

Численное моделирование движения крутильных весов в задаче измерения ньютоновской гравитационной константы

В. К. Милуков^{1а}, Т. Чэнь¹, Дж. Луо², А. П. Миронов¹

¹Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга МГУ.
Россия, 119991, Москва, Университетский пр-т, д. 13. E-mail: ^а milyukov@sai.msu.ru.

²Huazhong University of Science and Technology, People Republic of China

Статья поступила 11.07.2008, подписана в печать 19.11.2008.

Выполнено численное моделирование движения крутильных весов с пятью степенями свободы. Показано, что маятниковые колебания возбуждаются действующим случайным шумом сейсмического происхождения и происходят с переменной во времени амплитудой. Показано также, что нелинейные связи между маятниковыми и крутильными степенями свободы приводят к появлению комбинационных колебаний. Рассмотрены пути их эффективного подавления.

Ключевые слова: гравитационная постоянная, крутильные весы, численное моделирование.

УДК: 521.94:534.521. PACS: 04.08.Cc, 02.60.Cb.

Введение

Таблица 1

Традиционным инструментом для выполнения тонких гравитационных экспериментов, в первую очередь, измерения ньютоновской гравитационной константы G , являются крутильные весы [1–17]. В силу слабости гравитационного взаимодействия точность определения константы G существенно ниже точности других фундаментальных констант. Значение ньютоновской гравитационной постоянной, введенное CODATA в 2006 г., основано на экспериментальных данных, доступных на этот период, и равно $G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ с относительной ошибкой 100 ppm (относительная ошибка в единицах part per million, т.е. $100 \cdot 10^{-6}$).

Новые технологические подходы и оптимизация конфигурации экспериментальных установок показывают, что гравитационная постоянная может быть определена на уровне точности в 15–40 ppm. Именно такой точности планируется достичь в эксперименте HUST (Huazhong University of Science and Technology) в Китае. Тем не менее имеется ряд проблем, которые должны быть решены для достижения указанной цели. Одна из таких проблем — точность определения периода собственных колебаний крутильных весов. Крутильные весы представляют собой сложную систему со многими степенями свободы, и вследствие нелинейной связи между ними возникают колебания на так называемых комбинационных модах, что приводит к возмущению основной крутильной моды и как следствие к большой ошибке определения ее периода. Цель настоящей работы — анализ движения крутильных весов с пятью степенями свободы под воздействием случайных помех.

1. Крутильные весы с пятью степенями свободы

Крутильные весы, которые используются в эксперименте HUST по новому измерению G , представляют собой позолоченную ситалловую прямоугольную пластину (брусок), подвешенную на тонкой отожженной вольфрамовой нити (рис. 1, а). В верхней части вольфрамовой нити укреплен магнитный демпфер, служащий для подавления маятниковых колебаний крутильных весов, а также эффектов нелинейной связи различных колебательных мод. Основные параметры крутильных весов приведены в табл. 1.

Параметры крутильных весов

Масса бруска m	63.351856 ± 0.00001 г
Длина бруска b	9.14245 ± 0.00002 см
Высота бруска h	2.62867 ± 0.00004 см
Толщина бруска w	1.20194 ± 0.00001 см
Расстояние от центра бруска до точки подвеса l_0	3.36 ± 0.00002 см
Нить подвеса (длина l / диаметр d)	89 см / 25 мкм
Крутильная жесткость K_e	$6.17 \cdot 10^{-2}$ дин·см

Для описания динамики крутильных весов введем три системы координат (рис. 1, б). Неподвижную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$, начало которой расположено в точке подвеса крутильной системы O и относится к некоторому ее фиксированному значению. Подвижную систему координат O_1XYZ , оси которой в любой момент времени параллельны осям ξ, η, ζ . Третья система координат $O_1X_1Y_1Z_1$ жестко связана с крутильными весами. Начало двух последних систем координат точка O_1 является точкой крепления бруска к нити. Центр инерции крутильных весов расположен в точке O_2 , на расстоянии l_0 от точки O_1 . На точку подвеса O действует флуктуационная сила (сейсмический шум), вызывающая случайные смещения точки подвеса $\xi(t), \eta(t)$ и $\zeta(t)$. Флуктуационная сила действует также непосредственно на крутильный брусок (например, флуктуации остаточного газа в камере прибора, вариации температуры и т.д.), которая может вызывать случайный поворот системы на угол $\psi(t)$.

В такой постановке крутильные весы представляют собой систему с пятью степенями свободы, которые обозначены соответственно $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, и θ_5 . Параметры θ_1 и θ_4 представляют вращения вокруг осей X_1 и ξ и описывают маятниковые колебания в плоскости $\eta\zeta$. Параметры θ_2 и θ_5 представляют вращения вокруг осей Y_1 и η и описывают маятниковые колебания в плоскости $\xi\zeta$. Угол θ_3 представляет основные крутильные колебания системы (вращение вокруг нити подвеса).

Система уравнений, описывающая движение крутильных весов, представляет собой систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих также флук-

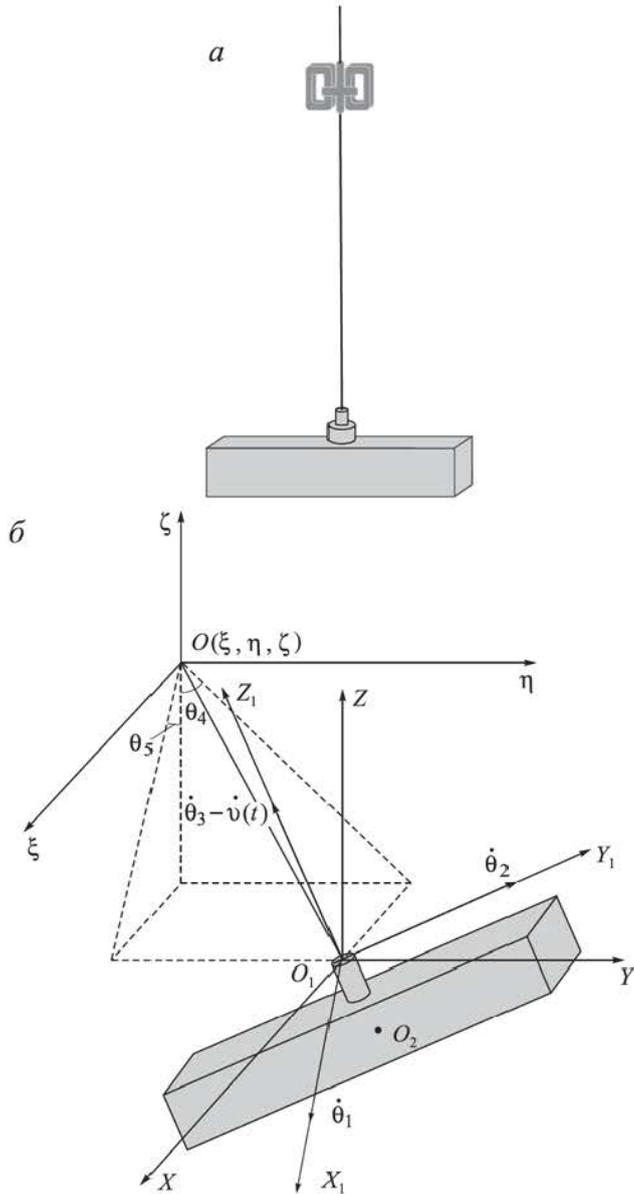


Рис. 1. а — Крутильные весы, которые используются в эксперименте HUST. б — Схематическое изображение крутильных весов, применяемых в эксперименте. Координаты θ_1 и θ_4 описывают маятниковые колебания в плоскости $\eta\zeta$, а координаты θ_2 и θ_5 в плоскости $\eta\xi$. Крутильные колебания описываются координатой θ_3

туационные члены [2]

$$(J_x + ml_0^2)\ddot{\theta}_1 + \tau_1^{-1}(J_x + ml_0^2)\dot{\theta}_1 + mgl_0\theta_1 = -mll_0\ddot{\theta}_4 - ml_0\ddot{\eta}_0(t) + (J_y - J_x)\ddot{\theta}_2\theta_3, \quad (1)$$

$$(J_y + ml_0^2)\ddot{\theta}_2 + \tau_2^{-1}(J_y + ml_0^2)\dot{\theta}_2 + mgl_0\theta_2 = mll_0\ddot{\theta}_5 + ml_0\ddot{\xi}_0(t) + (J_y - J_x)\dot{\theta}_1\theta_3, \quad (2)$$

$$J_z\ddot{\theta}_3 + \tau_3^{-1}J_z\dot{\theta}_3 + K_e\theta_3 = (J_y - J_x)(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2)\theta_3 + 2(J_y - J_x)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\theta_3^2 - \frac{2}{3}(J_y - J_x)(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2)\theta_3^3 - 2J_z\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (J_x - J_y - 2J_z)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + K_e\vartheta(t), \quad (3)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_4 + \tau_4^{-1}ml^2\dot{\theta}_4 + mgl\theta_4 = -mll_0\dot{\theta}_1 - ml\ddot{\eta}_0(t), \quad (4)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_5 + \tau_5^{-1}ml^2\dot{\theta}_5 + mgl\theta_5 = mll_0\dot{\theta}_2 - ml\ddot{\xi}_0(t). \quad (5)$$

Здесь m — масса крутильных весов; l — длина крутильной нити; l_0 — расстояние от точки крепления бруска к крутильной нити (точки O_1) до центра инерции крутильных весов; J_x, J_y, J_z — моменты инерции крутильных весов соответственно относительно осей X_1, Y_1 и Z_1 ; τ_i — постоянные времена для каждой степени свободы; K_e — упругая постоянная крутильных весов (крутильная «жесткость»).

Попарно уравнения (1) и (4), (2) и (5) описывают маятниковые колебания в двух перпендикулярных плоскостях $\xi\zeta$ and $\eta\zeta$. Уравнение (3) описывает крутильные колебания. Аналитическое решение этой системы уравнений было получено в [17]. Правые части каждого уравнения содержат нелинейные члены, связывающие колебания по данной координате со всеми остальными координатами. Таким образом, колебания по любой из маятниковых степеней свободы приводят к изменению характера как основных крутильных колебаний, так и колебаний по другим маятниковым степеням свободы. Решение строилось в предположении, что флуктуационные воздействия описываются стационарными случайными функциями с нулевыми средними значениями, распределенными по нормальному закону.

В настоящей работе было получено численное решение данной системы уравнений. На основании этого решения выполнено моделирование движения крутильных весов.

2. Маятниковые колебания

Маятниковые колебания в отсутствие шума имеют характер затухающего колебательного процесса и в принципе затухают за достаточно короткое время (в зависимости от добротности этих колебаний). Для исследования характера возбуждения маятниковых колебаний действующим на подвес сейсмическим шумом были построены численные решения уравнений маятниковых колебаний — временные реализации по всем маятниковым степеням свободы.

При амплитуде сейсмического шума в полосе маятниковых частот (0.1–10 Гц) порядка 10^{-3} мГал (относительная амплитуда 10^{-9}) маятниковые колебания еще носят затухающий характер. При возрастании амплитуды на порядок (относительная амплитуда 10^{-8}) в поведении маятниковых колебаний начинают появляться устойчивые во времени моды. Наконец, при возрастании амплитуды еще на порядок (10^{-7}) колебания по каждой из маятниковых степеней свободы представляют собой устойчивые колебания с меняющейся случайным образом во времени амплитудой. Маятниковые колебания в плоскости $\eta\zeta$ приведены на рис. 2.

Был исследован спектральный состав маятниковых колебаний. Для этого временные реализации маятниковых колебаний были подвергнуты спектральному анализу. На рис. 3 представлен спектр маятниковых колебаний в плоскости $\eta\zeta$. Собственными колебаниями в этой плоскости являются колебания на частотах 0.52 и 13.7 Гц. Колебания на частоте 3.44 Гц появились вследствие нелинейной связи с колебаниями в плоскости $\xi\zeta$. Спектральная амплитуда возмущающих колебаний на три порядка меньше, чем спектральные амплитуды собственных колебаний.

Значения собственных маятниковых частот, определенных из спектрального анализа и теоретически рассчитанных, приведены в табл. 2.

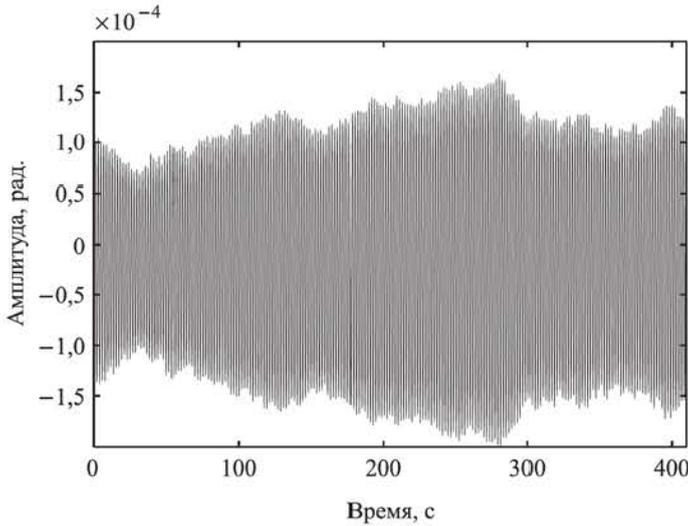


Рис. 2. Маятниковые колебания в вертикальной плоскости $\eta\zeta$, возбужденные сейсмическим шумом с амплитудой ~ 0.1 мГал

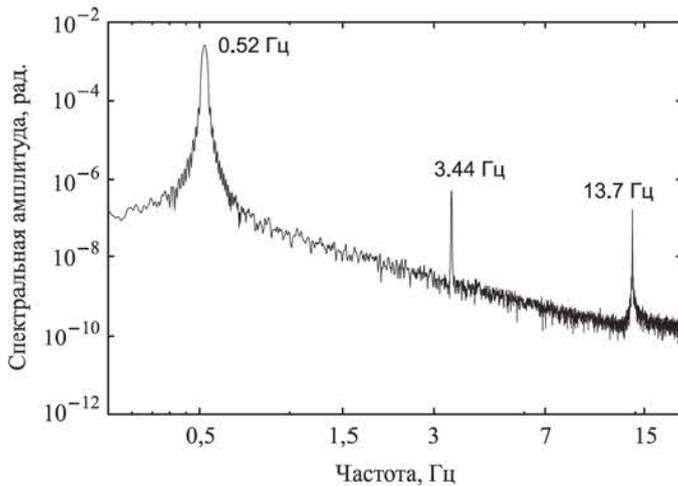


Рис. 3. Спектр маятниковых колебаний в плоскости $\eta\zeta$. Пики на частотах 0.52 и 13.7 Гц — собственные колебания в данной плоскости; пик на частоте 3.44 Гц — вынужденные колебания вследствие нелинейной связи с колебаниями в плоскости $\xi\zeta$

Таблица 2
Значения маятниковых частот, определенные из спектрального анализа и теоретически рассчитанные ($f_i = \omega_i/2\pi$, $i = 1, 2, 4, 5$)

	Плоскость $\xi\zeta$		Плоскость $\eta\zeta$	
	f_1	f_2	f_4	f_5
Спектр	13.67	3.435	0.52	0.52
Теория	11.19	3.39	0.5187	0.5185

Таким образом, маятниковые колебания в каждой вертикальной плоскости представляют собой биения двух случайных квазигармонических колебаний переменной амплитуды с характерными частотами, зависящими от геометрических параметров системы. Случайный характер маятниковых колебаний определяется действующим на подвес крутильных весов сейсмическим шумом. Маятниковые колебания существуют постоянно и в силу нели-

нейных связей между различными степенями свободы будут возмущать как маятниковые колебания в другой плоскости, так и крутильные колебания.

3. Крутильные колебания и комбинационные моды

Колебания по крутильной степени свободы описываются уравнением (3). Правая часть этого уравнения, являющаяся нелинейной комбинацией случайных квазигармонических маятниковых колебаний, будет также случайной функцией. Таким образом, правая часть уравнения определяет вынужденные колебания крутильных весов. Так как частоты этих колебаний являются линейной комбинацией маятниковых частот, то эти вынужденные колебания крутильных весов называются комбинационными модами.

Геометрическая конфигурация крутильных весов, параметры которых содержатся в табл. 1, характеризуется неравенством всех трех линейных размеров: $b \neq h \neq w$ и соответственно $J_x \neq J_y \neq J_z$. Крутильные весы с таким соотношением параметров будем называть несимметричными. Маятниковые частоты несимметричных крутильных весов также не совпадают друг с другом (табл. 2). Тем не менее, две из них, f_4 и f_5 , достаточно близки, их линейная комбинация будет определять низкочастотную комбинационную моду, которая может возмущать основные крутильные колебания.

На основе численного моделирования движения крутильных весов с пятью степенями свободы по построенным реализациям был сделан анализ спектрального состава крутильных колебаний. Один из таких спектров приведен на рис. 4. Наиболее интенсивная мода, выделяемая спектральным анализом, гармоника на частоте $1.74 \cdot 10^{-3}$ Гц, является собственной модой крутильных колебаний. Спектр содержит также ряд комбинационных мод. Комбинационные моды, определенные спектральным анализом, приведены в табл. 3. Комбинационные моды в диапазоне частот $2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-3}$ Гц наиболее близко расположены к основной крутильной моде, и, следовательно, могут ее возмущать, что может давать дополнительную ошибку в определение частоты крутильной моды. Поэтому задача высокоточного измерения частоты крутильных колебаний должна решаться в условиях максимального подавления комбинационных мод.

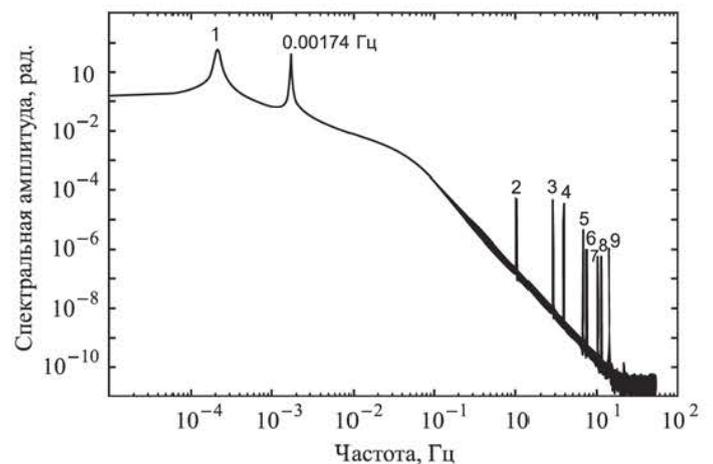


Рис. 4. Спектр крутильных колебаний для несимметричных крутильных весов. Пик на частоте $1.74 \cdot 10^{-3}$ Гц — собственная мода крутильных колебаний. Пики, помеченные индексами 1–8, представляют собой комбинационные моды (см. табл. 3)

Таблица 3

Значения комбинационных частот, определенные при спектральном анализе

	1	2	3	4	5	6	7	8
	Частота, Гц							
Несимметричные кр. веса	0.0002	1.037	2.856	3.893	7.340	10.200	11.233	14.090
Симметричные кр. веса		1.037		4.979	6.016	10.995		

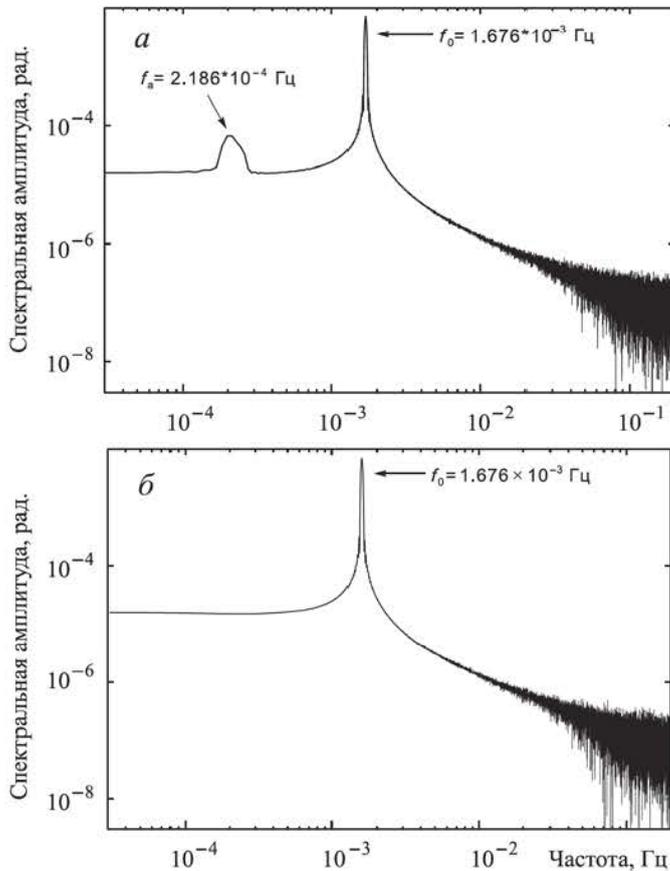


Рис. 5. *а* — Весы без магнитного демпфера. Пик на частоте $1.676 \cdot 10^{-3}$ Гц представляет собственные колебания крутильной моды. Пик на частоте $2.186 \cdot 10^{-4}$ Гц — комбинационная мода. *б* — Весы с магнитным демпфером. Комбинационная мода на частоте $2.186 \cdot 10^{-3}$ Гц эффективно подавлена

Традиционный путь подавления низкочастотных комбинационных мод — аппаратный. В конструкцию крутильных весов вводится специальное устройство, которое подавляет интенсивность движения крутильных весов по маятниковым степеням свободы и соответственно амплитуды комбинационных мод. Это так называемое амплитудное подавление. В экспериментальной установке HUST роль такого устройства играет магнитный демпфер (рис. 1, *а*). На рис. 5, *а* представлен спектр крутильных колебаний весов без магнитного демпфера, построенный по экспериментальным данным [17]. Пик на частоте $f_0 = 1.676 \cdot 10^{-3}$ Гц — основная крутильная мода. Пик на частоте $f_a = 2.186 \cdot 10^{-4}$ Гц — низкочастотная комбинационная мода. На рис. 5, *б* показан амплитудный спектр измеренных колебаний крутильных весов с магнитным демпфером. Пик на комбинационной частоте $2.186 \cdot 10^{-4}$ Гц практически исчез. Таким образом, амплитуда комбинационной моды была эффективно подавлена магнитным демпфером.

Нами предложен также другой путь подавления комбинационных мод — частотное подавление. Идея метода состоит в выборе геометрии крутильных весов таким образом, чтобы «сдвинуть» частоты комбинационных мод в область высоких частот и свести влияние комбинационных мод к минимуму. Симметричная конфигурация крутильных весов ($J_x = J_y \neq J_z$) приводит к вырождению системы по маятниковым степеням свободы, т.е. в этом случае маятниковые частоты в плоскостях $\eta\zeta$ и $\xi\zeta$ совпадают.

Для симметричной конфигурации крутильных весов правая часть уравнения (3) существенно упрощается:

$$J_z \ddot{\theta}_3 + \tau_3^{-1} J_z \dot{\theta}_3 + K_e \theta_3 = J_z \ddot{\theta}_1 \theta_2 + J_z \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + K_e \vartheta(t). \quad (6)$$

Соответственно количество комбинационных частот сводится к четырем (см. табл. 3). Как видно из таблицы, существенным моментом такой конфигурации крутильных весов является отсутствие комбинационных мод в низкочастотном диапазоне $2 \cdot 10^{-4} - 0.1$ Гц. Предложенный новый метод частотного подавления комбинационных мод во многих случаях может быть более эффективным традиционного амплитудного.

Заключение

В тонких гравитационных экспериментах с крутильными весами для достижения высокой точности измерений необходимо учитывать сложный характер движения крутильных весов, в частности появление комбинационных мод. Нами показано, что эффект комбинационных мод в поведении крутильных весов возникает непосредственно из-за нелинейного взаимодействия крутильной и маятниковых мод. Частоты комбинационных мод являются линейными комбинациями частот маятниковых колебаний. Маятниковые колебания возбуждаются действующим на подвес крутильных весов сейсмическим шумом. В принципе маятниковые колебания существуют постоянно, с меняющейся случайным образом амплитудой. Для эффективного подавления комбинационных мод могут быть использованы как амплитудный, так и частотный методы подавления.

Список литературы

1. Gillies G.T. // Rep. Prog. Phys. 1997. N 60. P. 151.
2. Сагитов М.У., Милюков В.К., Монахов Е.А. и др. // Доклады АН СССР. 1979. **245**, № 3. С. 567.
3. Luther G.G., Towler W.R. // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 121.
4. Michaelis W. et al. // Metrologia. 1995/96. **32**. P. 267.
5. Карагиоз О.В., Измайлов В.П. // Измерительная техника 1996. № 10. С. 3.
6. Bagley C.H., Luther G.G. // Phys. Rev. Lett. 1997. **78**. P. 3047.
7. Fitzgerald M.P., Armstrong T.R. // Meas. Sci. Technol. 1999. **10**. P. 439.
8. Jun Luo, Zhong-Kun Hu, Xiang-Hui Fu et al. // Phys. Rev. D. 1999. **59**. P. 042001.
9. Mohr P. // Advances in Quantum Chemistry. 1998. **30**. P. 77.

10. Gundlach J.H., Merkovich S.M. // Phys. Rev. Lett. 2000. **85**. P. 2869.
11. Quinn T.J., Speake C.C., Richmann S.J. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. **87**. P. 111101.
12. Schlamminger St., Holzschuh E., Kundig W. // Phys. Rev. Lett. 2002. **89**. P. 161102.
13. Mohr P.J., Taylor B.N. // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1999. **28**. P. 1713.
14. Armstrong T. R., Fitzgerald M.P. // Phys. Rev. Lett. 2003. **91**. P. 20110-1.
15. Schlamminger St. et al. // Phys. Rev. D. 2006. **74**. P. 25.
16. Milyukov V.K., Luo J. // Proc. of Intern. Symp. «Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements». St. Petersburg, 2008. P. 241.
17. Xiang-Dong Fan, Qi Liua, Milyukov V. et al. // Phys. Lett. A. 2008. **372**. P. 547.

Numerical modeling of the motion of torsion balance in the problem of measurement of the Newtonian gravitation constant

V. K. Milyukov^{1a}, Ch. Tao¹, J. Luo², A. P. Mironov¹

¹Sternberg State Institute of Astronomy, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

²Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China.

E-mail: ^amilyukov@sai.msu.ru.

Numerical modeling of the motion of the torsion balance with five degrees of freedom shows that oscillations along the swing degrees of freedom are excited by the random noise of a seismic origin, their amplitude varies in time. It was also shown that nonlinear relations between swing and torsion degrees of freedom lead to appearance of the coupling oscillations. Methods of effective suppressing these coupling modes are considered.

Keywords: Newtonian gravitation constant, torsion balance, numerical modeling.

PACS: 04.08.Cc, 02.60.Cb.

Received 11 July 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Милуков Вадим Константинович — д. ф.-м. н., зав. лабораторией; тел.: 939-16-34, e-mail: milyukov@sai.msu.ru.

2. Тао Чэн — студент; тел.: 939-53-27, e-mail: paitell@mail.ru.

3. Луо Джун — профессор, декан физического факультета Хуаджунского университета науки и технологии; тел.: +86-27-87556653, e-mail: junluo@mail.hust.edu.cn.

4. Миронов Алексей Павлович — мл. научн. сотр.; тел.: 939-16-34, e-mail: almir@list.ru.