Математическая модель для антисимметрических решений N-частичного уравнения Шрёдингера

Д. С. Голиков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: dmitriy.golikov@gmail.com

Рассмотрены уравнения, описывающие математическую модель системы фермионов. Представлено общее решение этой системы уравнений через нечетную функцию. Исследована система уравнений в вариациях, получены уравнения для определения спектра. Для частного решения найдены собственные значения уравнений в вариациях.

PACS: 67.10.Fj.

Ключевые слова: квантовая статистика, квантовая модельная система, ультравторичное квантование, уравнения в вариациях, энергетический спектр возбуждений, Ферми-частицы.

Статья поступила 24.01.2008, подписана в печать 01.07.2008.

В знаменитой работе академика Н. Н. Боголюбова [1] рассмотрен N-частичный гамильтониан со слабым взаимодействием $V(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ между частицами i и j для случая симметрических решений. Основное условие Н. Н. Боголюбова

$$\int V(r)\,dr^3 > 0$$

означает, что в рассматриваемом взаимодействии в среднем превалирует отталкивание. Если же

$$\int V(r)\,dr^3 < 0,$$

то система оказывается неустойчивой. В [2] осуществлен переход в потенциале взаимодействия к δ-функции, что соответствует термодинамическому пределу.

Как известно, при сближении частиц в He^3 и в He^4 происходит отталкивание, а при отдалении их друг от друга — притяжение. Мы построим модель для случая, когда

$$\int V(r)\,dr^3 = 0, \tag{1}$$

т. е. в среднем нет ни притяжения, ни отталкивания, и рассмотрим антисимметрический случай, который, как известно, соответствует He^3.

Рассмотрим систему фермионов на трехмерном торе T со сторонами L_1, L_2 и L_2. Следуя соображениям термодинамического предела, аналогично изложенному в [2], в качестве потенциала взаимодействия, обладающего свойством (1), можно получить

$$V(x,y) = V_0 \Delta_x\, \delta(x-y), \tag{2}$$

где $x, y \in T$ — координаты частиц, $\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака, Δ_x — оператор Лапласа, действующий по аргументу x.

Асимптотика серий собственных значений системы N тождественных фермионов в пределе при $N \to \infty$ определяется решениями следующей системы уравнений [3]:

$$\begin{gathered}
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y)G(x,y) - \\
-\int dz\big(V(x,z) - V(y,z)\big)\widetilde{R}(x,z)R(z,y) = 0,\\
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)R(x,y) - \\
-\int dz\big(V(x,z)R(x,z)G(z,y) + V(y,z)R(z,y)G(z,x)\big) = \\
= \Omega R(x,y),\\
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\widetilde{R}(x,y) - \\
-\int dz\big(V(x,z)\widetilde{R}(x,z)G(y,z) + V(y,z)\widetilde{R}(z,y)G(x,z)\big) = \\
= \Omega \widetilde{R}(x,y).
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь m — масса частиц, $\hbar$ — постоянная Планка, Ω — действительное число. Функции $G(x,y)$, $R(x,y)$, $\widetilde{R}(x,y)$ заданы на $L_2(T^2)$, кроме того, в случае фермионов функции $R(x,y)$, $\widetilde{R}(x,y)$ антисимметричны относительно перестановок переменных x и y.

Учитывая вид потенциала (2), получим

$$\begin{gathered}
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y)G(x,y) - \\
- V_0\big(\Delta_z(\widetilde{R}(x,z)R(z,y))|_{z=x} - \Delta_z(\widetilde{R}(x,z)R(z,y))|_{z=y}\big) = 0,\\
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)R(x,y) - \\
- V_0\big(\Delta_z(G(z,y)R(x,z))|_{z=x} + \Delta_z(G(z,x)R(z,y))|_{z=y}\big) = \\
= \Omega R(x,y),\\
-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\widetilde{R}(x,y) - \\
- V_0\big(\Delta_z(G(y,z)\widetilde{R}(x,z))|_{z=x} + \Delta_z(G(x,z)\widetilde{R}(z,y))|_{z=y}\big) = \\
= \Omega \widetilde{R}(x,y).
\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнения (4) допускают подстановку

$$\begin{gathered}
G(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik(x-y)} \sum_l G_l e^{il(x-y)},\\
\widetilde{R}(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik(x+y)} \sum_l \widetilde{R}_l e^{il(x-y)},\\
R(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{ik(x+y)} \sum_l R_l e^{il(x-y)},
\end{gathered} \tag{5}$$

где k, l — трехмерные векторы вида

$$2\pi\left(\frac{n_1}{L_1},\frac{n_2}{L_2},\frac{n_3}{L_2}\right), \tag{6}$$

n_1, n_2, n_3 — целые числа. В силу антисимметрии функций $R(x,y)$ и $\widetilde{R}(x,y)$ должны выполняться условия

$$R_l=-R_{-l},\quad \widetilde{R}_l=-\widetilde{R}_{-l}. \tag{7}$$

После подстановки (5) в (4) получим уравнения

$$\begin{gathered}\widetilde{r}R_l-\boldsymbol{r}\widetilde{R}_l=0,\\ \Omega\widetilde{R}_l=\frac{\hbar^2}{m}(k^2+l^2)\widetilde{R}_l+2V_0l\widetilde{r}(G_l+G_{-l}),\\ \Omega R_l=\frac{\hbar^2}{m}(k^2+l^2)R_l+2V_0lr(G_l+G_{-l}),\end{gathered} \tag{8}$$

где r, $\widetilde{r}$ — следующие векторы:

$$r=\frac{1}{L_1L_2^2}\sum_l lR_l,\quad \widetilde{r}=\frac{1}{L_1L_2^2}\sum_l l\widetilde{R}_l. \tag{9}$$

Общее решение системы уравнений (8) имеет вид

$$R_l=-\frac{2V_0lr(G_l+G_{-l})}{\hbar^2(k^2+l^2)/m-\Omega},\quad \widetilde{R}_l=-\frac{2V_0l\widetilde{r}(G_l+G_{-l})}{\hbar^2(k^2+l^2)/m-\Omega}. \tag{10}$$

Подстановка (10) в соотношения (9) приводит к равенствам

$$\begin{gathered}r=-\frac{4V_0}{L_1L_2^2}\sum_l(r,l)\frac{lG_l}{\hbar^2(k^2+l^2)/m-\Omega},\\ \widetilde{r}=-\frac{4V_0}{L_1L_2^2}\sum_l(\widetilde{r},l)\frac{lG_l}{\hbar^2(k^2+l^2)/m-\Omega},\end{gathered} \tag{11}$$

где скобками $(\cdot,\cdot)$ отмечено скалярное произведение векторов. Каждое из этих уравнений представляет собой однородную систему трех уравнений относительно компонент вектора r и компонент вектора $\widetilde{r}$.

Заметим, что в одномерном случае условия (11) превращаются в равенство

$$-\frac{4V_0}{L_1L_2^2}\sum_l\frac{l^2G_l}{\hbar^2(k^2+l^2)/m-\Omega}=1.$$

Уравнения (8) можно представить в виде

$$[A_l,L_l]=0. \tag{12}$$

Матрицы L_l и A_l имеют вид

$$L_l=\begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}_l & -V\widetilde{\alpha}_l\\ V\alpha_l & -\widetilde{\varepsilon}_{-l}\end{pmatrix},\quad A_l=\begin{pmatrix}G_l & \widetilde{R}_l\\ -R_l & -G_{-l}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{\varepsilon}_l=\frac{\hbar^2}{2m}(k_1-l)^2-\frac{\Omega}{2},\quad \alpha_l=2l\boldsymbol{r},\quad \widetilde{\alpha}_l=2l\widetilde{\boldsymbol{r}}, \tag{14}$$

а r, $\widetilde{r}$ выражаются формулой (9).

Рассмотрим решения уравнения (12) вида

$$A_l=f(L_l). \tag{15}$$

Собственные значения матрицы L_l равны

$$\widetilde{\mu}_l^{\pm}=-\frac{\hbar^2}{m}kl\pm\mu_l,$$

где

$$\mu_l=\pm\sqrt{\varepsilon_l^2-V^2\widetilde{\alpha}_l\alpha_l}.$$

Из (15) для матриц (13) следует:

$$\begin{gathered}G_l=\frac{\mu_l+\varepsilon_l}{2\mu_l}f(\widetilde{\mu}_l^+)+\frac{\mu_l-\varepsilon_l}{2\mu_l}f(\widetilde{\mu}_l^-),\\ G_{-l}=-\frac{\mu_l-\varepsilon_l}{2\mu_l}f(\widetilde{\mu}_l^+)-\frac{\mu_l+\varepsilon_l}{2\mu_l}f(\widetilde{\mu}_l^-),\\ R_l=\frac{V\alpha_l}{2\mu_l}\big(f(\widetilde{\mu}_l^-)-f(\widetilde{\mu}_l^+)\big),\quad \widetilde{R}_l=\frac{V\widetilde{\alpha}_l}{2\mu_l}\big(f(\widetilde{\mu}_l^-)-f(\widetilde{\mu}_l^+)\big),\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\varepsilon_l=\frac{\widetilde{\varepsilon}_l+\widetilde{\varepsilon}_{-l}}{2}=\frac{\hbar^2}{2m}\big(k_1^2+l^2\big)-\frac{\Omega}{2}.$$

Подстановка R_l и $\widetilde{R}_l$ вида (16) в выражения (9) приводит к уравнениям

$$\begin{gathered}r=\frac{V_0}{2L_1L_2^2}\sum_l\frac{l\alpha_l}{\mu_l}\big(f(\widetilde{\mu}_l^-)-f(\widetilde{\mu}_l^+)\big),\\ \widetilde{r}=\frac{V_0}{2L_1L_2^2}\sum_l\frac{l\widetilde{\alpha}_l}{\mu_l}\big(f(\widetilde{\mu}_l^-)-f(\widetilde{\mu}_l^+)\big),\end{gathered} \tag{17}$$

совпадающими в силу (16) с уравнениями (11). В одномерном случае эти уравнения сводятся к условию

$$\frac{V_0}{L_1L_2^2}\sum_l\frac{l^2}{\mu_l}\big(f(\widetilde{\mu}_l^-)-f(\widetilde{\mu}_l^+)\big)=1. \tag{18}$$

Функция $f(x)$ не совсем произвольна. Из условий антисимметрии (7), равенства

$$G_l-G_{-l}=-(G_{-l}-G_{-(-l)})$$

следует, что для $f(x)$ должны выполняться соотношения

$$\begin{gathered}f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right)-f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right)=\\ =f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right)-f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right),\\ f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right)+f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right)=\\ =-f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right)-f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right).\end{gathered}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$\begin{gathered}f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right)=-f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right),\\ f\left(-\frac{\hbar^2}{m}kl-\mu_l\right)=-f\left(\frac{\hbar^2}{m}kl+\mu_l\right).\end{gathered}$$

Этим условиям для любых значений k удовлетворяют нечетные функции

$$f(\xi)=-f(-\xi).$$

В случае когда $k=0$, в силу (16)

$$G_l=G_{-l}.$$

Таким образом, решения (16) определяются нечетной функцией $f(\cdot)$ и параметрами r, $\widetilde{r}$, удовлетворяющими уравнениям (18).

Рассмотрим систему уравнений в вариациях [4], отвечающую уравнениям (3):

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\delta G(x,y)=\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x-\Delta_y)\delta G(x,y)+\\
&+\int dz\,(V(x,z)-V(y,z))\big(\widetilde{R}(x,z)\delta R(z,y)+\\
&\qquad+\delta\widetilde{R}(x,z)R(z,y)\big),\\
&(\Omega-\lambda)\delta R(x,y)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)\right)\delta R(x,y)-\\
&-\int dz\,V(x,z)(R(x,z)\delta G(z,y)+\delta R(x,z)G(z,y))-\\
&-\int dz\,V(y,z)(R(z,y)\delta G(z,x)+\delta R(z,y)G(z,x)),\\
&(\Omega+\lambda)\delta\widetilde{R}(x,y)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)\right)\delta\widetilde{R}(x,y)-\\
&-\int dz\,V(x,z)\big(\widetilde{R}(x,z)\delta G(y,z)+\delta\widetilde{R}(x,z)G(y,z)\big)-\\
&-\int dz\,V(y,z)\big(\widetilde{R}(z,y)\delta G(x,z)+\delta\widetilde{R}(z,y)G(x,z)\big).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Решение этих уравнений в случае потенциала (2) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
\delta G(x,y)&=\frac{1}{L_1L_2^2}e^{-ik_1(x-y)}\sum_{pq}\delta G_{pq}e^{ipx+iqy},\\
\delta\widetilde{R}(x,y)&=\frac{1}{L_1L_2^2}e^{-ik_1(x+y)}\sum_{pq}\delta\widetilde{R}_l e^{ipx+iqy},\\
\delta R(x,y)&=\frac{1}{L_1L_2^2}e^{ik_1(x+y)}\sum_{pq}\delta R_{pq}e^{ipx+iqy}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

В силу антисимметрии функций $\delta R(x,y)$, $\delta\widetilde{R}(x,y)$ должны выполняться соотношения

$$\delta R_{pq}=-\delta R_{qp},\quad \delta\widetilde{R}_{pq}=-\delta\widetilde{R}_{qp}.$$

Подстановка (20) в уравнения (19) приводит к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda\big)\delta G_{pq}-V_0\widetilde{\alpha}_p\delta R_{pq}-V_0\alpha_q\delta\widetilde{R}_{pq}-\\
&\qquad-V_0(p-q)\big(R_qB_{p+q}+\widetilde{R}_pA_{p+q}\big)=0,\\
&\big(\widetilde{\varepsilon}_{-p}+\widetilde{\varepsilon}_{-q}+\lambda\big)\delta R_{pq}-V_0\alpha_p\delta G_{pq}+V_0\alpha_q\delta G_{qp}+\\
&\qquad+V_0(p-q)(G_{-p}+G_{-q})A_{p+q}=0,\\
&\big(\widetilde{\varepsilon}_p+\widetilde{\varepsilon}_q-\lambda\big)\delta\widetilde{R}_{pq}-V_0\widetilde{\alpha}_p\delta G_{qp}+V_0\widetilde{\alpha}_q\delta G_{pq}+\\
&\qquad+V_0(p-q)(G_p+G_q)B_{p+q}=0,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где

$$A_k=\frac{1}{L_1L_2^2}\sum_s s\delta R_{k-s,s},\quad B_k=\frac{1}{L_1L_2^2}\sum_s s\delta\widetilde{R}_{k-s,s},\tag{22}$$

суммирование производится по всем векторам s вида (6), а α_l, $\widetilde{\alpha}_l$ определены соотношениями (14).

Уравнения (21) после подстановки δG_{pq}, δG_{qp} можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
&\delta G_{pq}=\frac{V_0}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}\times\\
&\times\big(\widetilde{\alpha}_p\delta R_{pq}+\alpha_q\delta\widetilde{R}_{pq}+(p-q)R_qB_{p+q}+(p-q)\widetilde{R}_pA_{p+q}\big),\\
&\big(\widetilde{\varepsilon}_{-p}+\widetilde{\varepsilon}_{-q}+\lambda\big)\delta R_{pq}+V_0(p-q)(G_{-p}+G_{-q})A_{p+q}-\\
&-\frac{V_0^2\alpha_p}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}\times\\
&\times\big(\widetilde{\alpha}_p\delta R_{pq}+\alpha_q\delta\widetilde{R}_{pq}+(p-q)R_qB_{p+q}+(p-q)\widetilde{R}_pA_{p+q}\big)-\\
&-\frac{V_0^2\alpha_q}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\times\\
&\times\big(\widetilde{\alpha}_q\delta R_{pq}+\alpha_p\delta\widetilde{R}_{pq}+(p-q)R_pB_{p+q}+(p-q)\widetilde{R}_qA_{p+q}\big)=0,\\
&\big(\widetilde{\varepsilon}_p+\widetilde{\varepsilon}_q-\lambda\big)\delta\widetilde{R}_{pq}+V_0(p-q)(G_p+G_q)B_{p+q}+\\
&+\frac{V_0^2\widetilde{\alpha}_q}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}\times\\
&\times\big(\widetilde{\alpha}_p\delta R_{pq}+\alpha_q\delta\widetilde{R}_{pq}+(p-q)R_qB_{p+q}+(p-q)\widetilde{R}_pA_{p+q}\big)+\\
&+\frac{V_0^2\widetilde{\alpha}_p}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\times\\
&\times\big(\widetilde{\alpha}_q\delta R_{pq}+\alpha_p\delta\widetilde{R}_{pq}+(p-q)R_pB_{p+q}+(p-q)\widetilde{R}_qA_{p+q}\big)=0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Из уравнений (23) следует, что δR_{pq}, $\delta\widetilde{R}_{pq}$ выражаются через A_{p+q}, B_{p+q} следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\delta R_{pq}&=\zeta_{p,q}A_{p+q}+\sigma_{p,q}B_{p+q},\\
\delta\widetilde{R}_{pq}&=\eta_{p,q}A_{p+q}+\xi_{p,q}B_{p+q},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{p,q}=\frac{M_{4,p,q}}{D_{p,q}}V_0(p-q)\times\\
&\quad\times\left(\frac{V_0\alpha_p\widetilde{R}_p}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{V_0\alpha_q\widetilde{R}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}-G_{-p}-G_{-q}\right)+\\
&\quad+\frac{M_{2,p,q}}{D_{p,q}}V_0^2(p-q)\left(\frac{\widetilde{\alpha}_q\widetilde{R}_p}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{\widetilde{\alpha}_p\widetilde{R}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\right),\\
&\sigma_{p,q}=\frac{M_{4,p,q}}{D_{p,q}}V_0^2(p-q)\left(\frac{\alpha_pR_q}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{\alpha_qR_p}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\right)+\\
&+\frac{M_{2,p,q}}{D_{p,q}}V_0(p-q)\left(\frac{V_0\widetilde{\alpha}_qR_q}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{V_0\widetilde{\alpha}_pR_p}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}+G_p+G_q\right),\\
&\eta_{p,q}=-\frac{M_{1,p,q}}{D_{p,q}}V_0^2(p-q)\left(\frac{\widetilde{\alpha}_q\widetilde{R}_p}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{\widetilde{\alpha}_p\widetilde{R}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\right)-\\
&-\frac{M_{3,p,q}}{D_{p,q}}V_0(p-q)\left(\frac{V_0\alpha_p\widetilde{R}_p}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{V_0\alpha_q\widetilde{R}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}-G_{-p}-G_{-q}\right),\\
&\xi_{p,q}=-\frac{M_{1,p,q}}{D_{p,q}}V_0(p-q)\times\\
&\quad\times\left(\frac{V_0\widetilde{\alpha}_qR_q}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{V_0\widetilde{\alpha}_pR_p}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}+G_p+G_q\right)-\\
&\quad-\frac{M_{3,p,q}}{D_{p,q}}V_0^2(p-q)\left(\frac{\alpha_pR_q}{\widetilde{\varepsilon}_p-\widetilde{\varepsilon}_{-q}-\lambda}+\frac{\alpha_qR_p}{\widetilde{\varepsilon}_q-\widetilde{\varepsilon}_{-p}-\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$D_{p,q}=M_{1,p,q}M_{4,p,q}-M_{2,p,q}M_{3,p,q},\tag{26}$$

$$M_{1,p,q} = \widetilde{\varepsilon}_{-p} + \widetilde{\varepsilon}_{-q} + \lambda - \frac{V_0^2 \alpha_p \widetilde{\alpha}_p}{\widetilde{\varepsilon}_p - \widetilde{\varepsilon}_{-q} - \lambda} - \frac{V_0^2 \alpha_q \widetilde{\alpha}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q - \widetilde{\varepsilon}_{-p} - \lambda},$$
$$M_{2,p,q} = -\frac{V_0^2 \alpha_p \alpha_q}{\widetilde{\varepsilon}_p - \widetilde{\varepsilon}_{-q} - \lambda} - \frac{V_0^2 \alpha_p \alpha_q}{\widetilde{\varepsilon}_q - \widetilde{\varepsilon}_{-p} - \lambda},$$
$$M_{3,p,q} = \frac{V_0^2 \widetilde{\alpha}_p \widetilde{\alpha}_q}{\widetilde{\varepsilon}_p - \widetilde{\varepsilon}_{-q} - \lambda} + \frac{V_0^2 \widetilde{\alpha}_p \widetilde{\alpha}_q}{\widetilde{\varepsilon}_q - \widetilde{\varepsilon}_{-p} - \lambda},$$
$$M_{4,p,q} = \widetilde{\varepsilon}_p + \widetilde{\varepsilon}_q - \lambda + \frac{V_0^2 \alpha_q \widetilde{\alpha}_q}{\widetilde{\varepsilon}_p - \widetilde{\varepsilon}_{-q} - \lambda} + \frac{V_0^2 \alpha_p \widetilde{\alpha}_p}{\widetilde{\varepsilon}_q - \widetilde{\varepsilon}_{-p} - \lambda}.$$

Подстановка (24) в (22) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно компонент векторов A_p, B_p

$$A_p = \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_s s((\zeta_{p-s,s}, A_p) + (\sigma_{p-s,s}, B_p)),$$
$$B_p = \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_s s((\eta_{p-s,s}, A_p) + (\xi_{p-s,s}, B_p)), \tag{27}$$

где скобками отмечено скалярное произведение векторов.

Система линейных уравнений (21) имеет решения $\delta G_{p,q}^{(l)}$, $\delta R_{p,q}^{(l)}$, $\delta \widetilde{R}_{p,q}^{(l)}$, обладающие свойством

$$\delta G_{p,q}^{(l)} = \delta R_{p,q}^{(l)} = \delta \widetilde{R}_{p,q}^{(l)} = 0 \quad \text{при} \quad p + q \neq l. \tag{28}$$

Для решений (28) имеют место соотношения

$$A_k = 0, \quad B_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l.$$

Следовательно, для этих решений бесконечная система уравнений (27) сводится к однородной системе двух векторных уравнений при $k = l$. Равенство нулю соответствующего детерминанта представляет собой уравнение для определения спектра.

Частное решение

Система уравнений (8) имеет решение

$$G_p = \delta_{p,0}, \quad R_p = \widetilde{R}_p = 0.$$

Подстановка этого решения в уравнения (21) для решений уравнений в вариациях (28) с учетом (22)

$$A_l = \frac{1}{L_1 L_2^2} l \delta R_{0,l}, \quad B_l = \frac{1}{L_1 L_2^2} l \delta \widetilde{R}_{0,l}$$

приводит к системе линейных уравнений относительно $A_{1,l}$, $B_{1,l}$, которая может быть записана в виде

$$Q_l X_l = 0,$$

где

$$Q_l = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{-l} + \widetilde{\varepsilon}_0 + \lambda - \dfrac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2} & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}_l + \widetilde{\varepsilon}_0 - \lambda - \dfrac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2} \end{pmatrix},$$
$$X_l = \begin{pmatrix} A_{1,l} \\ B_{1,l} \end{pmatrix}.$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы Q_l

$$\det Q_l = \left(\widetilde{\varepsilon}_{-l} + \widetilde{\varepsilon}_0 + \lambda - \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2} \right) \left(\widetilde{\varepsilon}_l + \widetilde{\varepsilon}_0 - \lambda - \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2} \right) = 0$$

находим соответствующий спектр квазичастиц

$$\lambda_{1,l} = \widetilde{\varepsilon}_l + \widetilde{\varepsilon}_0 - \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2}, \quad \lambda_{2,l} = -\widetilde{\varepsilon}_{-l} - \widetilde{\varepsilon}_0 + \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2}.$$

Учитывая, что

$$\widetilde{\varepsilon}_l = \frac{\hbar^2}{2m} (k - l)^2 - \frac{\Omega}{2},$$

получим

$$\lambda_{1,l} = \frac{\hbar^2 l(l - 2k)}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - \Omega - \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2},$$
$$\lambda_{2,l} = -\frac{\hbar^2 l(l + 2k)}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{m} + \Omega + \frac{V_0 l^2}{L_1 L_2^2}.$$

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ковалю за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. **11**, № 1. С. 77; J. Phys. 1947. **9**. P. 23.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. М., 2000.
3. *Maslov V.P.* // Russian J. Math. Phys. 2002. **9**, N 4. P. 437.
4. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
5. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2005. **143**, № 3. С. 307.

Mathematical model for antisymmetric solutions of N-particle Schrödinger equation

D. S. Golikov

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: dmitriy.golikov@gmail.com.

Equations for mathematical model system of fermions are considered. Equations for spectrum are determined from the system of variational equations. The eigenvalues of the system of variation equations are defined for a particular solution.

PACS: 67.10.Fj.
Keywords: quantum statistics, quantum model system, ultrasecond quantization, asymptotic, variational equation, excitation energy spectrum, interaction potential, Fermi particle.
Received 1 July 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2009).

Сведения об авторе: Голиков Дмитрий Сергеевич — к. ф.-м. н., научн. сотр.; тел.: 939-12-90, e-mail: dmitriy.golikov@gmail.com.