

Кинетика охлаждения гранулярного газа вязкоупругих частиц

А. С. Бодрова^a, Н. В. Бриллиантов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физики полимеров и кристаллов. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ^a bodrova@polly.phys.msu.ru

В работе исследована эволюция гранулярного газа вязкоупругих частиц в состоянии однородного охлаждения. Найдена функция распределения по скоростям частиц газа и зависимость средней кинетической энергии частиц (гранулярной температуры) от времени. Установлено заметное отклонение функции распределения от распределения Максвелла и немонотонный характер ее эволюции. Построена теория возмущений по малому диссипативному параметру и получены явные аналитические выражения для асимптотической зависимости от времени функции распределения по скоростям и температуры гранулярного газа.

PACS: 47.45.Ab.

Ключевые слова: кинетическая теория газов, гранулярный газ, диссипативный газ, функция распределения по скоростям, коэффициент восстановления, вязкоупругие частицы.

Статья поступила 04.06.2008, подписана в печать 29.09.2008.

Введение

Гранулярные среды представляют собой совокупность макроскопических частиц размером от доли микрон до метров. Они широко распространены в природе. Примерами могут служить пудры, порошки, песок, гравий [1]. Наличие сил трения в этих системах приводит к появлению целого ряда необычных свойств: при слабом внешнем воздействии они сохраняют форму подобно твердым телам, однако под действием значительной нагрузки в гранулярных средах могут возникать потоки, подобные потокам в жидкости [2]. Разреженные гранулярные системы называются гранулярными газами [3–7]. Ими являются такие астрофизические объекты, как пылевые облака, планетные кольца, в том числе кольца Сатурна [5–6].

При соударении гранул часть их кинетической энергии переходит в энергию теплового движения молекул, входящих в состав гранулы [3]. Величина этой потери может быть охарактеризована коэффициентом восстановления ε [3]

$$\varepsilon = \frac{|(\mathbf{v}'_{12}\mathbf{e})|}{|(\mathbf{v}_{12}\mathbf{e})|}.$$

Здесь $\mathbf{v}_{12}$ и $\mathbf{v}'_{12}$ — относительные скорости частиц до и после соударения соответственно, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, соединяющий центры частиц. Для простоты предполагается, что все частицы имеют сферическую форму.

Зачастую для упрощения вычислений коэффициент восстановления ε полагается равным постоянной величине, не зависящей от относительной скорости соударяющихся гранул. Однако это противоречит экспериментальным данным [9–11] и не подтверждается теоретическим анализом [12]. Путем интегрирования уравнений Ньютона для соударяющихся вязкоупругих частиц, сила взаимодействия между которыми зависит от расстояния между центрами и относительной скорости частиц, в соответствии с законом вязкоупругого взаимодействия [3, 13] можно получить следующую зависимость коэффициента восстановления от относительной скорости частиц при ударе [3, 14]:

$$\varepsilon = C_0 - C_1\delta'(t)(c_{12}\mathbf{e})^{1/5} + C_2\delta'^2(t)(c_{12}\mathbf{e})^{2/5} \mp \dots, \quad (1)$$

где $C_0 = 1$, C_1, C_2 — численные коэффициенты порядка единицы [3], $\delta'(t) = \delta(u(t))^{1/10}$, $u(t) = T(t)/T(0)$ — относительная температура газа, δ — малый параметр, характеризующий диссипацию энергии частиц (его зависимость от параметров материала можно найти в [3]), $c_{12} = \mathbf{v}_{12}/v_T$ — безразмерная относительная скорость, $v_T = 2T(t)/m$ — среднеквадратичная скорость, m — масса частицы. Под температурой гранулярного газа $T(t)$ подразумевают среднюю кинетическую энергию трансляционного движения гранулы

$$\frac{3}{2}nT = \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \tilde{f}(\mathbf{v}, t),$$

где n — концентрация газа, $\tilde{f}(\mathbf{v}, t)$ — функция распределения частиц по скоростям. Ниже мы используем ее скейлинговую форму

$$\tilde{f}(\mathbf{v}, t) = \frac{n}{v_T^3(t)} \tilde{f}(\mathbf{c}, t).$$

В силу диссипативного характера межчастичных взаимодействий функция распределения газа по относительным скоростям $\tilde{f}(\mathbf{c}, t)$ заметно отличается от максвелловского распределения $\varphi(\mathbf{c}) = \pi^{-3/2} \exp(-c^2)$, типичного для обычных молекулярных газов. Если диссипация не слишком велика, это отклонение может быть описано с помощью разложения функции распределения в ряд по полиномам Сонина [15–16]:

$$\tilde{f}(\mathbf{c}, t) = \varphi(c) \left(1 + \sum a_p(t) S_p(c^2) \right). \quad (2)$$

Из определения температуры следует, что коэффициент при первом полиноме $a_1(t) = 0$ [3]. В литературе часто ограничиваются разложением в ряд с удержанием членов не выше второго порядка. В работе [17] было сделано предположение о том, что поведение коэффициентов в разложении (2) подчиняется степенной зависимости:

$$a_k \sim \lambda^k, \quad (3)$$

где λ — некоторый малый параметр, физическая природа которого в [17] не обсуждалась. Однако в [18] было показано, что для гранулярных газов с постоянным коэффициентом восстановления коэффициент a_3 оказывается

сравнимым по порядку величины с a_2 , что ставит под сомнение гипотезу (3). Как уже отмечалось выше, предположение о постоянстве коэффициента восстановления противоречит экспериментальным данным. Поэтому целью настоящей работы является анализ функции распределения и температуры гранулярного газа вязкоупругих частиц с коэффициентом восстановления (1) и в том числе проверка справедливости гипотезы (3) для данной системы. Преимуществом модели вязкоупругих частиц является также явная зависимость исследуемых величин от малого параметра диссипации δ .

Расчет коэффициентов a_2 и a_3

Уравнение Больцмана для функции распределения газа по скоростям имеет вид [19]

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_1, t)}{\partial t} = g_2(\sigma) I(f, f), \quad (4)$$

где $I(f, f)$ — интеграл столкновений, $g_2(\sigma)$ — парная корреляционная функция, которая учитывает возрастающую частоту столкновений частиц за счет их исключенного объема и соответствующих пространственных корреляций [20], σ — диаметр частиц. Для относительных скоростей удобно ввести безразмерный интеграл столкновений $\tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f})$, связанный с обычным интегралом столкновений соотношением $I(f, f) = \sigma^2 n^2 v_T^{-2} \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f})$ [3]:

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}, \tilde{f}) = \int d\mathbf{n}_2 \int d\mathbf{e} \Theta(-\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{e}) |\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{e}| \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{f}(\mathbf{n}_1, t) \tilde{f}(\mathbf{n}_2, t) - \tilde{f}(\mathbf{n}_1, t) \tilde{f}(\mathbf{n}_2, t) \right), \end{aligned}$$

где $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Вводя моменты безразмерного интеграла столкновений

$$\mu_p = - \int d\mathbf{c}_1 c_1^p \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f})$$

и подставляя в уравнение Больцмана (4) функцию распределения по скоростям (2), можно получить следующую систему уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{\mu_2}{3} \left(3 + c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} \right) \tilde{f}(c_1, t) + B^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(c_1, t) = \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f}), \\ \frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3} B T \mu_2. \end{cases}$$

Здесь $B = \sqrt{u(t)/(8\pi)} \tau_c^{-1}(0)$, где мы ввели $\tau_c^{-1} = 4\sqrt{\pi} g_2(\sigma) \sigma^2 n \sqrt{T(0)/m}$ — среднее время свободного пролета частиц в газе [20].

Вводя безразмерное время $\tau = t/\tau_c$, умножая обе части уравнения (4) на c_1^p и интегрируя по c_1 , легко получить систему уравнений для нахождения коэффициентов при полиномах Сонина a_2 , a_3 и относительной температуры u

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\frac{\sqrt{2}\mu_2}{6\sqrt{\pi}} u^{3/2}, \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \mu_2 (1 + a_2) \sqrt{u} - \frac{\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}} \mu_4 \sqrt{u}, \\ \frac{da_3}{d\tau} &= \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} \mu_2 (1 - a_2 + a_3) - \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{\pi}} \mu_4 \sqrt{u} + \frac{2\sqrt{2u}}{105\sqrt{\pi}} \mu_6, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= (6.49 + 0.05a_2^2 + 1.56a_2 + 0.10a_3 + 0.01a_3^2 + \\ &+ 0.04a_2a_3)\delta'(t) + (-0.14a_3 - 0.01a_3^2 - 0.07a_2^2 - 9.29 - \\ &- 0.05a_2a_3 - 2.76a_2)\delta''(t) + O(\delta^3(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= (0.05a_3^2 - 2.51a_3 + 10.03a_2 + 0.31a_2^2 + 0.16a_2a_3) + \\ &+ (-6.50a_3 + 36.32 - 0.29a_2^2 - 0.14a_2a_3 - 0.01a_3^2 + \\ &+ 46.85a_2)\delta'(t) + (0.03a_3^2 - 100.66a_2 + 0.59a_2^2 + 0.25a_2a_3 + \\ &+ 16.09a_3 - 71.50)\delta''(t) + O(\delta^3(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_6 &= (112.80a_2 - 84.60a_3 - 0.82a_2a_3 + 0.02a_3^2 - 4.93a_2^2) + \\ &+ (16.75a_2^2 - 245.02a_3 + 633.78a_2 + 209.94 + 0.26a_3^2 + \\ &+ 2.23a_2a_3)\delta'(t) + (-1718.36a_2 - 48.53a_2^2 - 0.45a_3^2 - 525.04 + \\ &+ 717.54a_3 - 4.85a_2a_3)\delta''(t) + O(\delta^3(t)). \end{aligned}$$

В системе (5) для краткости мы привели полное выражение для численных коэффициентов только в первых двух уравнениях, ограничившись их десятичной формой в последующих соотношениях. Аналитическое решение системы (5) может быть получено с помощью теории возмущений при разложении $u(\tau)$, $a_2(\tau)$ и $a_3(\tau)$ в ряд по малому параметру δ : $u = u_0 + \delta u_1 + \dots$, $a_2 = a_{20} + \delta a_{21} + \dots$, $a_3 = a_{30} + \delta a_{31} + \dots$. В нулевом приближении по δ решение системы (5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-5/3}, \\ a_{20}(\tau) &= A_1 \exp \left(\frac{-149 + \sqrt{2041}}{210} \tau \right) + \\ &+ A_2 \exp \left(\frac{-149 - \sqrt{2041}}{210} \tau \right), \\ a_{30}(\tau) &= A_1 \frac{-37 + \sqrt{2041}}{28} \exp \left(\frac{-149 + \sqrt{2041}}{210} \tau \right) + \\ &+ A_2 \frac{-37 - \sqrt{2041}}{28} \exp \left(\frac{-149 - \sqrt{2041}}{210} \tau \right), \end{aligned}$$

где $\tau_0^{-1} = 0.56\delta$, A_1, A_2 — произвольные константы, зависящие от начальных условий. В случае $a_{20}(0) = 0$, $a_{30}(0) = 0$ коэффициенты разложения функции распределения по полиномам Сонина в нулевом приближении по δ равны нулю на всем временном диапазоне: $a_{20}(\tau) = 0$, $a_{30}(\tau) = 0$.

В первом приближении $a_2^1 = a_{20} + a_{21}\delta$, $a_3^1 = a_{30} + a_{31}\delta$ система (5) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = -2.67\tau_0^{-1} u_0^{\frac{3}{2}} u_1 + 1.67\tau_0^{-1} u_0^{\frac{17}{10}} q_1 - \\ - u_0^{\frac{8}{5}} \tau_0^{-1} (0.40a_{21} + 0.03a_{31}), \\ \frac{da_{21}}{d\tau} = -0.22u_0^{\frac{3}{2}} + \sqrt{u_0}(-0.53a_{21} + 0.13a_{31}), \\ \frac{da_{31}}{d\tau} = -0.02u_0^{\frac{3}{2}} + \sqrt{u_0}(0.11a_{21} + 0.89a_{31}). \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему (6) при $\tau \rightarrow \infty$, можно получить следующие асимптотические выражения для относительной

температуры $u(\tau)$ и коэффициентов $a_2(\tau)$ и $a_3(\tau)$ в линейном приближении по δ :

$$u^1(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-5/3} + 2.56\delta \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-11/6}, \quad (7)$$

$$a_2^1(\tau) = -0.44\delta \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1/6}, \quad (8)$$

$$a_3^1(\tau) = -0.08\delta \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1/6}. \quad (9)$$

Второй (8) и третий (9) коэффициенты имеют одинаковую асимптотическую зависимость от времени и одинаковый порядок малости по диссипативному параметру δ . Следовательно, гипотеза (3), изложенная в работе [17], не подтверждается. Отношение коэффициентов, найденное в асимптотическом пределе $\tau \rightarrow \infty$ для малых δ , составляет $a_3^1/a_2^1 \approx 0.18$. Это заметно превосходит обычную погрешность теории однородного охлаждения гранулярного газа частиц с постоянным коэффициентом охлаждения (без учета a_3), которая согласуется с результатами компьютерного моделирования с точностью

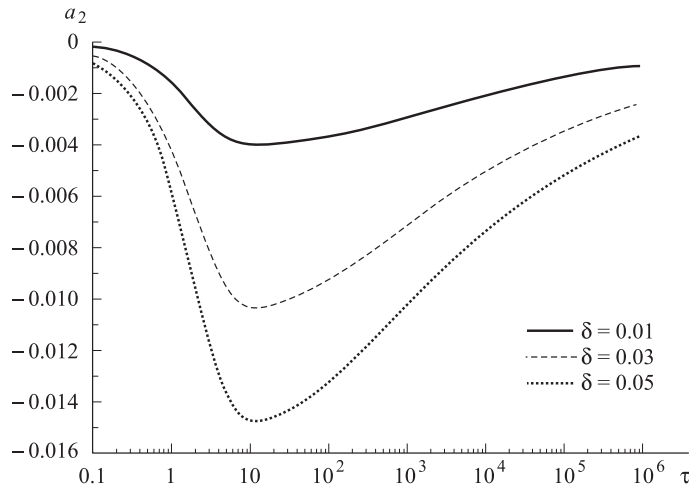


Рис. 1. Второй коэффициент в разложении функции распределения частиц по скоростям по полиномам Сонина $a_2(\tau)$ при $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$

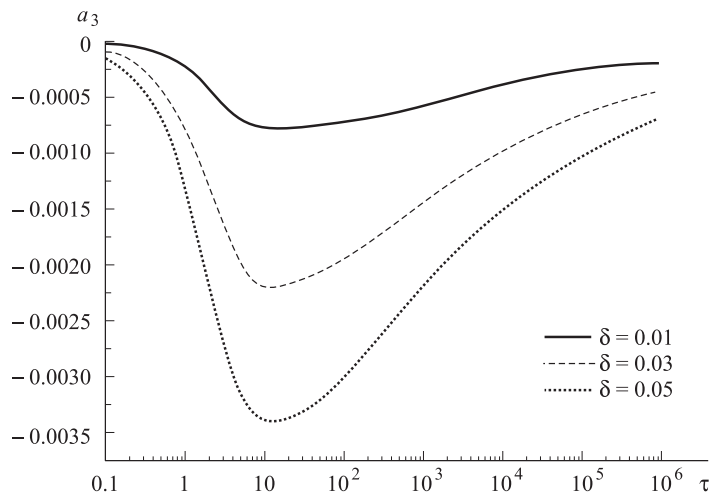


Рис. 2. Третий коэффициент в разложении функции распределения частиц по скоростям по полиномам Сонина $a_3(\tau)$ при $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$

2–3% [3, 21]. Таким образом, третий коэффициент также необходимо учитывать в теоретических расчетах. При больших δ , при которых линейное приближение нарушается, отношение третьего и второго коэффициентов может возрасти [18]. Точное решение системы (5) было получено численно при различных значениях малого диссипативного параметра δ . Предполагалось, что в начальный момент времени система (5) подчиняется распределению Максвелла, т.е. $a_2(0) = 0$, $a_3(0) = 0$. Зависимости второго и третьего коэффициентов в разложении по полиномам Сонина от времени $a_2(\tau)$ и $a_3(\tau)$ представлены на рис. 1, 2. Из рисунков видно, что $a_2(\tau)$ и $a_3(\tau)$ изначально отрицательны и уменьшаются с течением времени, достигая минимума. Величина $|a_2(\tau)|$ и $|a_3(\tau)|$ тем больше, чем больше параметр δ . Затем они продолжают увеличиваться, стремясь к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, функция распределения частиц по скоростям стремится к распределению Максвелла. Следует отметить, что при очень больших временах поведение системы становится существенно иным, поскольку происходит образование кластеров и вихрей [3]. В настоящей работе мы рассматриваем лишь начальный этап эволюции газа, называемый «состоянием однородного охлаждения», и предполагаем, что система не выходит из указанного режима. На рис. 3 проведено сравнение модулей второго и третьего коэффициентов в разложении функции распределения частиц по скоростям, по полиномам Сонина $|a_2(\tau)|$ и $|a_3(\tau)|$, полученных путем численного решения системы (5) при достаточно малом значении параметра $\delta = 0.001$ и модулей аналитических решений $|a_2^1(\tau)|$ (8) и $|a_3^1(\tau)|$ (9), полученных в линейном приближении по δ при $\tau \rightarrow \infty$. Асимптотики $|a_2^1(\tau)|$ и $|a_3^1(\tau)|$ хорошо согласуются с численными значениями при $\tau > 10000$. Зависимость относительной температуры u от времени τ изображена на рис. 4. Чем больше значение параметра δ , характеризующего величину диссипации, тем ниже температура и тем больше скорость охлаждения. Пунктирными линиями на рис. 4 показана асимптотика u_1 , полученная в линейном приближении по δ при $\tau \rightarrow \infty$ (7), которая хорошо согласуется с точным решением $u(\tau)$ спустя определенное время, тем большее, чем меньше δ .

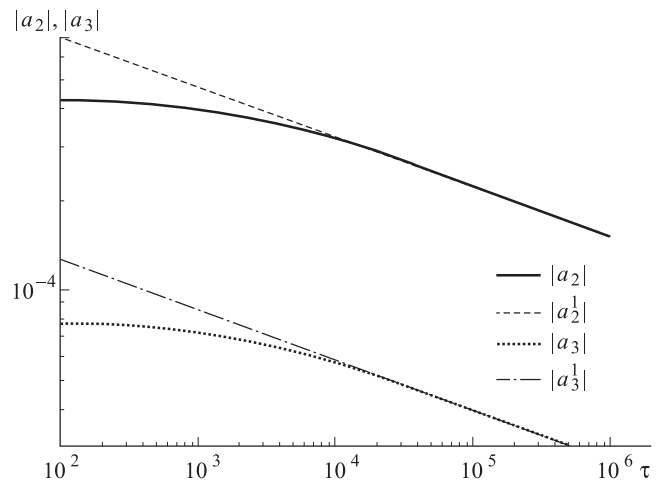


Рис. 3. Модули второго и третьего коэффициентов в разложении функции распределения частиц по скоростям по полиномам Сонина $|a_2(\tau)|$ и $|a_3(\tau)|$ при $\delta = 0.001$, а также их линейное приближение $|a_2^1(\tau)|$ и $|a_3^1(\tau)|$ в пределе $\tau \rightarrow \infty$

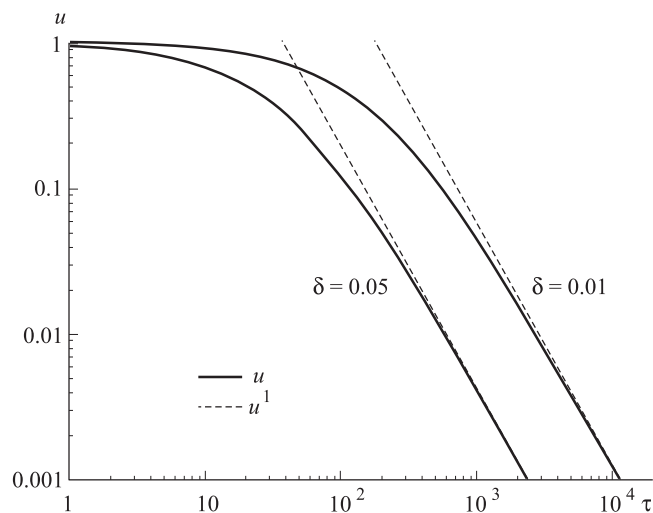


Рис. 4. Относительная температура $u(\tau)$ при $\delta = 0.01, 0.05$. Пунктирная линия отвечает модулю асимптотики $|u^1(\tau)|$ при $\tau \rightarrow \infty$ (7)

Заключение

В настоящей работе в рамках наиболее приближенной к реальности модели гранулярного газа вязкоупругих частиц (с зависящим от скорости коэффициентом восстановления) была исследована эволюция гранулярной температуры и функции распределения гранул по скоростям. При вычислении последней использовалось разложение по ортогональным полиномам Сонина и были получены второй и третий коэффициенты этого разложения. Интересно отметить, что релаксация функции распределения по скоростям к распределению Максвелла происходит на том же масштабе времени, на котором изменяется сама температура газа. Этим эволюция газа вязкоупругих частиц кардинально отличается от последней для гранулярного газа с постоянным коэффициентом восстановления, где релаксация скейлинговой функции распределения к стационарному состоянию происходит за время порядка нескольких соударения, в то время как характерное время охлаждения газа может быть значительно больше [3, 18].

Cooling kinetics of a granular gas of viscoelastic particles

A. S. Bodrova^a, N. V. Brilliantov

Department of Polymer and Crystal Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a bodrova@poly.phys.msu.ru.

Evolution of a granular gas of viscoelastic particles under the condition of inhomogeneous cooling is studied. Velocity distribution function of granular particles and the dependence of mean kinetic energy (granular temperature) on time are found; the latter shows essential deviation from the Maxwell distribution. Perturbation theory with respect to the small dissipation parameter is developed and analytical expressions for the asymptotic time dependence of velocity distribution function and the temperature of a granular gas are derived.

PACS: 47.45.Ab.

Keywords: kinetic theory of gases, granular gas, dissipative gas, velocity distribution function, restitution coefficient, viscoelastic particles.

Received 29 September 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2009).

Третий коэффициент имеет тот же порядок малости по величине диссипативного параметра, что и второй, таким образом, учет его для адекватного описания гранулярного газа представляется необходимым.

Список литературы

1. *Hinrichsen H., Wolf D.E.* // The Physics of Granular Media. Berlin, 2004.
2. *Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P.* // Rev. Mod. Phys. 1996. **68**. P. 1259.
3. *Brilliantov N.V., Pöschel T.* Kinetic Theory of Granular Gases. Oxford, 2004.
4. *Barrat A., Trizac E., Ernst M.H.* // J. Phys. Cond. Matt. 2005. **17**. P. 2429.
5. *Pöschel T., Luding S.* Granular Gases. Lecture Notes in Physics. Berlin, 2001. **564**.
6. *Poeschel T., Brilliantov N.V.* Granular Gas Dynamics. Lecture Notes in Physics. Berlin, 2003.
7. *Goldhirsch I.* // Ann. Rev. Fluid. Mech. 2003. **35**. P. 267.
8. *Greenberg R., Brahic A.* Planetary Rings. Tucson, 1984.
9. *Goldsmith W.* The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids. L., 1960.
10. *Bridges F.G., Hatzes A., Lin D.N.C.* // Nature. 1984. **309**. P. 333.
11. *Kuwabara G., Kono K.* // J. Appl. Phys. Part 1. 1987. **26**. P. 1230.
12. *Ramirez R., Pöschel T., Brilliantov N.V.* // Phys. Rev. E. 1999. **60**. P. 4465.
13. *Brilliantov N.V., Spahn F., Hertzsch J.-M., Poeschel T.* // Phys. Rev. E. 1996. **53**. P. 5382.
14. *Schwager T., Pöschel T.* // Phys. Rev. E. 1998. **57**. P. 650.
15. *Goldshstein A., Shapiro M.* // J. Fluid Mech. 1995. **282**. P. 75.
16. *van Noije T.P.C., Ernst M.H.* // Granular Matter. 1998. **1**. P. 57.
17. *Huthmann M., Orza J.A., Brito R.* // Granular Matter. 2000. **2**. P. 189.
18. *Brilliantov N.V., Pöschel T.* // Europhys. Lett. 2006. **74**. P. 424.
19. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М., 1979.
20. *Бриллиантов Н.В., Ревокатов О.П.* Молекулярная динамика неупорядоченных сред. М., 1996.
21. *Bruto R., Ernst M.H.* // Europhys. Lett. 1998. **43**. 497.

Сведения об авторах

1. Бодрова Анна Сергеевна — аспирантка; тел.: 939 51 56, e-mail: bodrova@poly.phys.msu.ru.

2. Бриллиантов Николай Васильевич — д. ф.-м. н., вед. научн. сотр.; тел.: 939 51 56, e-mail: nbrillia@poly.phys.msu.ru.