **58**. P. 233.
5. *Rigo M., Alber G., Mota-Furtado F., O'Mahony P.F.* // Phys. Rev. A. 1997. **55**. P. 1665.
6. *Fistul M.V., Wallraff A., Ustinov A.V.* // Phys. Rev. B. 2003. **68**. P. 060504.
7. *Siddiqi I., Vijay R., Pierre F.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**. P. 207002.
8. *Aldridge J.S., Cleland A.N.* // Phys. Rev. Lett. 2005. **94**. P. 156403.
9. *Kozinsky I., Postma H.W.Ch., Kogan O.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2007. **99**. P. 207201.
10. *Елютин П.В., Филиппов Т.В.* // Оптика и спектроскопия. 1990. **68**. С. 13.
11. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М., 1978.
12. *Попов В.С., Переломов А.М.* // ЖЭТФ. 1969. **56**. С. 1375; **57**. С. 1684.
13. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984.

Quantum nonlinear resonance in a strong electromagnetic field

P. V. Elyutin

Departmrnt of Quantum Electronics, Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: pve@shg.phys.msu.ru.

Motion of one-dimensional quantum weakly anharmonic system under the influence of a harmonic external field is considered in the range, where the transition frequency between the neighboring levels is close to the frequency of the harmonic field (quantum nonlinear resonance). The case of strong external field, in which the Rabi frequency for the transitions is large in comparison with the field frequency, is studied. Expression for the compact wavepackets of the quasienergy states that change their content and width periodically (and, possibly, strongly), is derived.

PACS: 33.20.Xx, 42.50.Hz.
Keywords: quantum nonlinear resonance, strong field, quasienergy.
Received 10 March 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторе

Елютин Павел Вячеславович — к. ф.-м. н, доцент, доцент; тел.: 939-36-69, e-mail: pve@shg.phys.msu.ru.