Векторные функциональные пространства, связанные с задачей электромагнитной дифракции в конусе, и их свойства

И. А. Баланцев[a], А. Л. Делицын

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: [a]laktan86@mail.ru

Статья поступила 15.09.2008, подписана в печать 19.01.2009.

Определено специальное векторное функциональное пространство для слабой постановки задачи дифракции в конусе. Доказаны некоторые теоремы вложения для введенного векторного функционального пространства. Исходная задача сведена к фредгольмово разрешимой.

Ключевые слова: функциональный анализ.
УДК: 517.95. PACS: 02.30.Sa.

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается вопрос о разрешимости задачи дифракции в конусе. Применен подход, предложенный в [1, 2] (см. также [3]), основанный на сведении задачи дифракции в неограниченной области к внутренней краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Цель исследования — доказательство теоремы существования решения задачи дифракции в конической области.

Итак, задача дифракции рассматривается в конусе $Q = \{(\theta, \varphi) \in \Omega,\ r \in [0, \infty)\}$, Ω — односвязная область, принадлежащая поверхности единичной сферы $\{(\theta, \phi)\colon 0 \leqslant \phi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, с границей, состоящей из не более чем конечного числа бесконечно дифференцируемых дуг (точное описание этого класса границ см. [4, с. 148, 149].

Электромагнитное поле в конусе описывается системой уравнений Максвелла, которую можно преобразовать к виду

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 H = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем считаем выполненными все нижеперечисленные условия.

1. k — произвольный вещественный параметр.

2. ε — скалярная функция переменных r, θ, ϕ, ограниченная в Q:

$$1 \leqslant \varepsilon(r, \theta, \phi) \leqslant \varepsilon_{\max}. \tag{3}$$

3. Введем пространственную область $V = \{r, \theta, \phi\colon 0 \leqslant r \leqslant R,\ (\theta, \phi) \in \Omega\}$. Полагаем, что диэлектрическое тело полностью содержится в ограниченной области $V' \subset V$, $V' = \{r, \theta, \phi\colon 0 \leqslant r \leqslant R - \tau,\ (\theta, \phi) \in \Omega,\ \tau > 0\}$. Будем считать, что $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{V_i}$, причем в каждой замкнутой области $\overline{V_i}$ функция $\varepsilon(r, \theta, \phi)$ бесконечно дифференцируема вплоть до границы, а границы этих областей состоят из не более чем конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Всюду вне V полагаем $\varepsilon = 1$.

4. На поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости поставим условия сопряжения

$$H \times n|_S = 0, \quad \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times n|_S = 0, \tag{4}$$

где n — нормаль к поверхности S разрыва диэлектрической проницаемости.

5. В качестве условий на ребре и в вершине конуса используем условия Мейкснера [5, с. 15]:

$$H \in ((L_2)^{\mathrm{loc}})^3, \quad \operatorname{rot} H \in ((L_2)^{\mathrm{loc}})^3. \tag{5}$$

6. На боковой поверхности конуса поставим граничные условия, соответствующие идеально проводящим стенкам:

$$(H, n)|_{\partial Q} = 0, \quad [\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times n]|_{\partial Q} = 0. \tag{6}$$

7. В качестве условий излучения используются парциальные условия А.Г. Свешникова в области $r > R - \tau$ [3].

8. Под пространством $\mathcal{H}$ будем понимать множество векторов H, таких, что $H \in (L_2(V))^3$, $\operatorname{rot} H \in (L_2(V))^3$, $\operatorname{div} H = 0$, где операции ротора и дивергенции определены в следующем смысле:

— скалярное поле $F \in L_2(V)$ называется дивергенцией векторного поля $u \in (L_2(V))^3$, если для любой скалярной функции $v \in C_0^\infty(V)$ выполняется тождество

$$\int_V F v \, dV = -\int_V (u, \nabla v) \, dV;$$

— векторное поле $A \in (L_2(V))^3$ называется слабым ротором векторного поля $u \in (L_2(V))^3$, если для любого поля $v \in (C_0^\infty(V))^3$ справедливо тождество

$$\int_V (A, v) \, dV = \int_V (u, \operatorname{rot} v) \, dV.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ определим следующим образом:

$$(H_1, H_2)_{\mathcal{H}} = (H_1, H_2)_{(L_2(V))^3} + (\operatorname{rot} H_1, \operatorname{rot} H_2)_{(L_2(V))^3}.$$

9. Под Ω будем понимать телесный угол, образованный конусом, а под $\Omega(r)$ — сечение конуса сферой с центром в вершине конуса и радиусом r.

10. Символом C обозначаем различные оценочные постоянные.

Цель настоящей работы — рассмотреть слабую постановку задачи (1)–(6) в соответствующем гильбертовом пространстве и установить существование ее слабого решения в этом пространстве.

Рассмотрим следующие две краевые задачи:

$$-\Delta_{\theta,\phi} \chi_m = \lambda_{1m} \chi_m, \qquad \chi_m|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$-\Delta_{\theta,\phi} \psi_m = \lambda_{2m} \psi_m, \qquad \frac{\partial \psi_m}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0;$$

где $\Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$.

Электромагнитное поле в конусе возбуждается падающей из $+\infty$ нормальной модой, например электрического типа:

$$H = A\,\mathrm{rot}\left(\sqrt{kr}\,H^2_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kr)\chi_m e_r\right).$$

Далее, понимая, что из $+\infty$ никакие другие волны приходить не могут, в области $r > R-\tau$ будем требовать наличия только расходящихся волн и одной приходящей. Выразим этот факт в виде условия излучения, потребовав представимость поля H в этой области в виде сходящегося в $(L_2(\Omega(r)))^3$ ряда при каждом фиксированном $r > R-\tau$:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{rot}\left(\sqrt{kr}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\chi_n e_r\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\sqrt{kr}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\psi_n e_r\right) + A\,\mathrm{rot}\left(\sqrt{kr}\,H^2_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kr)\chi_m e_r\right). \quad (7)$$

Вычисляя формально ротор от (7), получим

$$\mathrm{rot}\,H = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\sqrt{kr}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\frac{\lambda_{1n}}{r^2}\chi_n e_r + \left(\sqrt{kr}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)'\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\chi_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n k^2\,\mathrm{rot}\left(\sqrt{kr}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\psi_n e_r\right) + A\left(\sqrt{kr}\,H^2_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kr)\frac{\lambda_{1m}}{r^2}\chi_m e_r + \left(\sqrt{kr}\,H^2_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kr)\right)'\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\chi_m\right), \quad (8)$$

где $\mathrm{grad}_{\theta,\phi} = \frac{e_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{e_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$.

Переходим к строгим формулировкам. В задаче предполагаем искать поле $H \in (L_2(V))^3$. Это, в частности, означает, что при почти всех $r \in (0,R)$ $H \in (L_2(\Omega(r)))^3$. Следовательно, на почти всех сечениях поле H можно разложить в ряд по полной ортонормированной системе функций, образующих базис в $(L_2(\Omega(r)))^3$. Отметим, что на произвольном сечении поле H, вообще говоря, не принадлежит $(L_2(\Omega(r)))^3$.

Опираясь на известные результаты, изложенные в [6] и [7], нетрудно обосновать следующее утверждение.

Утверждение 1.

1. *Для любого* $H \in (L_2(\Omega))^3$ *справедливо разложение*

$$H = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{1n}(r)\,\mathrm{rot}\,\chi_n e_r + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_{1n}(r)\,\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\psi_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2n}}{r^2}\gamma_{1n}(r)\psi_n e_r, \quad (9)$$

иными словами, совокупность векторов $\{\mathrm{rot}\,\chi_n e_r\}$, $\{\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\psi_n\}$, $\{\psi_n e_r\}$ *образует базис в пространстве* $(L_2(\Omega(r)))^3$.

2. *Для любого* $\mathrm{rot}\,H \in (L_2(\Omega))^3$ *справедливо разложение*

$$\mathrm{rot}\,H = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}(r)\,\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\chi_n + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}(r)\,\mathrm{rot}\,\psi_n e_r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1n}}{r^2}\gamma_{2n}(r)\chi_n e_r, \quad (10)$$

иными словами, совокупность векторов $\{\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\chi_n\}$, $\{\mathrm{rot}\,\psi_n e_r\}$, $\{\chi_n e_r\}$ *образует базис в пространстве* $(L_2(\Omega(r)))^3$.

Легко видеть, что все функции α_{1n}, β_{1n}, γ_{1n}, α_{2n}, β_{2n}, γ_{2n} из разложений (9) и (10) являются элементами $L_2(0,R)$.

Пользуясь теоремой Фубини [8, с. 335, 336] и определением слабой производной [7, с. 148], нетрудно вывести соотношения

$$\beta_{1n}(r) = \gamma'_{1n}(r), \quad (11)$$

$$\gamma_{2n}(r) = \alpha_{1n}(r), \quad (12)$$

$$\alpha_{2n}(r) = \alpha'_{1n}(r), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\lambda_{2n}}{r^2}\gamma_{1n}(r),\eta(r)\right)_{L_2(0,R)} + \left(\beta_{1n}(r),\eta'(r)\right)_{L_2(0,R)} = \left(\beta_{2n}(r),\eta(r)\right)_{L_2(0,R)}, \quad (14)$$

причем последнее равенство справедливо для каждого n $\forall\eta \in H^1_0(0,R)$. Из этих соотношений следует, что $\alpha_{1n} \in H^1(0,R)$, $\gamma_{1n} \in H^1(0,R)$.

Выведем основное уравнение задачи. Для этого проведем несколько формальных процедур, предполагая выполненными условия, обеспечивающие их справедливость. Умножим скалярно уравнение (1) на произвольный достаточно гладкий вектор $\tilde{H}$, удовлетворяющий граничным условиям (6) и условиям сопряжения (4), и проинтегрируем по области V:

$$\int_V\left(\mathrm{rot}\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}\,H,\tilde{H}\right)dV - k^2\int_V\left(H,\tilde{H}\right)dV = 0.$$

Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса и разложениями (7) и (8), получим после несложных преобразований

$$\int_V\left(\varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}\,H,\mathrm{rot}\,\tilde{H}\right)dV - k^2\int_V\left(H,\tilde{H}\right)dV - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}\frac{1}{\lambda_{1n}}\times \left(\mathrm{rot}\,\chi_n e_r,H\right)^*_{(L_2(\Omega(R)))^3}\left(\mathrm{rot}\,\chi_n e_r,\tilde{H}\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3} + \sum_{n=1}^{\infty}k^2\frac{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}\frac{1}{\lambda_{2n}}\times \left(\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\psi_n,H\right)^*_{(L_2(\Omega(R)))^3}\left(\mathrm{grad}_{\theta,\phi}\,\psi_n,\tilde{H}\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3} = -A\frac{4i\sqrt{k}}{\pi\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kR)}\left(\mathrm{rot}\,\chi_m e_r,\tilde{H}\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3}, \quad (15)$$

где скалярное произведение векторов-функций в пространстве $(L_2(\Omega(R)))^3$ определено следующим образом:

$$(a,b)_{(L_2(\Omega(R)))^3} = \int_{\Omega(R)}(a,b)\,dS = \int_{\Omega}(a,b)R^2\,d\Omega.$$

На некотором множестве элементов (которое, очевидно, непусто) определим полуторалинейные формы

$$a(H,\tilde H) = \left(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} H, \operatorname{rot}\tilde H\right)_{(L_2(V))^3} + C(H,\tilde H)_{(L_2(V))^3} -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}\right\}\times$$
$$\times(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)^*_{(L_2(\Omega(R)))^3}\left(\operatorname{rot}\chi_n e_r,\tilde H\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3},$$

$$b(H,\tilde H) = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Im}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}\right\}\times$$
$$\times(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)^*_{(L_2(\Omega(R)))^3}\left(\operatorname{rot}\chi_n e_r,\tilde H\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2}{\lambda_{2n}}\frac{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}\times$$
$$\times(\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n, H)^*_{(L_2(\Omega(R)))^3}\left(\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n,\tilde H\right)_{(L_2(\Omega(R)))^3} -$$
$$-k^2(H,\tilde H)_{(L_2(V))^3} - C(H,\tilde H)_{(L_2(V))^3}.$$

(C — положительная постоянная) и линейную форму

$$l(\tilde H) = -A\frac{4i\sqrt{k}}{\pi\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1m}+1/4}}(kR)}(\operatorname{rot}\chi_m e_r,\tilde H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}.$$

Тогда уравнение (15) примет вид

$$a(H,\tilde H) + b(H,\tilde H) = l(\tilde H). \tag{16}$$

Множество векторов, подчиненных условиям

1) $H\in\mathcal{H}$;

2) $\int\limits_V (H,\nabla\psi)\,dV = 0\ \ \forall\psi\in C^\infty(\overline{V})$, $\psi|_{r=R}=0$;

3) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}\right\}\times$
$\times\left|(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}\right|^2<\infty$;

4) $(H,\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n)_{(L_2(\Omega(R)))^3} =$
$= \frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}(H_r,\psi_n)_{(L_2(\Omega(R)))^3}$,

где условие 2 включает в себя первое из условий (6), понимаемое в слабом смысле, а пункт 4 является формой условия излучения (7), образует некоторое функциональное пространство, которое всюду в дальнейшем будем обозначать как $\mathcal{J}$.

Доказательство существования решения задачи

Определение. Решением H задачи будем называть элемент пространства $\mathcal{J}$, удовлетворяющий уравнению (16) при любом $\tilde H\in\mathcal{J}$.

Имеют место два утверждения, доказательство которых проводится стандартными методами (см., напр., [9]).

Утверждение 2. *Полуторалинейная форма $a(H,\tilde H)$ задает скалярное произведение в пространстве $\mathcal{J}$.*

Утверждение 3. *Пространство $\mathcal{J}$ является гильбертовым относительно нормы, порожденной скалярным произведением $(H_1,H_2)_{\mathcal{J}} = a(H_1,H_2)$.*

При исследовании вопроса о компактности вложения пространства $\mathcal{J}$ в $(L_2(V))^3$ будем использовать метод, предложенный в работе Н. Века [10] для задачи об электромагнитном резонаторе и переоткрытый в работе [12] о дифракции в волноводе.

Утверждение 4. *Из любой последовательности, ограниченной в норме гильбертова пространства $\mathcal{J}$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в норме $(L_2(V))^3$.*

Доказательство. Из вида разложений (9) и (10) с учетом (11)–(14) следует, что

$$\|H\|^2_{(L_2(V))^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{1n} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\|\gamma'_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\frac{1}{r}\gamma_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda^2_{2n},$$
$$\|\operatorname{rot} H\|^2_{(L_2(V))^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha'_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{1n} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\|\beta_{2n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\frac{1}{r}\alpha_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda^2_{1n}.$$

Пусть дана последовательность $\{H_m\}$, ограниченная по норме пространства $\mathcal{J}$, т.е. существует такая константа C, что $\|H_m\|^2_{\mathcal{J}}<C$ сразу для всех m, и в частности $\|H_m\|^2_{(L_2(V))^3}<C$ и $\|\operatorname{rot} H_m\|^2_{(L_2(V))^3}<C$. Из $\|\operatorname{rot} H_m\|^2_{(L_2(V))^3}<C$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(\alpha^m_{1n})'\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{r}\alpha^m_{1n}\right\|^2_{L_2(0,R)}\lambda^2_{1n}<C.$$

С помощью рассуждений, проведенных в работах [11–14], легко установить, что из ограниченной в такой норме последовательности можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по норме $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\alpha^m_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{1n}$.

В силу сказанного выше из $\|\operatorname{rot} H_m\|^2_{(L_2(V))^3}<C$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\beta^m_{2n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{2n}<C.$$

Докажем, что из ограниченной в такой норме последовательности можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по норме $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\gamma'_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda_{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\frac{1}{r}\gamma_{1n}\|^2_{L_2(0,R)}\lambda^2_{2n}$.

С учетом (11) равенство (14) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\lambda_{2n}}{r^2}\gamma^m_{1n}(r),\eta^m_{1n}(r)\right)_{L_2(0,R)} + \left((\gamma^m_{1n}(r))',(\eta^m_{1n}(r))'\right)_{L_2(0,R)} =$$
$$= \left(\beta^m_{2n}(r),\eta^m_{1n}(r)\right)_{L_2(0,R)}.$$

Из условия $\|H_m\|^2_{L_2(V)}<\infty$ следует, что $\|\frac{\gamma^m_{1n}}{r}\|^2_{L_2(0,R)}<\infty$. А отсюда с учетом $\gamma^m_{1n}\in H^1(0,R)$ получаем $\gamma^m_{1n}(0)=0$. В точке $r=R$ выполнено условие 3-го рода

$$(\gamma^m_{1n})'(R) = \rho_{1n}\gamma^m_{1n}(R),$$
$$\text{где}\quad \rho_{1n} = \frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}. \tag{17}$$

Представим функции $\eta^m_{1n}(r)$ в виде $\eta^m_{1n}(r) = \gamma^m_{1n}(r) - f_{1n}(r)$, где $f_{1n}(r) = \frac{1}{\lambda^3_{1n}}\frac{r}{R}\exp\left(\left(\rho_{1n}-\frac{1}{R}\right)r\right)$. Нетрудно

видеть, что функции $f_{1n}^m(r)$ удовлетворяют граничному условию (17). В этом случае справедливо равенство

$$\lambda_{2n}\Big(\frac{\gamma_{1n}^m}{r}, \frac{\gamma_{1n}^m}{r} - \frac{f_{1n}^m}{r}\Big)_{L_2(0,R)} + \big((\gamma_{1n}^m)', (\gamma_{1n}^m)' - (f_{1n}^m)'\big)_{L_2(0,R)} = \\ = \big(\beta_{2n}^m, \gamma_{1n}^m - f_{1n}^m\big)_{L_2(0,R)}.$$

Проводя несложные преобразования, используя неравенство Коши–Буняковского, можно получить оценку

$$\lambda_{1n}\|(\gamma_{1n}^m)'\|^2_{L_2(0,R)} + \lambda_{1n}^2\Big\|\frac{\gamma_{1n}^m}{r}\Big\|^2_{L_2(0,R)} \leqslant \\ \leqslant 4\|r\|^2_{L_2(0,R)}\|\beta_{2n}^m\|^2_{L_2(0,R)} + \frac{C}{\lambda_{1n}^3}.$$

Просуммируем это неравенство по n в пределах от $N+1$ до ∞:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\Big(\lambda_{1n}\|(\gamma_{1n}^m)'\|^2_{L_2(0,R)} + \lambda_{1n}^2\Big\|\frac{\gamma_{1n}^m}{r}\Big\|^2_{L_2(0,R)}\Big) \leqslant \\ \leqslant 4\|r\|^2_{L_2(0,R)}\sum_{n=N+1}^{\infty}\|\beta_{2n}^m\|^2_{L_2(0,R)} + C\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}^3} \leqslant \\ \leqslant \frac{4\|r\|^2_{L_2(0,R)}}{\lambda_{1N}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\lambda_{1n}\|\beta_{2n}^m\|^2_{L_2(0,R)} + C\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}^3} \leqslant \\ \leqslant \frac{4\|r\|^2_{L_2(0,R)}}{\lambda_{1N}}\|\operatorname{rot} H_m\|^2 + C\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}^3}.$$

Выбирая достаточно большое N, можно сделать правую часть меньше любого заданного ε. Для конечной суммы применима теорема Реллиха. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Мнимая часть логарифмической производной функции $\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)$ на фиксированном сечении $r=R$ ограничена константой, а модуль действительной части при увеличении n растет как $\mathcal{O}\left(\sqrt{\lambda_{1n}}\right)$.*

Доказательство этого утверждения нетрудно получить, воспользовавшись формулой Никольсона [15]

$$J^2_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr) + N^2_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr) = \\ = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty} K_0(2kr\operatorname{sh} w)\operatorname{ch}\left(2\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}\,w\right)\,dw$$

(см. также работу [13]).

Утверждение 6. *Форма $b(H,\tilde{H})$ определена на элементах пространства $\mathcal{J}$.*

Доказательство. Очевидно, что полуторалинейная форма $b(H,\tilde{H})$ будет ограниченной тогда и только тогда, когда ограничена квадратичная форма $b(H,H)$ ([16, с. 308, 309]. Дальнейшее доказательство сводится к двум оценкам:

$$\Bigg|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Im}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{1n}+1/4}}(kR)}\right\}\times \\ \times|(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2\Bigg| \leqslant a(H,H) = \|H\|^2_{\mathcal{J}},$$

$$\Bigg|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2}{\lambda_{2n}}\frac{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}\times \\ \times|(\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2\Bigg| \leqslant \\ \leqslant -\sum_{n=1}^{\infty}k^2\lambda_{2n}\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}\right\}|\gamma_{1n}(R)|^2.$$

Для доказательства сходимости последнего ряда достаточно принять во внимание асимптотический рост по n выражения, стоящего в фигурных скобках, воспользовавшись утверждением 5, и применить неравенство Коши–Буняковского. Утверждение доказано.

Утверждение 7. *Из любой последовательности, ограниченной в норме пространства $\mathcal{J}$, можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по полунорме*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Im}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}\right\}|\times \\ \times(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2.$$

Доказательство. Доказательство сводится к оценке

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\operatorname{Im}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}\right\}\times \\ \times|(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H_m)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{1n}}\left|\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}\right\}\right|\times \\ \times|(\operatorname{rot}\chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 8. *Из любой последовательности, ограниченной в норме пространства $\mathcal{J}$, можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по полунорме*

$$\sum_{n=1}^{\infty}k^2\left|\frac{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}\right|\frac{1}{\lambda_{2n}}\times \\ \times|(\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2.$$

Доказательство. Доказательство сводится к оценке

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}k^2\left|\frac{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)\Big|_{r=R}}\right|\frac{1}{\lambda_{2n}}\times \\ \times|(\operatorname{grad}_{\theta,\phi}\psi_n, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3}|^2 = \\ = \sum_{n=N+1}^{\infty}k^2\left|\frac{\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kr)\right)|_{r=R}}{\sqrt{R}\,H^1_{\sqrt{\lambda_{2n}+1/4}}(kR)}\right|\lambda_{2n}|\gamma_{1n}(R)|^2.$$

Для окончания доказательства необходимо использовать свойства логарифмической производной функций Ханкеля, сформулированные в утверждении 5, и применить неравенство Коши–Буняковского. Утверждение доказано.

Объединяя утверждения 4, 7 и 8, получаем, что верно следующее утверждение.

Утверждение 9. *Из любой последовательности, ограниченной в норме пространства $\mathcal{J}$, можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в норме $|b(H,H)|$.*

При любом фиксированном $\tilde{H}$ форма $b(H,\tilde{H})$ есть линейный непрерывный (так как ограниченный) функционал. По теореме Рисса для векторов $H \in \mathcal{J}$ и $\tilde{H} \in \mathcal{J}$ он представим в виде скалярного произведения, определенного в $\mathcal{J}$, т.е.

$$b(H,\tilde{H}) = a(AH,\tilde{H}),$$

где A – ограниченный оператор, действующий из $\mathcal{J}$ в $\mathcal{J}$. Форма $l(\tilde{H})$ есть также линейный непрерывный функционал, поэтому существует такой элемент $F \in \mathcal{J}$, что для всех $\tilde{H}$ будет выполнено равенство

$$l(\tilde{H}) = a(F,\tilde{H}).$$

В результате уравнение (16) примет вид

$$a(H,\tilde{H}) + a(AH,\tilde{H}) = a(F,\tilde{H}). \qquad (18)$$

Поскольку $\tilde{H}$ произволен, то можно записать (18) в виде

$$H + AH = F. \qquad (19)$$

Докажем, что оператор A компактен.

Утверждение 10. *Оператор A компактен.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим последовательность векторов $\{H_m\} \in \mathcal{J}$, такую, что $\forall m$ $\|H_m\|^2_{\mathcal{J}} < C$. Докажем, что из последовательности $\{AH_m\}$ можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в норме $\mathcal{J}$. Доказательство этого утверждения следует непосредственно из предыдущей теоремы, так как

$$\|AH_m - AH_k\|^2_{\mathcal{J}} = a(AH_m - AH_k, AH_m - AH_k) = \\ = b(H_m - H_k, AH_m - AH_k). \qquad (20)$$

По предыдущему утверждению, учитывая ограниченность A, выбором достаточно больших m и k правую часть (20) можно сделать меньше любого заданного ε. Следовательно, оператор A компактен. Утверждение доказано.

Таким образом, получаем, что задача для уравнения (16) сводится к фредгольмово разрешимой.

В результате для исходной задачи доказано следующее утверждение.

Утверждение 11. *Исходная задача дифракции в конусе сводится к фредгольмово разрешимой.*

Теперь докажем существование решения этой задачи. Для этого достаточно показать [16], что любое решение однородного уравнения

$$H + A^*H = 0 \qquad (21)$$

ортогонально правой части F уравнения (19). Справедливость уравнения (21) означает, что $\forall \tilde{H} \in \mathcal{J}$

$$a(H,\tilde{H}) + \overline{b(\tilde{H},H)} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} b(H,H) = 0.$$

Это означает, что

$$(\operatorname{rot} \chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3} = 0 \quad \forall n.$$

А тогда

$$a(F,H) = l(H) = f(R)(\operatorname{rot} \chi_n e_r, H)_{(L_2(\Omega(R)))^3} = 0,$$

где $f(R)$ — значение известной функции в точке $r = R$.

Применяя соответствующую теорему Фредгольма, получаем требуемое утверждение.

Утверждение 12. *Решение задачи для уравнения* (19) *(а значит, и исходной задачи дифракции) существует.*

Список литературы

1. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **73**, № 5. С. 917.
2. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1951. **80**, № 3. С. 345.
3. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
4. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* // Алгебра и анализ. 1993. **5**, № 1. С. 143.
5. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
7. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.
9. *Делицын А.Л.* // Дифференциальные уравнения. 2004. **40**, № 2. С. 198.
10. *Veck N.* // J. Math. Anal. Appl. 1974. **46**. P. 410.
11. *Делицын А.Л.* // Доклады РАН. 2004. **398**, № 3. С. 310.
12. *Делицын А.Л.* // Дифференциальные уравнения. 2005. **41**, № 3. С. 393.
13. *Делицын А.Л.* // Дифференциальные уравнения. 2005. **41**, № 8. С. 1.
14. *Делицын А.Л.* // Известия РАН, серия математическая. 2007. **71**, № 3. С. 61.
15. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
16. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.

Vector functional spaces related to the electromagnetic diffraction problem in a conical domain and their properties

I. A. Balantsev[a], **A. L. Delitsyn**

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia. E-mail: [a] laktan86@mail.ru.

Special vector functional space is defined for a weak formulation of diffraction problem in a cone. For this space, a number of embedding theorems are proved. It is shown also that the diffraction problem is reduced to the Fredholm equation.

Keywords: functional analysis.
PACS: 02.30.Sa.
Received 15 September 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Баланцев Илья Анатольевич — аспирант; e-mail: laktan86@mail.ru..
2. Делицын Андрей Леонидович — д. ф.-м. н., доцент; тел.: 939-10-33.