Распространение света в сильном внешнем магнитном поле с учетом квантовых поправок

И.С. Гринин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ivan_grinin@hotmail.com

Решены линеаризованные уравнения движения для поля электромагнитной волны во внешнем магнитном поле для конфигурации эксперимента PVLAS в рамках низкоэнергетического приближения квантовой электродинамики. Показано, что скорость распространения волны зависит от начального направления ее плоскости поляризации. Найдены законы дисперсии, соответствующие волнам со взаимно перпендикулярным направлением поляризации. Получена зависимость эллиптичности поля лазерного излучения от начальной поляризации и значения внешнего магнитного поля, а также найдено значение параметра эллиптичности для конфигурации системы, использованной в эксперименте PVLAS.

PACS: 12.20.Ds.

Ключевые слова: квантовая электродинамика.

Статья поступила 11.01.2008, подписана в печать 17.03.2008.

Введение

В настоящей работе проведено исследование распространения электромагнитной волны в сильном внешнем магнитном поле. Коллаборацией PVLAS (Polarizzazione del Vuoto con LASer) был проведен ряд экспериментов [1–2], в которых изучался эффект влияния сильного внешнего постоянного магнитного поля, направленного перпендикулярно оси распространения лазерного луча, на изменение его поляризации. Сначала для объяснения результатов, полученных в эксперименте, членами коллаборации была принята гипотеза существования поля аксионов в рамках парадигмы «темной материи». При этом также утверждалось, что стандартных квантово-электродинамических поправок недостаточно для объяснения полученных результатов (однако потом это заявление было признано преждевременным [2]). Поэтому представляется интересным рассчитать эти эффекты с учетом поправок квантовой электродинамики в условиях данного эксперимента. Хорошо известно, что в низкоэнергетическом пределе в эффективном лагранжиане в квантовой электродинамике появляются два дополнительных члена — лагранжианы Илинга [3] и Эйлера–Гейзенберга [4] (см. также [5–6]). Из полного лагранжиана следуют нелинейные уравнения движения, которые естественно линеаризовать по полю лазерного излучения. Следует отметить, что лагранжиан электродинамики с добавками Илинга и Эйлера–Гейзенберга широко используется, в частности, для изучения нелинейных эффектов электродинамики в сильных полях, например создаваемых пульсарами [7].

1. Лагранжиан, уравнения движения

Исходным моментом рассмотрения является низкоэнергетический эффективный лагранжиан, который представляет собой сумму классического лагранжиана электромагнитного поля и лагранжианов, соответствующих петлевым квантовым поправкам — лагранжиана Илинга (собственная энергия фотона) и Эйлера–Гейзенберга (рассеяние света на свете). Данные лагранжианы приведены в работе [6]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{C_u}{m^2}F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} + \left[\frac{\alpha^2}{90m^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right], \quad (1)$$

где тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu A^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ — тензор, дуальный к $F^{\mu\nu}$, $\Box = \partial_\nu\partial^\nu$ — оператор Даламбера, $C_u = \frac{\alpha}{60\pi}$, $\alpha = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры, m — масса электрона.

Варьируя действие и приравнивая вариацию к нулю, как того требует принцип наименьшего действия, $\delta S = \delta\int \mathcal{L}\, d^4x = 0$, получаем нелинейные уравнения движения

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{4C_u}{m^2}\partial_\nu\Box F^{\mu\nu} - \frac{8\alpha^2}{90m^4}\partial_\nu(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}F^{\mu\nu}) - \frac{56\alpha^2}{360m^4}\partial_\nu(F_{\rho\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0. \quad (2)$$

Как было отмечено выше, будем рассматривать систему, представляющую собой электромагнитную волну, распространяющуюся в сильном внешнем постоянном магнитном поле. Для изучения влияния внешнего поля на характеристики волны нам достаточно исследовать линейные по полю излучения уравнения. Таким образом, представим тензор $F^{\mu\nu}$ в следующем виде:

$$F^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \quad (3)$$

где тензор $B^{\mu\nu}$ описывает сильное внешнее магнитное поле, а $f^{\mu\nu}$ — поле лазерного излучения. Уравнения движения (2) принимают вид

$$\partial_\nu B^{\mu\nu} - \frac{4C_u}{m^2}\partial_\nu\Box B^{\mu\nu} - \frac{8\alpha^2}{90m^4}\partial_\nu\big(B_{\rho\sigma}B^{\rho\sigma}B^{\mu\nu}\big) - \frac{56\alpha^2}{360m^4}\partial_\nu\big(B_{\rho\sigma}\tilde{B}^{\rho\sigma}\tilde{B}^{\mu\nu}\big) + \partial_\nu f^{\mu\nu} - \frac{4C_u}{m^2}\partial_\nu\Box f^{\mu\nu} -$$

$$-\frac{8\alpha^2}{90m^4}\partial_\nu\big(2B_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}B^{\mu\nu}+f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}B^{\mu\nu}+B_{\rho\sigma}B^{\rho\sigma}f^{\mu\nu}+ +2B_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}f^{\mu\nu}+f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}f^{\mu\nu}\big)-\frac{56\alpha^2}{360m^4}\partial_\nu\big(2B_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma}\tilde{B}^{\mu\nu}+f_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma}\tilde{B}^{\mu\nu}+ + B_{\rho\sigma}\tilde{B}^{\rho\sigma}\tilde{f}^{\mu\nu}+2B_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma}\tilde{f}^{\mu\nu}+f_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma}\tilde{f}^{\mu\nu}\big)=0. \quad (4)$$

Очевидно, что внешнее магнитное поле можно полагать классическим:

$$\partial_\nu B^{\mu\nu}=0.$$

Используя тождество Бьянки $\partial_\nu\tilde{f}^{\mu\nu}=0$ и пренебрегая членами выше первого порядка по полю $f^{\mu\nu}$, получим линейные уравнения для поля лазерного излучения

$$\partial_\nu f^{\mu\nu}-\frac{4C_u}{m^2}\partial_\nu\Box f^{\mu\nu}-\frac{8\alpha^2}{90m^4}\partial_\nu(B_{\rho\sigma}B^{\rho\sigma})f^{\mu\nu}- -\frac{16\alpha^2}{90m^4}\partial_\nu(B_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma})B^{\mu\nu}-\frac{112\alpha^2}{360m^4}\partial_\nu(B_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma})\tilde{B}^{\mu\nu}=0. \quad (5)$$

Для проверки этого результата представление (3) для тензора $F^{\mu\nu}$ было подставлено в исходный лагранжиан (1) и удержаны члены, квадратичные по полю $f^{\mu\nu}$. Уравнения движения, полученные с использованием такого лагранжиана второй вариации, полностью совпали с уравнениями (5), что служит дополнительной проверкой правильности проведенных вычислений. Таким образом, мы получили линейное уравнение движения для поля $f^{\mu\nu}$ лазерного излучения.

2. Дисперсионные уравнения

Выберем систему координат, в которой внешнее поле $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{j}$ направлено вдоль оси y, а лазерное излучение распространяется вдоль оси z. Тогда

$$f^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&0\\E_x&0&0&H_y\\E_y&0&0&-H_x\\0&-H_y&H_x&0\end{pmatrix},\quad B^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&B\\0&0&0&0\\0&-B&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-H_x&-H_y&0\\H_x&0&0&-E_y\\H_y&0&0&E_x\\0&E_y&-E_x&0\end{pmatrix},\quad \tilde{B}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&-B&0\\0&0&0&0\\B&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Резонно полагать, что сильное магнитное поле вносит в пространство анизотропию, связанную с выделенным направлением вдоль оси y. Следует отметить, что аналогичные эффекты имеют место в оптических явлениях двойного лучепреломления или в эффекте Фарадея. В связи с этим представим поле лазерного излучения в виде двух линейно поляризованных волн с разными волновыми векторами k_x, k_y и одинаковыми частотами $\omega_1=\omega_2=\omega$, плоскости поляризации волн параллельны осям x, y:

$$E_x(t)=E_x\exp(ik_xz-i\omega t),\quad H_y(t)=H_y\exp(ik_xz-i\omega t); \\ E_y(t)=E_x\exp(ik_yz-i\omega t),\quad H_x(t)=H_y\exp(ik_yz-i\omega t). \quad (6)$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}= =-\partial\boldsymbol{H}/\partial t$, которое следует из самого определения тензора $F^{\mu\nu}$, получаем $H_y=\frac{k_x}{w}E_x$, $H_x=-\frac{k_y}{w}E_y$.

Так как

$$B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}=2B^2,\ B_{\mu\nu}f^{\mu\nu}=2BH_y,\quad B_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}=-2BE_y,$$

то члены вида

$$\partial_\nu(B_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma})B^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&2B^2\frac{\partial H_y}{\partial z}&0&0\end{pmatrix}, \\ \partial_\nu(B_{\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma})\tilde{B}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&-2B^2\frac{\partial E_y}{\partial t}&0\end{pmatrix}$$

дают вклад только в компоненты $\mu=1$ и $\mu=2$ уравнения (5) соответственно. Остальные компоненты этого уравнения тождественно равны нулю.

Для удобства обозначим

$$A_1=\left(1-\frac{16\alpha^2}{90m^4}B^2\right),\qquad A_2=\frac{4C_u}{m^2}, \\ A_3=\frac{32\alpha^2}{90m^4}B^2,\qquad A_4=\frac{224\alpha^2}{360m^4}B^2.$$

В представлении (6) уравнение (5) расцепляется на два нетривиальных уравнения для волновых векторов k_1 и k_2 (как уже было отмечено, компоненты $\mu=0$ и $\mu=3$ этого уравнения дают тождества):

$$\mu=1:\quad A_1(k_1^2-\omega^2)-A_2(k_1^2-\omega^2)^2-A_3k_1^2=0, \\ \mu=2:\quad A_1(k_2^2-\omega^2)-A_2(k_2^2-\omega^2)^2-A_4\omega^2=0.$$

Таким образом, мы получили дисперсионные уравнения, характеризующие зависимость волновых векторов от частоты лазерного излучения для двух электромагнитных волн с перпендикулярными плоскостями поляризации, распространяющихся в сильном внешнем магнитном поле.

Делая замену $x_1=k_1^2-\omega^2$ и $x_2=k_2^2-\omega^2$, имеем квадратные уравнения

$$A_2x_1^2-(A_1-A_3)x_1-A_3\omega^2=0, \\ A_2x_2^2-A_1x_2-A_4\omega^2=0,$$

решения которых имеют вид:

$$x_1=\frac{A_1-A_3\pm\sqrt{(A_1-A_3)^2+4A_2A_3\omega^2}}{2A_2}, \\ x_2=\frac{A_1\pm\sqrt{A_1^2+4A_2A_4\omega^2}}{2A_2}. \quad (7)$$

Решения, соответствующие знакам «+» в формулах (7), — нефизические, так как они отвечают электромагнитным волнам, распространяющимся со скоростью, значительно превышающей скорость света в вакууме. Появление таких решений неудивительно, так как эффективный лагранжиан содержит член с высшими производными. Однако это не приводит к противоречиям, поскольку лагранжиан (1) отвечает низкоэнергетическому приближению.

Итак,

$$k_1^2=\omega^2+\frac{A_1-A_3-\sqrt{(A_1-A_3)^2+4A_2A_3\omega^2}}{2A_2}, \\ k_2^2=\omega^2+\frac{A_1-\sqrt{A_1^2+4A_2A_4\omega^2}}{2A_2}.$$

Проведем расчет коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4, подставляя данные, используемые в эксперименте PVLAS [1]: напряженность поля $B\approx2.5$ Т, длина волны $\lambda\approx1000$ нм. Выбрана система единиц, в которой $\hbar=c=1$, и в этих единицах

$$A_1\approx1-0.25\cdot10^{-22},\qquad A_2\approx0.6\cdot10^{3}\ \text{ГэВ}^{-2},$$

$$A_3 \approx 0.5 \cdot 10^{-22}, \qquad A_4 \approx 0.9 \cdot 10^{-22}.$$

Осуществляя разложение по малым параметрам A_3, A_4 и $A_1 - 1$ вплоть до первого порядка малости, имеем

$$k_1^2 = (1 - A_3)\omega^2, \quad k_2^2 = (1 - A_4)\omega^2.$$

Отметим, что те же результаты мы бы получили, вообще не используя член Илинга в исходном лагранжиане (1). Коэффициент A_2, который появляется в результате добавки Илинга к классическому лагранжиану, будет давать весомый вклад при гораздо больших значениях внешнего магнитного поля, чем то, которое определяют коэффициенты A_3, A_4. Получение таких магнитных полей в искусственных условиях, на Земле во всяком случае, пока невозможно. Однако соответствующие поля могут наблюдаться, например, в пульсарах.

Таким образом, мы имеем две линейно поляризованные волны, распространяющиеся с разными скоростями. Можно считать, что волны распространяются в анизотропной среде с разными «показателями преломления» $\frac{w}{k_1}$ и $\frac{w}{k_2}$. В соответствии с этим, если начальная плоскость поляризации луча не параллельна осям, то на выходе из установки мы получим эллиптически поляризованную волну.

3. Расчет эллиптичности

Опираясь на проведенный эксперимент PVLAS [1, 2], рассчитаем изменение эллиптичности лазерного излучения на расстоянии 1 м после входа в установку. Входящий в установку свет предполагаем линейно поляризованным. Итак,

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\alpha) \cos(k_1 z - \omega t), \\ E_y &= E_0 \sin(\alpha) \cos(k_2 z - \omega t) = \\ &= E_0 \sin(\alpha) \cos(k_1 z - \omega t + \delta(z)), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta(z) = (k_2 - k_1)z$. Преобразуя (8), получаем неканоническое уравнение эллипса

$$\frac{E_x^2}{E_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{E_y^2}{E_0^2 \sin^2\alpha} - 2\frac{E_x E_y}{E_0^2 \sin\alpha \cos\alpha} \cos\delta(z) = \sin^2\delta(z). \tag{9}$$

Диагонализуя квадратичную форму (9), получаем каноническое уравнение эллипса, отношение полуосей которого называется эллиптичностью ε:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \Bigg\{ &- \cos\delta(z) \sin\left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos\delta(z)}\right)\right] - \\ &- \operatorname{ctg} 2\alpha \cos\left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos\delta(z)}\right)\right] + \frac{1}{\sin 2\alpha}\Bigg\}^{1/2} \times \\ \times \Bigg\{ &\cos\delta(z) \sin\left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos\delta(z)}\right)\right] + \\ &+ \operatorname{ctg} 2\alpha \cos\left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos\delta(z)}\right)\right] + \frac{1}{\sin 2\alpha}\Bigg\}^{-1/2}. \end{aligned} \tag{10}$$

На небольших расстояниях порядка десятков километров можно считать $\delta(z)$ малой величиной. Проводя разложение $\cos\delta(z)$ по малому $\delta(z)$ вплоть до второго порядка и считая $\alpha = \frac{\pi}{4}$, получим

$$\varepsilon \approx \frac{\delta(z)}{2}.$$

Подставляя значение длины одного прохода $z = 1$ м [2] в (10), получаем значение эллиптичности

$$\varepsilon \approx 2.1 \cdot 10^{-16}. \tag{11}$$

Отметим, что в эксперименте PVLAS измерение эллиптичности проводилось на характерном расстоянии 45 км, а потом рассчитывалось изменение эллиптичности за один проход. Экспериментальные ограничения на значение изменения эллиптичности за один проход имеет вид $\varepsilon_{\text{exp}} < 3.1 \cdot 10^{-13}$, что не противоречит теоретически полученному значению (11).

Автор выражает благодарность д. ф.-м. н. И. П. Волобуеву и к. ф.-м. н. М. Н. Смолякову за полезные обсуждения и помощь в подготовке настоящей работы.

Список литературы

1. *Zavattini E., Zavattini G., Ruoso G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. **96**. P. 110406.
2. *Zavattini E., Zavattini G., Ruoso G.* et al. // arXiv:hep-ex/0706.3419.
3. *Uehling E.A.* // Phys. Rev. 1935. **48**. P. 55.
4. *Euler E., Heisenberg W.* // Z. Phys. 1936. **98**. P. 714.
5. *Ritus V.I.* // Sov. Phys. JETP. 1976. **42**. P. 5.
6. *Ravndal F.* // arXiv:hep-ph/9708449.
7. *Denisov V.I., Svertilov S.I.* // Astron. Astrophys. 2003. **399**. P. L39.

Propagation of light in a strong magnetic field in consideration of quantum corrections

I. S. Grinin

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ivan_grinin@hotmail.com.

In the framework of low-energy QED linearized equations of motion for the electromagnetic wave in the external magnetic field with respect to the PVLAS experiment are solved. It is shown that wave velocity depends on the initial direction of the polarization velocity. Laws of dispersion related to waves with mutually orthogonal directions of polarization are obtained. The field ellipticity is derived as the function of the initial polarization and the value of the external magnetic field. The value of the ellipticity parameter in the PVLAS experiment is also performed.

PACS: 12.20.Ds.

Keywords: quantum electrodynamics.

Received 17 March 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2009).

Сведения об авторе

Гринин Иван Сергеевич — студент; e-mail: ivan_grinin@hotmail.com.