Новое соотношение, связывающее функции Грина $N = 1$ суперсимметричной электродинамики

К. В. Степаньянц[a], Е. С. Шевцова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: [a]stepan@phys.msu.ru

Статья поступила 07.09.2008, подписана в печать 12.11.2008.

Для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики показано, что если функция Гелл-Манна–Лоу совпадает с точной β-функцией, предложенной Новиковым, Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (НШВЗ), то сумма некоторых эффективных диаграмм с трех- и четырехточечными вершинами равна нулю.

Ключевые слова: уравнения Швингера–Дайсона, суперсимметрия, функция Гелл-Манна–Лоу.
УДК: 530.145. PACS: 11.30.Pb.

Введение

В $N = 1$ суперсимметричных теориях Новиковым, Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (НШВЗ) [1] было предложено точное выражение для β-функции теории. Для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, которую мы будем рассматривать в этой работе, оно записывается в виде

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}(1 - \gamma(\alpha)), \tag{1}$$

где $\gamma(\alpha)$ — аномальная размерность суперполя материи. Точная НШВЗ β-функция неоднократно проверялась вычислениями по теории возмущений. Как правило, при этом вычислялась β-функция, определенная как производная константы перенормировки при использовании размерной редукции и $\overline{MS}$ схемы [2]. При этом результат совпадает с НШВЗ β-функцией только в двух петлях. Начиная с трехпетлевого приближения возникают различия, которые можно удалить, если специальным образом подстроить схему перенормировки [3]. В работе [4] при использовании регуляризации высшими производными было показано, что в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике функция Гелл-Манна–Лоу совпадает с точной НШВЗ β-функцией вплоть до трехпетлевого приближения. При этом было установлено (см. также [5]), что интегралы, определяющие β-функцию, сводятся к интегралам от полных производных и могут быть легко вычислены. То же самое свойство справедливо и в неабелевых теориях [6, 7], при использовании упрощенного варианта регуляризации высшими ковариантными производными и специальной схемы перенормировки, восстанавливающей тождества Славнова–Тейлора в каждом порядке теории возмущений [8]. Частично эта закономерность была объяснена в работах [9, 10]. В них исследовался вклад в β-функцию, который дают суперполя материи. При этом было показано, что при подстановке в уравнения Швингера-Дайсона решений тождеств Уорда получается вклад, соответствующий НШВЗ β-функции, и еще некоторое дополнительное слагаемое. Явные вычисления [4, 11] свидетельствуют, что в низших порядках это дополнительное слагаемое всегда равно нулю и является интегралом от полной производной, что позволяет предположить существование некоторого нового тождества для функций Грина [9], которое не следует ни из каких известных симметрий теории. В настоящей работе мы исследуем новое тождество и получаем, что оно ведет к дополнительным ограничениям на трех- и четырехточечные функции Грина. Такая переформулировка в перспективе, возможно, позволит найти способ его доказательства.

$N = 1$ суперсимметричная электродинамика

В этой работе будет рассматриваться безмассовая $N = 1$ суперсимметричная электродинамика:

$$S_0 = \frac{1}{4e^2}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \\ + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\big(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}\big). \tag{2}$$

При этом ϕ и $\tilde{\phi}$ — киральные суперполя материи, а V — вещественное скалярное калибровочное суперполе. Суперполе W_a представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля. Мы будем предполагать, что теория регуляризована с помощью метода высших производных [12], причем для сокращения остаточных однопетлевых расходимостей используется регуляризация Паули–Вилларса [13]. Детали этой регуляризации в применении к $N = 1$ суперсимметричной электродинамике можно найти, например, в работах [4, 9, 14]. Важно отметить, что в регуляризованной теории существует единственный параметр регуляризации Λ, который имеет размерность массы. Квантование рассматриваемой модели проводится стандартным образом с использованием техники суперграфов, описанной в книге [15]. Поскольку мы рассматриваем абелев случай, то диаграммы с духовыми петлями отсутствуют. Также в производящий функционал мы добавляем слагаемое

$$S_{\phi_0} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\big(\phi_0^* e^{2V}\phi + \tilde{\phi}_0^* e^{-2V}\tilde{\phi} + \text{э.с.}\big),$$

которое представляет собой действие для дополнительных источников ϕ_0 и $\tilde{\phi}_0$. (Важно заметить, что они не предполагаются киральными.) Вводить такие источники не обязательно, однако их наличие оказывается очень удобным при исследовании уравнений Швингера–Дайсона.

Производящий функционал для связных функций Грина и эффективное действие определяются на основе функционала Z стандартным образом [5].

Точная функция Гелл-Манна–Лоу

В работах [9, 10] подробно описано получение двухточечной функции Грина калибровочного поля с помощью метода, основанного на подстановке решений тождеств Славнова–Тейлора в уравнения Швингера–Дайсона. Кратко этот метод можно сформулировать следующим образом: уравнения Швингера–Дайсона для калибровочного поля в рассматриваемой теории записываются в виде

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x} = \frac{1}{2}\big\langle \phi^* e^{2V}\phi + \phi_0^* e^{2V}\phi + \phi^* e^{2V}\phi_0 - \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi} - \\ - \tilde{\phi}_0^* e^{-2V}\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}_0\big\rangle = \frac{2}{i}\Big(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta j_x^*\delta\phi_0^*} + i\phi^*\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_0^*} + i\phi_0^*\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_0^*} + \\ + i\phi_0\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_0} - \big(\phi\to\tilde{\phi}, \phi_0\to\tilde{\phi}_0, j\to\tilde{j}\big)\Big). \quad (3)$$

Для того чтобы упростить это выражение, воспользуемся тождеством

$$\phi^+ e^{2V}\phi = D^2\left(\frac{\bar{D}^2}{16\partial^2}\phi^+ e^{2V}\phi\right) - 2D^a\left(\frac{D_a\bar{D}^2}{16\partial^2}\phi^+ e^{2V}\phi\right) + \\ + \frac{\bar{D}^2}{16\partial^2}\phi^+ D^2\big(e^{2V}\phi\big),$$

которое следует из антикиральности поля ϕ^*. (Здесь D и $\bar{D}$ — соответственно правая и левая суперсимметричные ковариантные производные.) Принимая во внимание, чему равны производные по дополнительным источникам ϕ_0^*, с помощью этого равенства можно переписать уравнения Швингера–Дайсона для калибровочного суперполя в виде

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x} = \frac{2}{i}\left(D_x^2\left(\frac{\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*}\right) - 2D_x^a\left(\frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}D_x^2\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*} + \phi_{0x}^*\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*} + \phi_{0x}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}}\right) - \big(\phi_0\to\tilde{\phi}_0, j\to\tilde{j}\big), \quad (4)$$

где предполагается, что производные по источникам должны быть выражены через производные по полям. (При этом через $\boldsymbol{V}$ обозначен аргумент эффективного действия, соответствующий калибровочному полю.) Заметим, что в силу уравнений Швингера–Дайсона для суперполей материи при $\phi_0 = 0$ справедливо равенство

$$-\frac{D_x^2}{2}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_x^*} = -j_x^*.$$

С его помощью можно легко убедиться, что третье слагаемое в формуле (4) не дает вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного поля, поскольку величина

$$\frac{\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}D_x^2\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{x0}^*} = 2\frac{\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta j_y^*}{\delta j_x^*}\bigg|_{x=y} = -\frac{\bar{D}_x^2 D_x^2}{16\partial_x^2}\delta_{xy}^8\bigg|_{x=y} = \\ = -\frac{1}{4\partial_x^2}\delta_{xy}^4\bigg|_{x=y}$$

исчезает при дифференцировании по $\boldsymbol{V}_y$. Поэтому

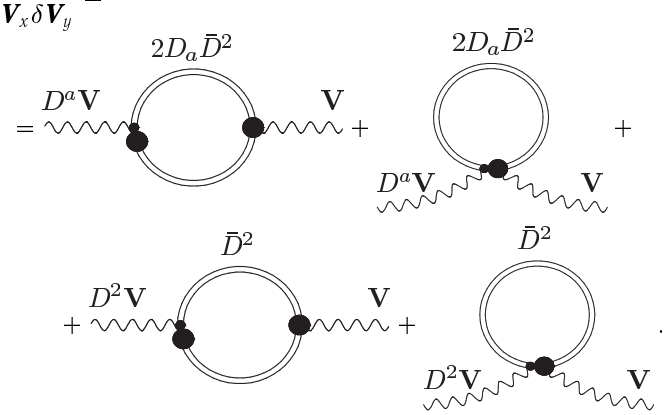
$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x\delta \boldsymbol{V}_y} = \frac{2}{i}\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{V}_y}\left[D_x^2\left(\frac{\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{x0}^*}\right) - \right. \\ \left. - 2D_x^a\Big(\frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{x0}^*}\Big) - (\phi\to\tilde{\phi})\right].$$

Далее мы увидим, что все слагаемые, у которых на внешней линии стоит D_x^2 в пределе нулевого внешнего импульса, оказываются равными нулю. Выражая производные по источникам через производные по полям, а затем осуществляя коммутирование

$$\frac{\delta}{\delta V_y}\frac{\delta}{\delta j_x^*} = \left[\frac{\delta}{\delta V_y}, \frac{\delta}{\delta j_x^*}\right] + \frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta}{\delta V_y},$$

переписываем результат в виде суммы четырех эффективных диаграмм

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x\delta \boldsymbol{V}_y} =$$



(При этом мы формально полагаем константу перенормировки суперполя материи $Z = 1$. Зависимость от Z можно легко восстановить, что также подробно описано в работах [5, 9, 10].)

Результат вычисления первой, третьей и четвертой диаграмм дает вклад, который соответствует точной НШВЗ β-функции, тогда как вторая выражается через некоторую функцию, которая не может быть определена из тождеств Уорда. Это можно сформулировать в виде следующего уравнения [5]:

$$\frac{d}{d\ln\Lambda}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x\delta \boldsymbol{V}_y}\bigg|_{p=0} = \\ = \frac{d}{d\ln\Lambda}\left\{-\frac{1}{16\pi^2}\Big(\ln\frac{\Lambda}{p} - \ln G\Big)\partial^2\Pi_{1/2}\delta_{xy}^8 - \right. \\ - \frac{4}{i}\frac{d}{d\ln\Lambda}D_x^a\left(\frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta j_x^*\delta\phi_{0z}^*\delta \boldsymbol{V}_y}\bigg|_{x=z} - \right. \\ \left.\left. - \frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\tilde{j}_x^*\delta\tilde{\phi}_{0z}^*\delta \boldsymbol{V}_y}\bigg|_{x=z}\right)\right\}\bigg|_{p=0}, \quad (5)$$

где $\Pi_{1/2}$ — суперсимметричный поперечный проектор, а $G(\alpha_0, \Lambda/p)$ — функция Грина суперполя материи, которая определяется равенством

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_x^+\delta\phi_y} = \frac{D_x^2\bar{D}_x^2}{16}G(\partial^2)\delta_{xy}^8. \quad (6)$$

Если второе слагаемое в формуле (5) оказывается равным нулю (о чем свидетельствует целый ряд явных вычислений), то [5] точная функция Гелл-Манна–Лоу, которая определяется равенством

$$\beta(d(\alpha, \mu/p)) = \frac{\partial}{\partial\ln p}d(\alpha, \mu/p), \quad (7)$$

совпадет с точной НШВЗ β-функцией (1). Поэтому наибольший интерес представляет вычисление второй диаграммы или, эквивалентно, слагаемых во второй строчке формулы (5). При этом предположительно

$$-\frac{4}{i}\frac{d}{d\ln\Lambda}D_x^a\left(\frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta j_x^*\delta\phi_{0z}^*\delta\boldsymbol{V}_y}\bigg|_{x=z}-\right.$$
$$\left.-\frac{D_{xa}\bar{D}_x^2}{16\partial_x^2}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\tilde{j}_x^*\delta\tilde{\phi}_{0z}^*\delta\boldsymbol{V}_y}\bigg|_{x=z}\right)\bigg|_{p=0}=0. \quad (8)$$

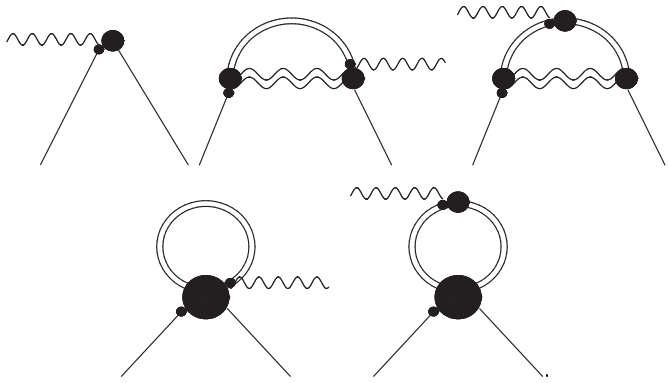
В этой работе мы постараемся переписать левую часть этого равенства в виде суммы некоторых других эффективных диаграмм, которые выражаются через трех- и четырехточечные функции Грина.

Ограничения на трех- и четырехточечные функции Грина

Рассмотрим два слагаемых во второй строчке формулы (5) и перепишем их, используя уравнение Швингера–Дайсона (3). Тогда трехточечная вершинная функция с полями ϕ, ϕ_0^* и $\boldsymbol{V}$, которая присутствует в формуле (5), может быть представлена в виде

$$\frac{\delta^2}{\delta\phi_y\delta\phi_{0z}^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\boldsymbol{V}_x}=\frac{2}{i}\frac{\delta^2}{\delta\phi_y\delta\phi_{0z}^*}\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta j_x^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*}+i\phi_x^*\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*}+i\phi_{0x}^*\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{0x}^*}-(\phi\to\tilde{\phi}\ \text{ и т. д.})\right).$$

Выражая производные по источникам через производные по полям, а затем выполняя дифференцирование, получаем, что это выражение может быть графически представлено в виде суммы диаграмм



При этом большой круг с четырьмя исходящими линиями соответствует вершине

$$\frac{\delta^4\Gamma}{\delta\phi_1\delta\phi_{02}^*\delta\phi_3\delta\phi_{04}^*}.$$

Круги среднего размера обозначают вершины

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_1\delta\phi_{02}^*\delta\boldsymbol{V}_3}\quad\text{или}\quad\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_1\delta\phi_{02}^*}.$$

Примыкающие к этим двум кругам маленькие круги обозначают линии, которые соответствуют дифференцированию по ϕ_0. Двойные линии обозначают точные пропагаторы.

Для того чтобы упростить выражение для вершинной функции, рассмотрим следующее выражение:

$$X\equiv\boldsymbol{V}_x\left(D_3^2\int d^8x_1\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_3^*\delta\phi_1}\right)^{-1}\frac{D_1^2}{8\partial_1^2}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_1\delta\phi_{0x}^*}-\delta_{3x}^8\right)=$$
$$=\boldsymbol{V}_x\left(-\frac{\bar{D}_x^2D_x^2}{16\partial^2}-1\right)\delta_{3x}^8.$$

Заметим, что в рассматриваемой вершине на величину X действует оператор $\bar{D}_x^2D_x^2$. (Для того чтобы в этом убедиться, необходимо подставить явное выражение для пропагатора кирального суперполя. Еще более просто использовать графическое представление рассматриваемых выражений и правила Фейнмана.) При этом с помощью правила Лейбница несложно убедиться, что

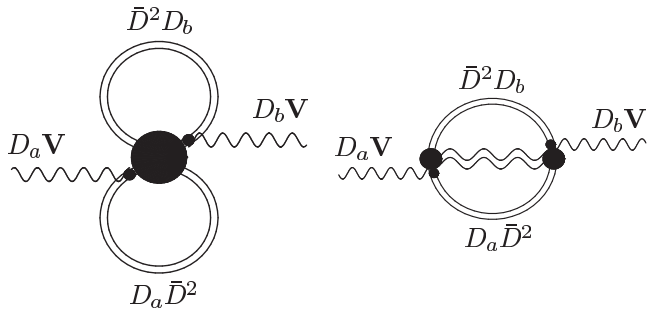
$$D_x^2X=D_x^2\left(\boldsymbol{V}_x\left(-\frac{\bar{D}_x^2D_x^2}{16\partial^2}-1\right)\delta_{3x}^8\right)=$$
$$=-(D_x^2\boldsymbol{V}_x)\left(-\frac{\bar{D}_x^2D_x^2}{16\partial^2}-1\right)\delta_{3x}^8+$$
$$+2D_x^a\left((D_{xa}\boldsymbol{V}_x)\left(-\frac{\bar{D}_x^2D_x^2}{16\partial^2}-1\right)\delta_{3x}^8\right). \quad (9)$$

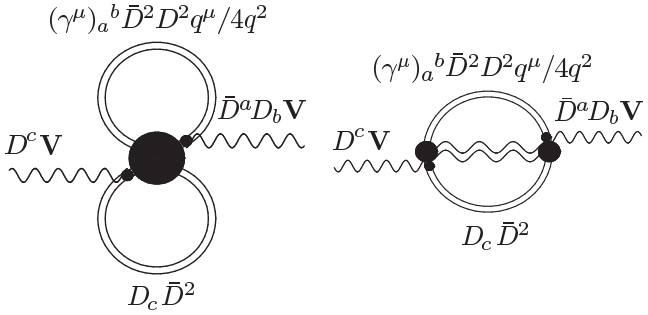
Важно заметить, что на каждой внешней линии присутствует по крайней мере одна производная D_a, действующая на калибровочное суперполе $\boldsymbol{V}$. Дело в том, что при вычислении двухточечной функции Грина калибровочного поля в пределе $p\to0$ все диаграммы, в которых имеется третья степень правой ковариантной производной (а их достаточно много), оказываются равными нулю в силу антикоммутационных соотношений для ковариантных производных.

Следующим шагом в формуле (9) мы прокоммутируем $D_a\boldsymbol{V}$ и ковариантные производные, а затем применим к результату оператор $\bar{D}^2$. При этом можно отбросить все слагаемые, которые содержат вторую степень правой суперсимметричной ковариантной производной D_a, поскольку соответствующий вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного поля будет пропорционален как минимум третьей степени этой производной. В результате получится, что

$$\bar{D}_x^2D_x^2X\to-2\bar{D}_x^2D_x^a\big((D_{xa}\boldsymbol{V}_x)\delta_{3x}^8\big)+$$
$$+i(\gamma^\mu)_b{}^a\frac{\bar{D}_x^2D_x^2}{2\partial^2}\partial_\mu\big((\bar{D}^bD_a\boldsymbol{V}_x)\delta_{x3}^8\big).$$

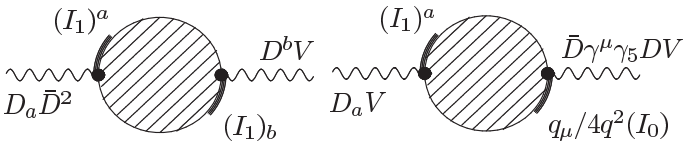
После проведения этой операции и подстановки результата в левую часть формулы (8), получается что последняя может быть графически представлена в виде суммы следующих диаграмм:





(Символы около пропагаторов обозначают, какие комбинации производных соответствуют каким линиям.)

Фактически это можно интерпретировать как переформулировку одного из результатов работы [16], в которой новое тождество представлено (в обозначениях работы [16]) в виде равенства нулю суммы двух эффективных диаграмм



Заключение

В работе [9] было показано, что функция Гелл-Манна–Лоу совпадает с точной НШВЗ β-функцией только в том случае, если справедливо некоторое тождество, которому должны удовлетворять функции Грина. В настоящей работе мы показали, что это тождество представляется в виде равенства нулю суммы некоторых эффективных диаграмм. Эти диаграммы выражаются через трех- и четырехточечные функции Грина, содержащие дополнительные источники ϕ_0. Поэтому равенство нулю этих диаграмм накладывает некоторые нетривиальные ограничения на соответствующие функции Грина. Если же полученные в этой работе ограничения на трех- и четырехточечные функции Грина не выполняются, то функция Гелл-Манна–Лоу будет отличаться от точной НШВЗ β-функции. Этот результат, возможно, будет полезен для доказательства тождества (8), а следовательно, и строгого вывода точной НШВЗ β-функции методами теории возмущений.

Список литературы

1. *Novikov V., Shifman M., Vainstein A., Zakharov V.* // Phys. Lett. B. 1985. **166**. P. 329.
2. *Avdeev L., Tarasov O.* // Phys. Lett. B. 1982. **112**. P. 356; *Jack I., Jones D., North C.* // Nucl. Phys. B. 1996. **473**. P. 308; Phys. Lett. B. 1996. **386**. P. 138; E-print: hep-ph/9603386.
3. *Jack I., Jones D., North C.* // Nucl. Phys. B. 1997. **486**. P. 479.
4. *Soloshenko A.A., Stepanyantz K.V.* E-print: hep-th/0304083 (сокращенная версия: *Солошенко А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2004. **140**. С. 437.)
5. *Пименов А.Б., Солошенко А.А., Степаньянц К.В., Шевцова Е.С.* // Изв. вузов. Физика. 2008. № 5. С. 5.
6. *Пименов А.Б., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2008. **156**. С.270.
7. *Пименов А.Б., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2008. **155**. С.398.
8. *Slavnov A.A.* // Phys. Lett. B. 2001. **518**. P. 195; *Славнов А.А.* // ТМФ. 2002. **130**. С. 3; *Славнов А.А., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2003. **135**. С. 265; **139**. С. 179.
9. *Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2005. **142**. С. 37.
10. *Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2007. **150**. С. 442.
11. *Пименов А.Б., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2006. **147**. С. 290.
12. *Славнов А.А.* // ТМФ. 1975. **23**. С. 3.
13. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1988.
14. *West P.* // Nucl. Phys. B. 1986. **268**. P. 113.
15. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию, М., 1989.
16. *Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2006. **146**. С. 385.

New relation restricting Green functions of $N = 1$ supersymmetric electrodynamics

K. V. Stepanyantz[a], **E. S. Shevtsova**

[1] *Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *stepan@phys.msu.ru.*

For the $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, it is shown that if the Gell-Mann–Low function coincides with the exact NSVZ β-function, then the sum of some effective diagrams with three- and four-point vertexes must be equal to zero.

Keywords: the Schwinger–Dyson equations, supersymmetry, the Gell-Mann–Low function.
PACS: 11.30.Pb.
Received 7 September 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Степаньянц Константин Викторович — к. ф.-м. н., доцент; тел.: 939-53-89, e-mail: stepan@phys.msu.ru.
2. Шевцова Екатерина Сергеевна — аспирантка; тел.: 8(499)193-86-02, e-mail: shevtsova-katya@yandex.ru.