Регуляризация давления Казимира в двумерных полевых моделях

Ю. С. Воронина[a], П. К. Силаев[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a]voronina-yulya@yandex.ru, [b]silaev@bog.msu.ru

Статья поступила 05.11.2008, подписана в печать 17.02.2009.

Рассмотрен способ вычисления давления Казимира с помощью регулярной части поверхностной функции Грина в двумерном случае. Предложен метод приближенного вычисления регулярной части поверхностной функции Грина с помощью ряда борновского типа. Данный метод проверен на задаче, для которой известен точный ответ.

Ключевые слова: эффект Казимира, вакуумные эффекты в квантовой теории поля, перенормировки в квантовой теории поля

УДК: 530.145. PACS: 03.70.+k.

Введение

Несмотря на то что впервые статья, посвященная эффекту Казимира, была опубликована 60 лет назад, проблема вычисления энергии Казимира для систем, заключенных в областях с нетривиальными границами или при наличии внешнего поля, до сих пор актуальна. Энергию Казимира можно разбить на два слагаемых: конечное и расходящееся. Так что перенормировка производится с помощью таких вычитательных процедур, которые устраняют расходящийся вклад в энергию. Одним из наиболее простых способов вычисления конечной энергии Казимира является определение разности между вакуумными энергиями системы при наличии и отсутствии границ [5, 7, 10]. Однако уже в одномерном случае при наличии внешнего поля этот метод оказывается неэффективным [11].

Для областей, ограниченных замкнутой поверхностью с ненулевой кривизной (например, задача для проводящей сферы), возникает проблема логарифмических расходимостей. В этом случае энергия Казимира вычисляется как сумма энергий внутренней и внешней областей, благодаря чему расходящиеся слагаемые, присутствующие в этих энергиях с обратными знаками, взаимно вычитаются [4, 5]. Однако в случае диэлектрического шара этот метод уже не приводит к конечному результату.

В настоящей работе предложен метод регуляризации и перенормировки давления Казимира в модели массивного скалярного поля, рассматриваемого в круге с нулевыми граничными условиями. Мы рассматриваем давление, а не энергию, поскольку последняя физическая величина определена с точностью до аддитивной постоянной, в то время как давление является однозначной величиной. Благодаря последнему обстоятельству при перенормировке давления выбор точки нормировки значительно упрощается [11]. После выделения конечной части в давлении можно вычислить и перенормированную энергию Казимира. Регуляризация давления Казимира будет производиться с помощью поверхностной функции Грина. Преимущество этого способа регуляризации заключается в том, что поверхностная функция Грина может быть построена различными способами, в том числе и приближенными.

Отметим, что, хотя двумерные задачи существенно отличаются от трехмерных, уже в двумерном случае мы сталкиваемся с теми же проблемами, которые возникнут в трехмерном случае, например с сингулярностью поверхностной функции Грина. Кроме того, как и в задаче для сферы, в рассматриваемой двумерной задаче также возникает проблема логарифмических расходимостей.

В первом разделе настоящей работы обсуждается вопрос о регуляризации давления Казимира с помощью регулярной части поверхностной функции Грина. Во втором разделе предлагается метод приближенного вычисления регулярной части поверхностной функции Грина. Этод метод проверяется на задаче в круге, для которой известно точное решение. В третьем разделе рассматривается второй способ разделения поверхностной функции Грина на регулярную и сингулярную части, а также сравниваются результаты точного и приближенного вычисления регулярной части для этого случая.

1. Регуляризация давления Казимира в двумерном случае

Рассмотрим массивное скалярное поле φ, определенное в круге радиуса $R=1$ с нулевыми граничными условиями. Вычислим давление Казимира в одной из точек этого круга. Введем полярную систему координат (r,ϕ), $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$, с началом в центре круга, в которой произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ будет иметь координаты (a,ϕ_a). Скалярное поле удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$\ddot{\varphi}-\Delta_{r,\phi}\varphi+m^2\varphi=0,$$

с наложенными граничными условиями

$$\varphi|_{r=1}=0.$$

Кроме того, поле $\varphi(r,\phi)$ должно удовлетворять естественному условию ограниченности $|\varphi|<\infty$.

Определим теперь давление, испытываемое границей в некоторой точке $(1,\phi)$. Выделим малый элемент окружности $d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\,d\sigma=\boldsymbol{n}\,d\phi$, содержащий эту точку, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к окружности в выбранной точке. На этот элемент границы действует только нормальная составляющая силы

$$df_n=(d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})=T^{ki}\,d\sigma_i\,n_k=(T^{ki}n_in_k)\,d\sigma.$$

Подставляя компоненты тензора энергии-импульса в явном виде, получим давление в выбранной точке

$$p(\phi)=\left\langle 0\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{n},\nabla\varphi)(\boldsymbol{n},\nabla\varphi)|_{r=1}\right|0\right\rangle=$$

$$= \left\langle 0 \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right|_{r=1} \right| 0 \right\rangle.$$

В двумерном случае, как и в одномерном [5, 11], давление в точке $(1, \phi)$ можно найти с помощью функции

$$p(\phi_x, \phi_y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} (\boldsymbol{n}, \nabla_{\boldsymbol{x}} S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\Big|_{x=1} d\kappa, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к границе круга, а $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{n}, \nabla_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))|_{y=1}$ — поверхностная функция Грина следующей краевой задачи:

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) - \kappa^2 u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad (2)$$

$$u(|\boldsymbol{x}| = 1) = 0. \quad (3)$$

Тогда $p(\phi) = p(\phi_x, \phi_y)|_{\phi_x = \phi_y = \phi}$.

Функция Грина задачи (2), (3) определяется равенством

$$G(x, \phi_x; y, \phi_y) = -\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\phi_x - \phi_y)} I_n(\kappa x) I_n(\kappa y) \frac{K_n(\kappa)}{I_n(\kappa)}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что, в отличие от одномерного случая, функция Грина рассматриваемой задачи на плоскости не является регулярной функцией, поскольку при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ функция $K_0(\kappa|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$ обращается в бесконечность.

Вычисляя теперь поверхностную функцию Грина, имеем

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \frac{e^{in(\phi_x - \phi_y)}}{2\pi} \frac{I_n(\kappa x)}{I_n(\kappa)}\Big|_{y=1} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi_x - \phi_y)}}{2\pi} \frac{I_n(\kappa x)}{I_n(\kappa)}.$$

Как и следовало ожидать, поверхностная функция Грина для этой задачи также не является регулярной функцией в рассматриваемой области, поскольку на границе круга, т. е. при $x = 1$, она обращается в дельта-функцию Дирака

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{x=y=1} = \delta(\phi_x - \phi_y).$$

Значит, при $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \to 0$ основной вклад в поверхностную функцию Грина будет давать ее сингулярная составляющая. Следовательно, задача регуляризации и перенормировки давления свелась не только к выделению расходящейся части в интеграле по κ в (1), как это было для одномерной задачи [11], но и к выделению сингулярной части в соответствующей поверхностной функции Грина. Разобьем поверхностную функцию Грина на регулярную и сингулярную части

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

так чтобы сингулярная часть определялась только заданной на границе точкой $\boldsymbol{y}$ и не зависела от остальных точек области, а регулярная часть определялась всей остальной областью. Это значит, что на границе круга должны выполняться равенства

$$S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{x=y=1} = \delta(\phi_x - \phi_y) - S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{x=y=1}. \quad (5)$$

Откуда видно, что $S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{x=y=1}$ следует выбирать так, чтобы она являлась решением краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца с однородным граничным условием (5). Это разделение является произвольным, и неопределенность снимается после выбора точки нормировки для регуляризованного давления.

Выберем регулярную и сингулярную части поверхностной функции Грина в виде

$$S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\kappa}{\pi} K_1 \left(\kappa \sqrt{1 + x^2 - 2x\cos(\phi_x - \phi_y)} \right) \times \\ \times \frac{1 - x\cos(\phi_x - \phi_y)}{\sqrt{1 + x^2 - 2x\cos(\phi_x - \phi_y)}}, \quad (6)$$

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\phi_x - \phi_y)} \frac{I_n(\kappa x)}{I_n(\kappa)} \left[\frac{1}{2} - \kappa K_n(\kappa) I_n'(\kappa) \right].$$

Заметим, что выбранная нами сингулярная часть совпадает с точной поверхностной функцией Грина для прямой, являющейся касательной к окружности в рассматриваемой граничной точке $\boldsymbol{y}$. Это связано с тем, что в двумерном случае, в отличие от трехмерного, разность между поверхностной функцией Грина для плоской границы и для гладкой границы с ненулевой кривизной оказывается конечной. Очевидно, что сингулярная часть (6) имеет особенность на границе. Выделим явно эту особенность, представив сингулярную часть поверхностной функции Грина в виде (5). Введем обозначения: $x - 1 = \epsilon \to 0$, $\phi_x - \phi_y = \alpha \sim 0$. Учитывая, что функция Макдональда при малом значении аргумента имеет особенность вида $K_1(z) \sim \frac{1}{z}$, имеем

$$S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{\kappa}{\pi} \frac{\epsilon + 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\kappa \left(\epsilon^2 + 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)} \right] = \delta(\alpha) + \frac{1}{2\pi}.$$

В результате получаем, что на границе области, т. е. при $x = 1$, регулярная и сингулярная части выглядят следующим образом:

$$S_b^{(s)}(\phi_x - \phi_y) = \delta(\phi_x - \phi_y) - S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y), \quad (7)$$

$$S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y) = -\frac{\kappa}{\pi} K_1 \left(2\kappa \left| \sin\left(\frac{\phi_x - \phi_y}{2} \right) \right| \right) \left| \sin\left(\frac{\phi_x - \phi_y}{2} \right) \right|.$$

Заметим, что по абсолютной величине функция $S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y)$ имеет максимум в точке $\phi_x = \phi_y$ и монотонно убывает с ростом разности $|\phi_x - \phi_y|$ на интервале $[0, \pi]$.

2. Построение борновского ряда и его проверка для простейших регулярной и сингулярной частей поверхностной функции Грина

Итак, поверхностную функцию Грина краевой задачи для уравнения Гельмгольца в круге с нулевым граничным условием удается вычислить аналитически. Однако существуют задачи, для которых вычислить эту функцию оказывается весьма затруднительным вследствие нетривиальности рассматриваемой области. Исследуем способ приближенного вычисления регулярной части. Регулярная часть поверхностной функции Грина удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2). Если на границе области известны значения регулярной части, тогда решение внутри области будет иметь вид

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \oint\limits_C S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) S^{(r)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\, dl_z. \quad (8)$$

Это решение можно переписать в виде суммы

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \oint\limits_C S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) S^{(r)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\, dl_z + \oint\limits_C S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) S^{(r)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\, dl_z. \quad (9)$$

Как уже упоминалось, в выборе $S^{(s)}$ и $S^{(r)}$ существует некоторый произвол. Оптимальный выбор этих функций будет реализован в том случае, если величина $\left|S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right|\big|_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C}$ оказывается минимальной насколько это возможно. Это означает, что вблизи границы наибольший вклад в поверхностную функцию Грина дает сингулярная часть. Тогда в первом приближении во второй части формулы (8) можно ограничиться первым слагаемым

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \approx \oint\limits_C S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) S^{(r)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, dl_z. \qquad (10)$$

Подставим теперь во второе слагаемое в формуле (9) вместо $S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ выражение (8). В результате получаем

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \oint\limits_C S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) S^{(r)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, dl_z + \\ + \oint\limits_C\oint\limits_C S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_1) S^{(r)}(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2) S^{(r)}(\boldsymbol{z}_2,\boldsymbol{y})\, dl_{z_1}\, dl_{z_2}.$$

Далее снова представляем поверхностную функцию Грина в виде суммы регулярной и сингулярной частей и т. д., получаем окончательно

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\oint\limits_C \cdots \oint\limits_C}_{m} S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_1) S^{(r)}(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2) \cdots S^{(r)}(\boldsymbol{z}_{m-1},\boldsymbol{z}_m) \times \\ \times S^{(r)}(\boldsymbol{z}_m,\boldsymbol{y})\, dl_{z_1} \cdots dl_{z_m} \qquad (11)$$

Поскольку мы рассматриваем краевую задачу для уравнения Гельмгольца с нулевым граничным условием, то поверхностная функция Грина этой задачи также обращается в нуль на границе. Следовательно, на границе области должно выполняться равенство

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C} = -S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C} \qquad (12)$$

всюду, за исключением точки $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. Таким образом, если в задаче можно предположить вид сингулярной части, то регулярная часть может быть найдена с помощью (11).

Проверим справедливость и вычислительную эффективность формулы (11) на примере краевой задачи в круге, для которой точное аналитическое решение регулярной части поверхностной функции Грина уже известно. Как и при точном решении этой задачи, рассмотренном в предыдущем разделе, выделим сингулярную часть поверхностной функции Грина, равную точной поверхностной функции Грина для границы, представляющей собой прямую, касательную к окружности в точке $\boldsymbol{y}$ (см. (6)). А поскольку справедливо равенство (12), кроме случая $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, то на границе круга регулярная часть совпадает с найденной ранее регулярной частью (7). Подставив теперь в формулу (10) сингулярную часть (6) и регулярную часть на границе области (7), получим выражение для регулярной части в первом приближении

$$S^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \approx \int\limits_0^{2\pi} S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})|_{z=1} \cdot S_b^{(r)}(\phi_z - \phi_y)\, d\phi_z. \qquad (13)$$

Итак, мы располагаем точным ответом для регулярной части на границе области, а также приближенным выражением для этой функции во всей области определения. Сравним теперь точный ответ и первое приближение для регулярной части на окружности. Полагая в (13) $x=1$ и учитывая вид сингулярной части на границе области (5), получаем регулярную часть на окружности в первом приближении

$$S_1^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|_{x=y=1} = S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y) - \\ - \int\limits_0^{2\pi} S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_z) \cdot S_b^{(r)}(\phi_z - \phi_y)\, d\phi_z.$$

Используя первые два слагаемых в (11), аналогичным образом можно получить регулярную часть на границе области во втором приближении $S_2^{(r)}$.

Внутри области регулярная часть в первом приближении определяется выражением (13). Аналогично тому, как была получена эта формула, можно найти регулярную часть во втором приближении.

Очевидно, что в m-м приближении регулярная часть на окружности имеет вид

$$S_m^{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y) - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi}}_{m} S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_{z_1}) S_b^{(r)}(\phi_{z_1} - \phi_{z_2}) \cdots \\ \cdots S_b^{(r)}(\phi_{z_{m-1}} - \phi_{z_m}) S_b^{(r)}(\phi_{z_m} - \phi_y)\, d\phi_{z_1} \cdots d\phi_{z_m}. \qquad (14)$$

Докажем теперь сходимость борновского ряда для регулярной части поверхностной функции Грина, когда точка (x, ϕ_x) лежит внутри области. Из формулы (11) следует, что m-й член этого ряда имеет вид

$$C_m = \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi}}_{m} S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_1) S_b^{(r)}(\phi_{z_1} - \phi_{z_2}) \cdots S_b^{(r)}(\phi_{z_{m-1}} - \phi_{z_m}) \times \\ \times S_b^{(r)}(\phi_{z_m} - \phi_y)\, d\phi_{z_1} \cdots d\phi_{z_m},$$

Оценим модуль C_m. Обозначим $\lambda = \left|\int\limits_0^{2\pi} S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y)\, d\phi_x\right|$.

Заметим, что, во-первых, λ не зависит от ϕ_y, а во-вторых, $\lambda < 1$ для $\kappa \neq 0$, поскольку абсолютная величина подынтегральной функции $|S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y)|$ является ограниченной функцией и имеет локальный максимум в точке $\phi_x = \phi_y$, равный $\frac{1}{2\pi}$. Кроме того, по теореме о среднем имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} S_b^{(r)}(\phi_{z_{m-1}} - \phi_{z_m}) S_b^{(r)}(\phi_{z_m} - \phi_y)\, d\phi_{z_m} = \\ = S_b^{(r)}(\phi_{z_{m-1}} - \phi_{z_m}^*) \int\limits_0^{2\pi} S_b^{(r)}(\phi_{z_m} - \phi_y)\, d\phi_{z_m},$$

где $\phi_{z_m}^* \in [0, 2\pi]$. Пусть $A = \max[S^{(s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_1)]$, $x < 1$, тогда

$$|C_m| \leqslant A\lambda^m.$$

Мажорантный ряд $A\sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^m$ сходится, так как $\lambda < 1$. Следовательно, сходится бесконечный ряд, членами которого являются C_m, $m \geqslant 1$. Аналогичным образом можно показать, что для второго слагаемого в выражении (14) для регулярной части на границе справедлива оценка

$$\left|\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi}}_{m} S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_{z_1}) S_b^{(r)}(\phi_{z_1} - \phi_{z_2}) \cdots S_b^{(r)}(\phi_{z_{m-1}} - \phi_{z_m}) \times \\ \times S_b^{(r)}(\phi_{z_m} - \phi_y)\, d\phi_{z_1} \cdots d\phi_{z_m}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\lambda^m.$$

Таблица 1

	$\kappa = 0.01$	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 1$	$\kappa = 5$	$\kappa = 10$
1-й порядок	$-9.9020 \cdot 10^{-5}$	$-6.2374 \cdot 10^{-3}$	-0.2226	-1.2453	-2.4976
2-й порядок	$-8.3108 \cdot 10^{-5}$	$-4.7037 \cdot 10^{-3}$	-0.1799	-1.1925	-2.4447
3-й порядок	$-9.8997 \cdot 10^{-5}$	$-6.1626 \cdot 10^{-3}$	-0.1973	-1.1964	-2.4466
Квазигеометрическое приближение	$-9.1058 \cdot 10^{-5}$	$-5.4514 \cdot 10^{-3}$	-0.1922	-1.1961	-2.4465
Точное значение	$-9.1054 \cdot 10^{-5}$	$-5.4423 \cdot 10^{-3}$	-0.1917	-1.1961	-2.4465

Заметим, что чем меньше λ, тем лучше приближенное решение на границе области для регулярной части поверхностной функции Грина (14) согласуется с точным решением $S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y)$, т.е. приближенную функцию можно улучшить, уменьшив λ. Это возможно, поскольку, как уже упоминалось, существует произвол в разбиении поверхностной функции Грина на регулярную и сингулярную части.

Численные значения производной регулярной части $\partial_x S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}}$, полученные в первых трех порядках борновского приближения, приведены ниже в табл. 1 для различных κ. Поскольку из этих данных видно, что поведение борновского ряда приблизительно совпадает с поведением геометрической прогрессии, то ответ может быть улучшен путем экстраполяции первых трех приближений на весь бесконечный ряд. В дальнейшем результат, полученный таким образом, мы будем называть квазигеометрическим приближением. В последней строке табл. 1 приведены точные значения производной регулярной части поверхностной функции Грина.

Из табл. 1 видно, что третий порядок борновского ряда дает неплохое приближение к точному ответу. Использование формулы для квазигеометрического ряда значительно улучшает это приближение. Кроме того, стоит отметить, что при достаточно больших и малых значениях κ согласование борновского приближения с точным ответом гораздо лучше. Это связано с двумя факторами — при больших κ происходит экспоненциальное затухание регулярной части на границе, а при малых κ функция, принятая за регулярную часть, невелика.

3. Проверка борновского ряда для улучшенных регулярной и сингулярной частей поверхностной функции Грина

Хотя приближенное решение неплохо согласуется с точным, сходимость борновского ряда довольно медленная, особенно для средних значений κ. Использование второго или даже третьего приближения не дает достаточно точного ответа, что вынуждает использовать квазигеометрическое приближение. Между тем с ростом порядка приближения возрастает техническая сложность при вычислениях. Поэтому, воспользовавшись неоднозначностью разделения поверхностной функции Грина на регулярную и сингулярную части, определим теперь эти функции как

$$S_{\text{new}}^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = S^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$
$$S_{\text{new}}^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = S^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Функцию $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ будем подбирать следующим образом. Во-первых, она должна являться решением уравнения Гельмгольца по переменным (x, ϕ_x). Так как поверхностная функция Грина зависит от координат вектора $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, то будем считать, что F также зависит от них. Решая уравнение Гельмгольца методом разделения переменных, имеем

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ikx \sin(\phi_x - \phi_y)} e^{-\sqrt{\kappa^2 + k^2}(1 - x\cos(\phi_x - \phi_y))} dk. \tag{15}$$

Во-вторых, функцию $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ необходимо выбрать так, чтобы параметр $\lambda = \left| \int\limits_0^{2\pi} S_{\text{new}}^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{x=1} d\phi_x \right|$ принимал малое значение. Поэтому вид функции $f(k)$ можно предположить исходя из известного Фурье-образа для функции $xK_1(x)$:

$$xK_1(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k^2 + 1)^{3/2}} dk. \tag{16}$$

Очевидно, (16) при $x = 2\kappa \left| \sin\left(\frac{\phi_x - \phi_y}{2}\right) \right|$ совпадает с точностью до множителя с регулярной частью поверхностной функции Грина на границе области (7). Сравнивая регулярную часть на границе и (15) при малых значениях угла ϕ_x, получаем, что следует положить $f(k) = \frac{C}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}}$, где C — некоторая постоянная. Поскольку абсолютная величина простейшей регулярной части поверхностной функции Грина в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ имеет максимум, то, чтобы минимизировать параметр λ, выберем в (15) функцию $f(k)$ так, чтобы $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в этой же точке имела максимум, причем равный по абсолютному значению максимуму функции $|S_b^{(r)}(\phi_x - \phi_y)|$. Исходя из последнего условия получаем, что $C = \frac{\kappa^2}{4\pi}$. В результате получаем

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\kappa^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx \sin(\phi_x - \phi_y)}\, e^{-\sqrt{\kappa^2 + k^2}(1 - x\cos(\phi_x - \phi_y))}}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}} dk.$$

Улучшенная регулярная часть поверхностной функции Грина внутри области в первом и во втором приближении определяется так же, как это было сделано для простейшей регулярной части.

В табл. 2 приведены результаты для соответствующей производной улучшенной регулярной части поверхностной функции Грина в первом, втором и третьем порядках борновского приближения, а также квазигеометрическое приближение и точный ответ.

Видно, что использование улучшенной сингулярной части приводит к ускорению сходимости борновского ряда и гораздо лучшему согласованию приближенного и точного решений уже во втором приближении. Борновское приближение хуже всего согласуется с точным ответом при средних значениях κ по тем же причинам, что и в предыдущем случае.

Итак, поверхностная функция Грина была разделена на регулярную и сингулярную части двумя способами. Стоит отметить разницу в поведении производной простейшей регулярной части и улучшенной. В первом случае эта функция при больших κ имеет линейную асимптотику, во втором — выходит на константу.

Таблица 2

	$\kappa = 0.01$	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 1$	$\kappa = 5$	$\kappa = 10$
1-й порядок	$2.3918 \cdot 10^{-3}$	$1.8719 \cdot 10^{-2}$	$5.4779 \cdot 10^{-2}$	$5.3321 \cdot 10^{-2}$	$5.3270 \cdot 10^{-2}$
2-й порядок	$2.4088 \cdot 10^{-3}$	$1.9517 \cdot 10^{-2}$	$5.8706 \cdot 10^{-2}$	$5.3937 \cdot 10^{-2}$	$5.3465 \cdot 10^{-2}$
3-й порядок	$2.4089 \cdot 10^{-3}$	$1.9555 \cdot 10^{-2}$	$5.8270 \cdot 10^{-2}$	$5.3932 \cdot 10^{-2}$	$5.3464 \cdot 10^{-2}$
Квазигеометрическое приближение	$2.4089 \cdot 10^{-3}$	$1.9557 \cdot 10^{-2}$	$5.8314 \cdot 10^{-2}$	$5.3932 \cdot 10^{-2}$	$5.3464 \cdot 10^{-2}$
Точное значение	$2.4089 \cdot 10^{-3}$	$1.9558 \cdot 10^{-2}$	$5.8342 \cdot 10^{-2}$	$5.3932 \cdot 10^{-2}$	$5.3464 \cdot 10^{-2}$

Физическое давление на границе области в точке $x = 1$, $\phi = 0$ определяется после выбора точки нормировки. Однако в данной задаче выбор точки нормировки оказывается нетривиальным. Например, мы не можем принять за точку нормировки давление в точке $x = 1$, $\phi = 0$ для круга, радиус которого достаточно велик ($R \to \infty$). Как хорошо известно, вычитание из давления для квадрата с заданной стороной давления для квадрата с бесконечной стороной приводит к правильному ответу. Однако в случае с кругом такая процедура не устраняет логарифмические расходимости, связанные с кривизной границы.

Заключение

Итак, мы рассмотрели вычисление давления Казимира с помощью поверхностной функции Грина в двумерном случае. Отличием рассмотренной здесь задачи на плоскости от одномерного случая, обсуждаемого в [11], является сингулярность соответствующей функции Грина, а значит, и поверхностной функции Грина. Таким образом выяснилось, что задача о выделении конечной части в давлении требует нахождения регулярной части поверхностной функции Грина. Нами был предложен алгоритм приближенного вычисления этой функции с помощью ряда борновского типа для тех задач, в которых точно найти поверхностную функцию Грина оказывается затруднительно, но можно выбрать некоторым произвольным образом ее сингулярную часть. Необходимо еще раз подчеркнуть, что этот произвол ограничен условием локальности, т. е. сингулярная часть должна или зависеть только от выбранной точки на границе, как это имело место для простейшей сингулярной части, рассмотренной в разделе 2, или определяться кривизной границы в рассматриваемой точке, как это было для улучшенной сингулярной части, рассмотренной в разделе 3. Разделение поверхностной функции Грина на регулярную и сингулярную части является неоднозначным, и эта неопределенность снимается после того, как будет выбрана точка нормировки для давления. Скорость сходимости борновского ряда определяется этим разделением. Предложенный алгоритм был проверен на задаче в круге, которая решается точно. Мы рассмотрели два способа выбора сингулярной части. Сравнение в каждом из этих случаев регулярной части, найденной с помощью борновского ряда, с точным решением показывает, что второй выбор оказывается более эффективным с вычислительной точки зрения.

В настоящей работе не был зафиксирован конкретный вид вычитаемой сингулярной части поверхностной функции Грина. Отметим, что эта функция должна определяться исходя из физических соображений. Таким образом, после выбора точки нормировки рассматриваемая здесь задача о вычислении перенормированного давления будет решена окончательно.

Список литературы

1. *Casimir H.B.G.* // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. **51**. P. 793.
2. *Sparnaay M.J.* // Physica. 1958. **24**. P. 751.
3. *Hosaka A., Toki H.* // Phys. Reports. 1996. **277**. P. 65.
4. *Vepstas L., Jackson A.D.* // Phys. Reports. 1990. **187**. P. 109.
5. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V.M.*// Phys. Reports. 2001. **353**. P. 1.
6. *Milonni P.W.* The Quantum Vacuum. San Diego, 1994.
7. *Mostepanenko V.M., Trunov N.N.* The Casimir Effect and its Applications. Oxford, 1997.
8. *Milton K.A.* The Casimir Effect. Singapore, 2001.
9. *Bordag M., Geyer B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // Phys. Rev. 1999. **D60**. P. 055004.
10. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Т. 1. Новокузнецк, 2000.
11. *Воронина Ю.С., Силаев П.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 1. С. 37.

Casimir pressure regularization in two-dimensional field models

Yu. S. Voronina[a], **P. K. Silaev**[b]

Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *voronina-yulya@yandex.ru,* [b] *silaev@bog.msu.ru.*

A method for Casimir pressure calculation with the help of the regular part of the surface Green function is considered in two-dimensional case. Also, a method for approximate calculation of the regular part of the surface Green function using Born-type series is suggested. It is tested for the problem exact solution of which is known.

Keywords: Casimir effect, vacuum effects in quantum field theory, renormalization in quantum field theory.
PACS: 03.70.+k.
Received 5 November 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Воронина Юлия Сергеевна — аспирантка; тел.: 939-26-96, e-mail: voronina-yulya@yandex.ru.
2. Силаев Петр Константинович — д. ф.-м. н., доцент, профессор; тел.: 939-26-96, e-mail: silaev@bog.msu.ru.