

АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

**Распознавание гравитационных импульсов
на фоне коррелированных негауссовых помех**А. В. Гусев^а, В. Н. Руденко^б*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ).
119991, Москва, Университетский просп., д. 13. E-mail: ^аavg@sai.msu.ru, ^бrvn@sai.msu.ru*

Рассматривается задача распознавания одиночных гравитационно-волновых всплесков на фоне коррелированных шумов резонансных гравитационных антенн. Получен новый алгоритм совместной обработки данных пространственно разнесенных гравитационных детекторов, оказывающийся альтернативным традиционной для гравитационно-волнового эксперимента схеме совпадений. При выводе нового алгоритма использована известная в статистической радиотехнике методика *совместного* обнаружения и измерения параметров квазидетерминированных сигналов.

PACS: 95.30.Sf, 95.85.Sz, 07.05.Kf.

Ключевые слова: относительность и гравитация, магнитные поля.

Статья поступила 21.12.2007, подписана в печать 26.03.2008.

Введение

Поиск гравитационных импульсов от космических источников при помощи гравитационных антенн активно проводится в последнее десятилетие. Существует два типа таких антенн: резонансные твердотельные детекторы, охлажденные до гелиевых температур, и неохлаждаемые лазерные широкополосные интерферометры на подвешенных зеркалах (свободных массах). Резонансные гравитационные антенны технически менее сложны и уже показали надежную работу на протяжении десятилетия в составе глобальной антенной решетки [1]. Интерферометры находятся в начале процесса освоения и эксплуатации [2]. Выполненные наблюдения с антеннами обоих типов не привели к обнаружению гравитационных импульсов, хотя некоторые события, зафиксированные твердотельными детекторами, возможно, заслуживают более детального изучения [3].

Сложность задачи, общая для любых гравитационных детекторов, заключается в необходимости вести поиск событий при крайне малой априорной астрофизической информации об ожидаемых сигналах. Тем не менее целый ряд процедур, оптимизирующих возможность регистрации гравитационных всплесков различных модельных типов, был предложен в литературе и практически апробирован при обработке записей действующих антенн [4, 5]. Принципиальным звеном всех алгоритмов является «схема совпадений» (СС), использующая общность гравитационного сигнала для всех антенн наземной сети. Данная методика в известной мере заимствована из экспериментов по детектированию космических лучей и частиц в ядерной физике. Степень ее оптимальности для гравитационно-волнового эксперимента фактически не анализировалась. Ниже мы попытаемся компенсировать этот недостаток.

Флуктуации на выходе линейного тракта резонансных гравитационных антенн представляют суперпозицию коррелированных (окрашенных) гауссовых и негауссовых шумов [6]. Основным источником негауссовых шумов на практике оказывается хаотическая импульсная помеха. Наличие импульсных шумов проявляется в аномальном поведении хвостов выборочной плотности вероятности («избыточные шумы»). Для борьбы с хаотической им-

пульсной помехой в гравитационно-волновом эксперименте традиционно используется двухэтапная методика обработки информации. На первом этапе осуществляется раздельное по каналам антенной решетки *скалярное* обнаружение импульсных сигналов на выходе гауссова приемника ОФ–СФ, где ОФ и СФ — обесляющий и согласованный линейные фильтры. Для проверки глобального характера гравитационного излучения на следующем этапе при помощи СС проводится селекция (в теории обнаружения — *распознавание*) гравитационных импульсов. Таким образом, формализованная схема обработки информации определяется следующей блок-структурой:

$$\mathbf{x}(t) \Rightarrow \text{ОФ–СФ} \Rightarrow \text{СС} \rightarrow \text{РУ}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_L(t)]^T$ — векторный случайный процесс на выходе антенной решетки, образованной пространственно разнесенными гравитационными антеннами с перекрывающимися диаграммами направленности, ОФ–СФ — L -канальная оптимальная линейная система, РУ — решающее устройство.

Как известно, теория распознавания сигналов в статистической радиотехнике основана на проверке статистических гипотез о состоянии реализации наблюдаемого случайного процесса [7]. В дискретном времени предполагается известной многомерная плотность вероятности аддитивной помехи (в непрерывном времени — функционал плотности вероятности). Статистика гауссовых шумов полностью определяется корреляционной функцией (спектральной плотностью). При описании негауссовых шумов широкое распространение получили марковские модели. В условиях априорной неопределенности в теории обнаружения разработаны специальные методы защиты линейной системы ОФ–СФ от таких помех.

Далее в нашем анализе мы используем алгоритмы статистической теории распознавания для обработки информации, поступающей от сети резонансных гравитационных антенн с перекрывающимися диаграммами направленности. В результате мы приходим к новому по отношению к (1) алгоритму, основанному на совместном обнаружении и оценивании параметров квазидетерминированных гравитационных всплесков. В состав обнаружителя входит блок оценивания параметров импульс-

ных сигналов. При этом классификация (распознавание) импульсных сигналов производится до их обнаружения в противоположность к схеме (1), где селекция гравитационных импульсов выполняется апостериорно к обнаружению.

Схема распознавания импульсных сигналов (гравитационных всплесков)

При распознавании (сложном обнаружении) векторный случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ на выходе антенной решетки рассматривается как суперпозиция

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}_\vartheta(t) + \mathbf{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

импульсного полезного сигнала $\mathbf{s}_\vartheta(t) = [s_{1\vartheta}(t) \ s_{2\vartheta}(t) \ \dots \ s_{L\vartheta}(t)]^T$, зависящего от параметра состояния $\vartheta = (1, 2)$, и аддитивной векторной помехи $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_L(t)]^T$, где $n_1(t), n_2(t), \dots, n_L(t)$ — статистически независимые коррелированные (окрашенные) негауссовы случайные процессы.

Пусть $g_i(t)$ — импульсная характеристика линейного тракта отдельной гравитационной антенны, $i = \overline{1, L}$. Тогда

$$s_{i\vartheta}(t) = a_{i\vartheta} g_i(t - \tau_{i\vartheta}),$$

где $a_{i\vartheta} \geq 0$ — масштабные коэффициенты, $\tau_{i\vartheta} \in (0, T)$ — моменты возникновения. Далее полагаем, что полезный сигнал принадлежит классу $\vartheta = 1$. В этом классе, учитывая глобальный характер гравитационных сигналов, имеем

$$a_{11} = a_{21} = \dots = a_{L1}, \quad \tau_{11} = \tau_{21} = \dots = \tau_{L1}.$$

Класс $\vartheta = 2$ содержит только импульсные возмущения фона негравитационного происхождения. Масштабные коэффициенты a_{i2}, a_{k2} и моменты возникновения τ_{i2}, τ_{k2} отдельных импульсов ($i \neq k$) в этом классе рассматриваются как линейно-независимые параметры: $a_{k1} \neq a_{k2}, \tau_{k1} \neq \tau_{k2}$.

Условное отношение правдоподобия $\Lambda[\mathbf{x}(t)|I_\vartheta]$ при обработке реализации векторного случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ можно представить в виде [2]

$$\Lambda[\mathbf{x}|I_\vartheta] = \prod_{i=1}^L \Lambda_i[x_i(t)|I_{i\vartheta}], \quad \vartheta = 0, 1, 2, \quad (2)$$

где $I_\vartheta = [a_{1\vartheta} \ a_{2\vartheta} \ \dots \ a_{L\vartheta}; \ \tau_{1\vartheta} \ \tau_{2\vartheta} \ \dots \ \tau_{L\vartheta}]^T$ — вектор параметров, $\Lambda_{i\vartheta}[x_i(t)|I_{i\vartheta}]$ — условное отношение правдоподобия для скалярного случайного процесса $x_i(t)$ в отдельном канале, $I_{i\vartheta} = (a_{i\vartheta}; \tau_{i\vartheta})$. Факторизация полного условного отношения правдоподобия (2) обусловлена статистической независимостью помех в отдельных каналах антенной решетки.

Для гауссова шумового фона формула (2) может быть представлена в виде

$$\Lambda_i[x_i(t)|I_{i\vartheta}] = \exp \left\{ \int_0^T x_i(t) v_{i\vartheta}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s_{i\vartheta}(t) v_{i\vartheta}(t) dt \right\},$$

$$\int_0^T k_i(t-t') v_{i\vartheta}(t') dt' = s_{i\vartheta}(t), \quad (3)$$

где $k_i(t-t') = \langle n_i(t) n_i(t') \rangle$ — функции корреляции аддитивной помехи $n_i(t)$, $\langle \cdot \rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения, $i = \overline{1, L}$.

Будем предполагать, что полезный сигнал $\mathbf{s}_\vartheta(t)$ расположен на интервале наблюдения $(0, T)$, длительность которого T превосходит время корреляции аддитивной помехи $\mathbf{n}(t)$. Тогда, учитывая (3), имеем

$$\Lambda_i[x_i(t)|I_{i\vartheta}] \approx \exp \left\{ a_{i\vartheta} y_i(\tau_{i\vartheta}) - \frac{a_{i\vartheta}^2 \sigma_i^2}{2} \right\},$$

$$y_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_i(j\omega) H_i(j\omega) \exp \{j\omega t\} d\omega \quad (4)$$

— случайный процесс на выходе оптимальной линейной системы ОФ–СФ с передаточной функцией [6]

$$H_i(j\omega) = \frac{G_i^*(j\omega)}{K_i(\omega)}, \quad i = \overline{1, L},$$

где $X_i(j\omega) \leftrightarrow x_i(t)$, $G_i(j\omega) \leftrightarrow g_i(t)$ — передаточная функция линейного тракта i -го канала антенной решетки, $K_i(\omega) \leftrightarrow k_i(\tau)$ — спектральная плотность случайного процесса $n_i(t)$, $\sigma_i^2 = \langle y_i^2(t) | \vartheta = 0 \rangle$ — дисперсия аддитивной помехи.

Принимая во внимание (2), (4), находим явную форму условного отношения правдоподобия $\Lambda[\mathbf{x}(t)|I_\vartheta]$ при гауссовых шумах в классе $\vartheta = 1, 2$

$$\Lambda[\mathbf{x}(t)|I_\vartheta] \approx \exp \left\{ \sum_{i=1}^L a_{i\vartheta} y_i(\tau_{i\vartheta}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L a_{i\vartheta}^2 \sigma_i^2 \right\}, \quad \vartheta = 1, 2. \quad (5)$$

Распознавание на фоне гауссова фона

Для квазидетерминированных сигналов с неизвестными параметрами в теории оптимального приема [7] возможны байесовский и небайесовский подходы.

В байесовской постановке неизвестный векторный параметр $I_\vartheta \in \Omega$ рассматривается как совокупность случайных величин с известными априорными распределениями. При этом безусловное отношение правдоподобия $\overline{\Lambda}_\vartheta[\mathbf{x}(t)]$ в состоянии $\vartheta = 1, 2$ определяется следующим выражением [7]:

$$\overline{\Lambda}_\vartheta[\mathbf{x}(t)] = \langle \Lambda_\vartheta[\mathbf{x}(t)] \rangle_{I_\vartheta} = \int_{\Omega} \Lambda[\mathbf{x}|I_\vartheta] W_{\text{пр}}(I_\vartheta) dI_\vartheta, \quad \vartheta = 1, 2, \quad (6)$$

где $W_{\text{пр}}(I_\vartheta)$ — априорная плотность вероятности векторного параметра I_ϑ .

В теории проверки статистических гипотез решение «присутствует сигнал класса $\vartheta = 1$ » принимается, если выполняется следующее условие [7]:

$$\vartheta = 1: \overline{\Lambda}_1[\mathbf{x}(t)] / \overline{\Lambda}_2[\mathbf{x}(t)] \geq c, \quad (7)$$

где c — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества; в противоположной ситуации принимается решение $\vartheta = 2$.

Выражение (7) можно преобразовать к эквивалентному виду

$$\vartheta = 1: z_1 - z_2 \geq \ln c, \quad (8)$$

где $z_\vartheta = \ln \overline{\Lambda}_\vartheta[\mathbf{x}(t)]$.

Вычисление безусловного отношения правдоподобия (6) зависит от знания априорной «сигнальной»

плотности вероятности $W_{\text{пр}}(\mathbf{l}_\vartheta)$, которая для решетки из L -детекторов может быть записана в виде

$$W_{\text{пр}}(\mathbf{l}_\vartheta) = \begin{cases} W_{\text{пр},a}(a_{11})W_{\text{пр},\tau}(\tau_{11}) \times \\ \times \prod_{i=1}^L \delta(a_{i1} - a_{11}) \delta(\tau_{i1} - \tau_{11}), & \vartheta = 1, \\ \prod_{i=1}^L W_{\text{пр}}(a_{i2})W_{\text{пр}}(\tau_{i2}), & \vartheta = 2. \end{cases}$$

На практике (и, в частности, в гравитационно-волновом эксперименте) априорные плотности вероятности $W_{\text{пр},a}(a)$ и $W_{\text{пр},\tau}(\tau)$ оказываются неизвестными. В качестве простейшего приближения в этом случае используется постулат «равномерного распределения» Байеса [7]

$$W_{\text{пр},a}(a) = (2a_{\text{max}})^{-1}, \quad |a| \leq a_{\text{max}}; \\ W_{\text{пр},\tau}(\tau) = T^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Фактически обработка информации по байесовским алгоритмам не получила широкого распространения из-за технических проблем. В частности, при гауссовых шумах в состав байесовского приемника (6) входит нелинейный элемент с трудно реализуемой экспоненциальной характеристикой (см. (5)).

При решении прикладных задач используется преимущественно *небайесовский подход*, при котором параметры квазидетерминированных сигналов в обоих классах $\vartheta = 1, 2$ рассматриваются как неизвестные, но неслучайные величины. В этом случае теория [7, 8] рекомендует замену неизвестных параметров \mathbf{l}_ϑ их оценками максимального правдоподобия $\hat{\mathbf{l}}_\vartheta$, т.е. предполагается переход к достаточной статистике $\hat{\Lambda}[\mathbf{x}(t)|\vartheta]$:

$$\overline{\Lambda}[\mathbf{x}(t)|\vartheta] \rightarrow \hat{\Lambda}[\mathbf{x}(t)|\vartheta] = \Lambda[\mathbf{x}(t)|\hat{\mathbf{l}}_\vartheta], \\ \hat{\mathbf{l}}_\vartheta = [\hat{a}_{1\vartheta} \hat{a}_{2\vartheta} \dots \hat{a}_{L\vartheta}; \hat{\tau}_{1\vartheta} \hat{\tau}_{2\vartheta} \dots \hat{\tau}_{L\vartheta}]^T,$$

где $\hat{a}_{i\vartheta}$ и $\hat{\tau}_{i\vartheta}$ — максимально-правдоподобные оценки неизвестных параметров $a_{i\vartheta}$ и $\tau_{i\vartheta}$ в отдельных каналах антенной решетки (антеннах).

Тогда решающее правило (8) распознавания гравитационных импульсов в небайесовской постановке определяется следующим выражением:

$$\vartheta = 1: \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \geq \ln c, \quad \hat{z}_\vartheta = \ln \Lambda[\mathbf{x}(t)|\hat{\mathbf{l}}_\vartheta]. \quad (9)$$

Максимально-правдоподобные оценки $\hat{a}_{i\vartheta}$ и $\hat{\tau}_{i\vartheta}$ находим из системы уравнений максимального правдоподобия

$$\sum_{i=1}^L \frac{\partial}{\partial \hat{a}_{i\vartheta}} \ln \Lambda[x_i|\hat{a}_{i\vartheta}, \hat{\tau}_{i\vartheta}] = 0, \\ \sum_{i=1}^L \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}_{i\vartheta}} \ln \Lambda[x_i|\hat{a}_{i\vartheta}, \hat{\tau}_{i\vartheta}] = 0, \quad \vartheta = 1, 2.$$

Отсюда, учитывая (5), имеем

$$\begin{cases} \hat{z}_1 \approx \frac{1}{2 \sum_{i=1}^L \sigma_i^2} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\sum_{i=1}^L y_i(t) \right]^2, \\ \hat{z}_2 \approx \sum_{i=1}^L \frac{1}{2\sigma_i^2} \max_{0 \leq t \leq T} y_i^2(t). \end{cases} \quad (10)$$

Выражение (10) определяет оценки логарифмов отношения правдоподобия в классах $\vartheta = 1$ и $\vartheta = 2$ на фоне гаус-

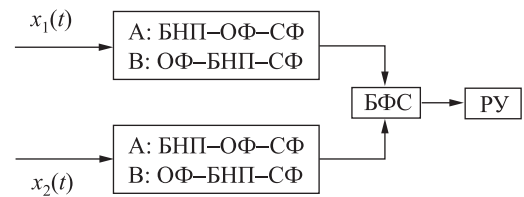
совых шумов с известными спектральными плотностями. В классе $\vartheta = 1$ неизвестные параметры гравитационных импульсов определяются путем совместной обработки реализаций случайных процессов $y_i(t)$. В классе $\vartheta = 2$ «амплитуды» и моменты возникновения импульсных сигналов негравитационной природы измеряются для каждого канала антенной решетки отдельно.

Учитывая (10), решающее правило (9) при гауссовых шумах в небайесовской постановке можно представить в эквивалентной блок-структуре

$$\mathbf{x}(t) \Rightarrow \text{ОФ-СФ} \Rightarrow \text{БФС} \Rightarrow \text{РУ}, \quad (11)$$

где БФС — блок формирования статистик \hat{z}_1 и \hat{z}_2 по формулам (10). Глобальный характер гравитационного сигнала в (11) учитывается при формировании достаточной статистики \hat{z}_1 в классе $\vartheta = 1$.

Блок-схема двухканального ($L = 2$) «гауссова» приемника при сложном обнаружении гравитационных импульсов приведена на рисунке.



Блок-схема приемника для разрешения (различения) гравитационных импульсов при наличии коррелированных негауссовых помех ($L = 2$)

Распознавание гравитационных импульсов при негауссовых помехах

Аддитивная помеха $n_i(t)$ на выходе линейного тракта действующих гравитационных антенн представляет собой суперпозицию гауссовых и негауссовых коррелированных (окрашенных) шумов. Обработка информации при наличии негауссовых шумов осуществляется по схеме ДК-БНП-СФ, где ДК — нелинейно-инерционный декоррелятор, БНП — безынерционный нелинейный преобразователь [7]. При обнаружении в дискретном времени ДК формирует негауссов белый шум — случайный процесс с независимыми значениями. Структура такого элемента зависит от многомерной плотности вероятности аддитивной негауссовой помехи, которая на практике оказывается неизвестной. Замена нелинейно-инерционного ДК линейным ОФ приводит к *частотно-амплитудному* подавлению негауссовых помех по схеме ОФ-БНП-СФ [9]. Характеристика БНП $\Gamma(\cdot)$ в этом случае выбирается в соответствии с критерием максимума отношения сигнал/шум и в первом приближении определяется следующей формулой:

$$\Gamma(\cdot) \propto W'(\cdot)/W(\cdot),$$

где $W(\cdot)$ — плотность вероятности аддитивной помехи на входе такого устройства.

В схеме БНП-ОФ-СФ осуществляется *амплитудно-частотное* подавление коррелированных негауссовых помех [9]. В гравитационно-волновом эксперименте применение такой схемы ограничивается из-за присутствия на выходе линейного тракта широкополосной помехи типа гауссова белого шума со стороны системы регистрации.

Таким образом, необходимость защиты оптимальной многоканальной линейной системы ОФ–СФ от воздействия коррелированных негауссовых помех путем введения нелинейного элемента с оптимальной по критерию отношения сигнал/шум характеристикой приводит к двум возможным алгоритмам обработки:

$$\begin{aligned} \text{А: } \mathbf{x}(t) &\Rightarrow \text{БНП-ОФ-СФ} \Rightarrow \text{БФС} \Rightarrow \text{РУ}, \\ \text{В: } \mathbf{x}(t) &\Rightarrow \text{ОФ-БНП-СФ} \Rightarrow \text{БФС} \Rightarrow \text{РУ}. \end{aligned} \quad (12)$$

Основные результаты и выводы

1. В работе поставлена и решена задача распознавания гравитационных импульсов. При гауссовых шумах оптимальный алгоритм распознавания определяется выражениями (9)–(11). Никаких ограничений на параметры и чувствительность отдельных гравитационных антенн не накладывается. В присутствии негауссовых шумов использован квазиоптимальный подход, основанный на защите оптимальной линейной обработки ОФ–БНП при помощи дополнительного БНП. Этот элемент выбирается в соответствии с критерием максимума отношения сигнал/шум. Как показано в [9], характеристики обнаружения при обработке информации по схеме ОФ–БНП–СФ приближаются к оптимальным.

2. Распознавание гравитационных импульсов рассматривается как оценка параметра состояния в классах $\vartheta = 1, 2$. В обоих классах используется *совместное* обнаружение и оценивание квазидетерминированных сигналов. Решающее правило (9) учитывает всю доступную информацию о свойствах сигналов в обоих классах.

3. Традиционная для гравитационно-волнового эксперимента методика обработки информации (1) может рассматриваться как непараметрический алгоритм обнаружения импульсных сигналов на фоне *гауссовых* шумов по блок-схеме ОФ–СФ с последующим распознаванием гравитационных импульсов по СС. Выполняемое при этом раздельное обнаружение и распознавание (селекция) гравитационного сигнала при отказе от использования информации о статистических свойствах негауссовых помех оказываются недостаточно эффективными. Рекомендации теории оптимального приема противоположны: распознавание квазидетерминированных сигналов по критерию отношения правдоподобия предполагает предварительную оценку их параметров в обоих классах $\vartheta = 1, 2$. Дополнительное «амплитудное» ограничение осуществляется при помощи БНП (см. выше).

Авторы признательны А. М. Черепашуку за внимание, оказанное при выполнении настоящей работы.

Список литературы

1. *Astone P. et al.* // Phys. Rev. D. 2007. **76**. P. 102001.
2. *Abbott B. et al.* // 2007. arXiv gr-gc/0711.3041.
3. *Babusci D., Giordano G., Murtas G.P., Pizzella G.* // A & A. 2004. **421**. P. 811.
4. *Руденко В.Н.* // Астрон. журн. 2001. **28**, № 12. С. 1116.
5. *Papa M.A.* // Progress towards Gravitational Wave Astronomy. arXiv: [gr-gc]/0802.0936. Vol. 1 (7 Febr. 2008).
6. *Astone P., Buttiglione S., Frasca S. et al.* // Nuovo Cimento. 1997. **20C**, № 1. P. 9.
7. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
8. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
9. *Акимов П.С., Бакун П.А., Богданович В.А. и др.* Теория обнаружения сигналов. М., 1984.

Gravitational pulses recognition at non-Gaussian background

A. V. Gusev^a, V. N. Rudenko^b

Sternberg State Institute of Astronomy, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^aavg@sai.msu.ru, ^brvn@sai.msu.ru.

The problem of single gravitational wave burst recognition at a correlated non-Gaussian noises of resonant gravitational antennas is considered. A novel algorithm of combined data processing for spatially spaced gravitational detectors, which one can suggest as the alternative of the coincidence-scheme, is derived. This algorithm is based on the traditional for statistical radioengineering method of combined detection and measurement of the parameters of the quasideterministic signals.

PACS: 95.30.Sf, 95.85.Sz, 07.05.Kf.

Keywords: resonant gravitational antennas, signal's recognition, correlated non-Gaussian noises, coincidence-scheme.

Received 21 December 2007.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2009)

Сведения об авторах

1. Гусев Андрей Викторович — к. ф.-м. н., ст. научн. сотр.; тел.: 939-53-27, e-mail: avg@sai.msu.ru.

2. Руденко Валентин Николаевич — д. ф.-м. н., профессор, зав. отделом; тел.: 939-16-34, e-mail: rvn@sai.msu.ru.