

Учет нарушений адиабатических условий в измерениях адиабатического термического коэффициента давления проводящих жидкостей

А. В. Соболева, Л. А. Благонравов^a

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра молекулярной физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: ^ablagonravova@mail.ru

Статья поступила 07.11.2008, подписана в печать 15.01.2009.

Получена аналитическая формула для поправочной функции, учитывающей нарушение адиабатических условий в динамических измерениях адиабатического термического коэффициента давления проводящих жидкостей [1]. Формула подтверждается с помощью численного расчета. Показано, что в зависимости от электропроводности материала и геометрии опыта поправка может составлять от 1 до 7%. Определение указанной поправочной функции имеет важное значение в исследованиях структурных переходов в металлических жидкостях.

Ключевые слова: адиабатический термический коэффициент давления, модуляционные методы измерения, жидкие металлы, теплопроводность.

УДК: 536.632. PACS: 65.20.-w.

Введение

Адиабатический термический коэффициент давления (АТКД), определяемый как $\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S$, согласно формуле В. Томсона, где S — энтропия, равен отношению коэффициента теплового расширения α_p к теплоемкости единицы объема $c_p \rho$ (c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность). Эта величина, зависящая как от термических, так и от калорических свойств среды, чувствительна к микроструктурным изменениям, в частности к структурным фазовым переходам. В работе [1] на температурной зависимости АТКД жидкого цезия была обнаружена аномалия в виде скачка при температуре 590 К. Интерес к измерению АТКД связан также с возможностью определения теплоемкости среды при известном коэффициенте теплового расширения. Измерения АТКД в работе [1] выполнялись с использованием модуляционного варианта методики, в котором изменение давления осуществлялось в периодическом режиме. Определение АТКД сводится к измерению амплитуды температурных колебаний среды и амплитуды колебаний давления, вызывающего указанный температурный отклик [2]. Высокая чувствительность в измерениях температурного отклика достигалась путем использования селективного усиления. Однако при этом оставалась проблема учета отклонения адиабатических условий от идеальности.

Вообще говоря, увеличивая частоту ω , можно добиться соблюдения идеальных адиабатических условий. Но на практике по ряду причин этого добиться не удается. Главной причиной является то, что частота ω ограничена сверху инерцией термопары. Поэтому приходится использовать не слишком высокие частоты, что приводит к необходимости учета нарушения адиабатических условий измерения.

В работе [1] был произведен расчет для поправочного множителя g_{ATCD} , учитывающего отклонение от идеальной адиабатичности эксперимента. Этот расчет был выполнен для образца радиусом 1 см, окруженного теплоизолирующей оболочкой из корунда, что позволило при определении температурного поля в оболочке ограничиться приближением плоского слоя. Необходимость использования образцов различных диаметров потребовала более точного расчета поправочной функции, так

как при работе с ячейками малых размеров приближение плоского слоя становится недостаточным.

1. Определение поправочной функции

Рассмотрим несколько идеализированный случай бесконечно протяженного образца цилиндрической формы радиуса R_1 , окруженного кольцевой цилиндрической теплоизолирующей оболочкой радиуса R_2 . Предполагается, что образец имеет высокую теплопроводность, а оболочка — низкую. Пусть w_1 — мощность, выделяемая в единице объема образца, а w_2 — мощность, выделяемая в единице объема оболочки. Допустим, w_1 и w_2 имеют постоянную и переменную составляющие, т. е.

$$w_1 = w_{10} + w_{12} e^{i\omega\tau}, \quad (1)$$

$$w_2 = w_{20} + w_{22} e^{i\omega\tau}. \quad (2)$$

Решение уравнений теплопроводности для стержня и оболочки можно записать в виде

$$t(r, \tau) = t_0 + \theta(r, \tau). \quad (3)$$

Здесь $t(r, \tau)$ — температура, $t_0(r)$ — постоянная, а $\theta(r, \tau)$ — переменная (периодическая) составляющая температуры.

После подстановки этого выражения в уравнения теплопроводности для стержня и оболочки и граничные условия получаются две независимые системы уравнений для t_0 и $\theta(r, \tau)$. Поскольку нас интересует только переменная составляющая температуры, то соответствующие ей уравнение теплопроводности и граничные условия примут вид

$$\frac{\partial \theta_1(r, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \theta_1(r, \tau) + \dot{\theta}_{1p}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_2(r, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \theta_2(r, \tau) + \dot{\theta}_{2p}, \quad (5)$$

$$\theta_1(R_1, \tau) = \theta_2(R_1, \tau), \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(R_1, \tau)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(R_1, \tau)}{\partial r}, \quad (7)$$

где a — температуропроводность, c_p — теплоемкость, ρ — плотность, λ_1 и λ_2 — теплопроводности сердцевины

и оболочки. Нижний индекс 1 соответствует образцу, а индекс 2 — оболочке.

В уравнениях (4) и (5) выражение $\dot{\theta}_p = \frac{w}{c_p \rho} e^{i\omega\tau}$ представляет собой объемный источник тепла, имеющий размерность температуры, деленной на время (точка сверху означает производную по времени). Эта величина с учетом упруготермического эффекта может быть представлена в виде

$$\dot{\theta}_p = \left(\frac{d\theta}{dP} \right)_S \left(\frac{dP}{d\tau} \right) = \left(\frac{T\alpha_p}{c_p \rho} \right) \left(\frac{dP}{d\tau} \right).$$

Если давление содержит переменную и постоянную составляющие, т.е. $P = \bar{P} + P_0 e^{i\omega\tau}$, то

$$\dot{\theta}_{1p} = i\omega \frac{T\alpha_p}{c_p \rho} P_0 e^{i\omega\tau} = i\bar{\omega} \theta_{1p} e^{i\omega\tau},$$

где $\theta_{1p} = P_0 \frac{T\alpha_p}{c_p \rho}$. Здесь α_p — коэффициент теплового расширения, P_0 — амплитуда колебаний давления. Слагаемым θ_{2p} в уравнении (5) можно пренебречь, поскольку θ_{2p} на два порядка меньше θ_{1p} .

В предшествующем варианте решения тепловой задачи [1] уравнение (5) записывалось и решалось в приближении плоского слоя, т.е. в выражении в скобках было опущено второе слагаемое, содержащее первую производную по r .

Для решения уравнений (4), (5) было применено преобразование Лапласа к переменной τ , в результате чего вместо уравнений (4), (5) были получены соответствующие уравнения для изображений, которые представляли собой уравнения Бесселя. Из граничных условий были определены значения постоянных. Найдено выражение для решения в изображении. Поскольку решение представляло собой отношение двух функций $\phi(s)$ и $\psi(s)$, то, согласно теореме Ващенко–Захарченко [3], обратное преобразование Лапласа имело вид суммы:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \right\} = \sum_{n=0}^l \frac{\phi(x_n)}{\psi'(x_n)} e^{x_n t}, \quad (8)$$

где x_n — корни функции $\psi(s)$. Поскольку интерес представляло решение на регулярной стадии процесса ($\tau \rightarrow \infty$), то сумма (8) включала в себя только два значения корня $s = 0$ и $s = i\omega$. В результате было получено выражение для амплитуды колебаний температуры

$$|\theta_1(r)| = \frac{T\alpha_p P_0}{c_p \rho} g(r, R_1, a_1, a_2, \omega), \quad (9)$$

где $g(r, R_1, a_1, a_2, \omega)$ — поправочная функция, учитывающая нарушение адиабатических условий измерения. Она имеет следующий вид:

$$g(r, R_1, a_1, a_2, \omega) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}}. \quad (10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A = \ker_1(2, 1) \operatorname{ber}_0(1, r) - \psi \operatorname{bei}_1(1, 1) \operatorname{ker}_0(2, 1) - \psi \operatorname{ber}_1(1, 1) \operatorname{kei}_0(2, 1) - \ker_1(2, 1) \operatorname{ber}_0(1, 1) + \operatorname{kei}_1(2, 1) \operatorname{bei}_0(1, r) - \operatorname{kei}_1(2, 1) \operatorname{bei}_0(1, 1),$$

$$B = \psi \operatorname{ber}_1(1, 1) \operatorname{ker}_0(2, 1) - \psi \operatorname{bei}_1(1, 1) \operatorname{kei}_0(2, 1) + \operatorname{bei}_0(1, r) \operatorname{ker}_1(2, 1) - \operatorname{bei}_0(1, 1) \operatorname{ker}_1(2, 1) + \operatorname{kei}_1(2, 1) \operatorname{ber}_0(1, r) - \operatorname{kei}_1(2, 1) \operatorname{ber}_0(1, 1),$$

$$C = \operatorname{bei}_0(1, 1) \operatorname{kei}_1(2, 1) - \psi \operatorname{bei}_1(1, 1) \operatorname{ker}_0(2, 1) -$$

$$- \psi \operatorname{ber}_1(1, 1) \operatorname{kei}_0(2, 1) - \operatorname{ber}_0(1, 1) \operatorname{ker}_1(2, 1),$$

$$D = \psi \operatorname{ber}_1(1, 1) \operatorname{ker}_0(2, 1) - \psi \operatorname{bei}_1(1, 1) \operatorname{kei}_0(2, 1) -$$

$$- \operatorname{ber}_0(1, 1) \operatorname{kei}_1(2, 1) - \operatorname{bei}_0(1, 1) \operatorname{ker}_1(1, 1).$$

Используются следующие сокращения в записи аргументов функций:

$$\operatorname{ber}(1, r) \equiv \operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}} r\right), \quad \operatorname{ber}(1, 1) \equiv \operatorname{ber}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}} R_1\right),$$

$$\operatorname{ker}(2, 1) \equiv \operatorname{ker}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_2}} R_1\right),$$

где функции ber , bei , ker , kei — функции Кельвина. Кроме того, принято обозначение $\psi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$.

2. Анализ полученных результатов

В результате проведенных вычислений удалось уточнить формулу для поправочной функции, полученную ранее. На рис. 1 показана зависимость поправочной функции g от линейной частоты ν для измерительных ячеек, имеющих радиус 1 и 0.3 см. Линии 1, 2 и 3, 4 соответствуют расчету для образца радиусом 0.3 и 1 см соответственно, причем линии 1 и 3 отвечают более точному расчету, приведенному в настоящей работе, а линии 2 и 4 — расчету, выполненному в приближении плоского слоя [1].

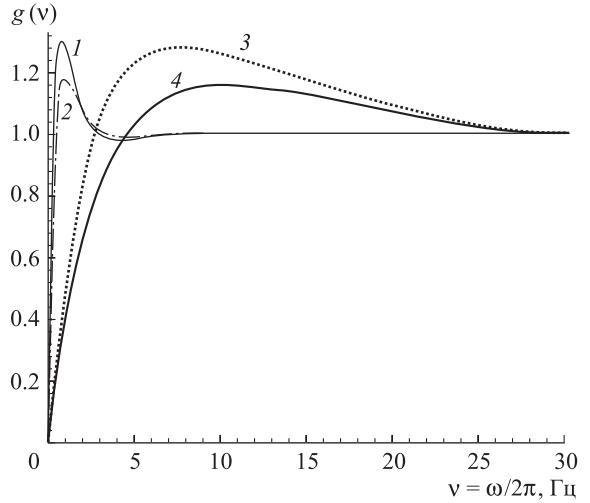


Рис. 1. Зависимость поправочной функции от линейной частоты для различных радиусов ячейки при комнатной температуре: 1, 3 — настоящая работа, 2, 4 — приближенный расчет; $R = 1$ см (1, 2) и 0.3 см (3, 4)

Из графика видно, что форма зависимости меняется незначительно для измерительных ячеек сравнительно больших размеров, и уточнение актуально в области частот 0.2–5 Гц. Далее обе линии сливаются, и поправочная функция становится равна 1, т.е. условия становятся адиабатическими. При использовании образца небольшого радиуса уточнение достаточно заметно до частоты 20 Гц.

Для подтверждения результатов, полученных аналитически, было найдено численное решение приведенной выше задачи теплопроводности для бесконечного образца с использованием неявной схемы Эйлера. Результаты

численного расчета, как видно из табл. 1 и 2, находятся в хорошем согласии с результатами, полученными по формуле (10).

Следующим этапом было нахождение численного решения уравнения теплопроводности для образца конечных размеров. В этом случае мы получаем двумерные линейные уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial t_1(r, y, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) t_1(r, y, \tau) + \frac{w_1}{c_{p1}\rho_1}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial t_2(r, y, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) t_2(r, y, \tau). \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) решались при следующих граничных условиях:

$$t_1(R_1, y, \tau) = t_2(R_1, y, \tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(R_1, y, \tau)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(R_1, y, \tau)}{\partial r},$$

$$t_1(r, 0, \tau) = \text{const}, \quad t_1(r, L, \tau) = \text{const}.$$

Уравнения (11) и (12) решались численно методом независимых потоков с применением неявной схемы Эйлера. Решение уравнений (11), (12) в центре образца ($r = 0$) представлено на рис. 2. Результаты для поправочной функции, учитывающей нарушения адиабатических условий в измерениях АТКД в центре исследуемого образца, полностью совпадают с результатами, полученными численно для цилиндра, имеющего бесконечный линейный размер.

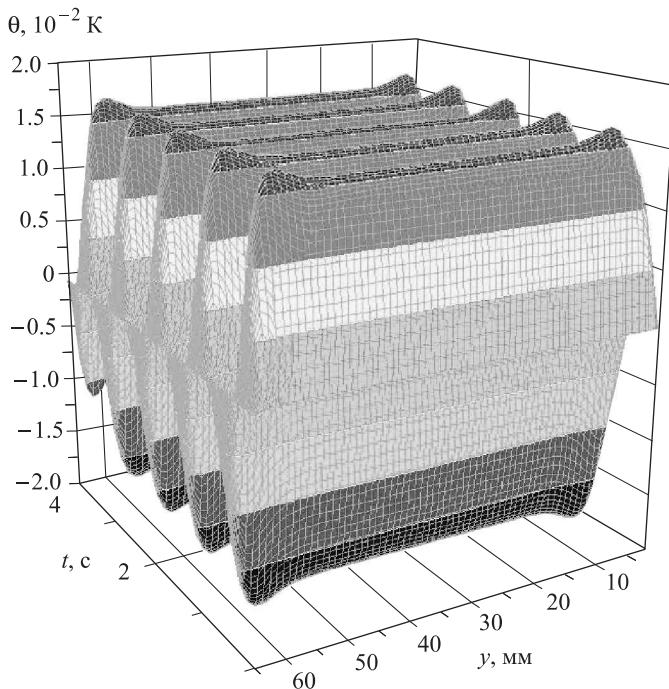


Рис. 2. Решение задачи теплопроводности для образца конечных размеров в центре по радиусу. Температурная шкала приведена относительно средней комнатной температуры

Эксперимент проводился на частоте 2.23 Гц, поэтому изменения значения поправочной функции в нашем случае были заметны. Табл. 1, 2 демонстрируют различие для поправочных функций, рассчитанных по двум различным формулам. Все расчеты проведены для цезия в интересующих нас температурных интервалах.

Таблица 1
Расчет для цезия при $R = 1$ см, $\nu = 2.23$ Гц, $r = 0$

T , К	ψ	g		
		g_1	g_2	g_3
300	0.325	1.0241	1.0152	1.0152
400	0.328	1.0338	1.0267	1.0267
500	0.343	1.0504	1.0473	1.0473
600	0.359	1.0658	1.0679	1.0679
700	0.369	1.0742	1.0796	1.0797

В табл. 1 даны значения поправочных функций при различных температурах. Видно, что при низких температурах поправочная функция, рассчитанная по формуле (10) (обозначим ее g_2), меньше поправочной функции g_1 (поправочная функция согласно [1]). При температурах около 600 К функции выравниваются, а при дальнейшем увеличении температуры g_2 становится больше, чем g_1 . Результаты численного расчета, обозначенные как g_3 , практически совпадают с результатами, полученными по аналитической формуле, представленной в настоящей работе.

В табл. 2 приведена температурная зависимость поправочной функции для другой геометрии ячейки, имеющей радиус 0.3 см.

Таблица 2
Расчет для цезия при $R = 0.3$ см, $\nu = 2.23$ Гц, $r = 0$

T , К	ψ	g		
		g_1	g_2	g_3
300	0.325	0.822	1.017	1.017
400	0.328	0.794	0.989	0.989
500	0.343	0.753	0.951	0.950
600	0.359	0.719	0.919	0.918
700	0.369	0.701	0.904	0.903

Из таблицы видно, что при небольшом радиусе измерительной ячейки поправочная функция g_1 отличается от поправочной функции g_2 на 20%.

Заключение

Правильные оценки влияния нарушения адиабатических условий имеют большое значение не только в измерениях АТКД. Они важны в измерениях теплоемкости, проводимых методом периодического нагрева. Учет неадиабатичности условий измерения необходим также при использовании нового, модуляционного метода измерения коэффициента теплового расширения проводящих жидкостей [4]. Корректный учет нарушений условий адиабатичности должен позволить прийти к согласованным результатам по теплоемкости, коэффициенту теплового расширения и АТКД, получаемым с помощью перечисленных методов.

Список литературы

- Благонравов Л.А., Орлов Л.А., Сковородько С.Н., Алексеев В.А. // Теплофизика высоких температур. 2000. **38**, № 4. С. 542.
- Благонравов Л.А., Модхен Ф. // Приборы и техника эксперимента. 1991. № 4. С. 167.
- Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1952.
- Благонравов Л.А., Карчевский О.О., Иванников П.В., Соболева А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 1. С. 50.

Measurements of adiabatic thermal pressure coefficient of conduct liquids with due regard for the violation of the adiabatic conditions**A. V. Soboleva, L. A. Blagonravov^a***Department of Molecular Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail:* ^a blagonravova@mail.ru.

The analytic expression for the adjustment function taking into account the violation of the adiabatic conditions in dynamic measurements of the adiabatic thermal pressure coefficient of conduct liquids is given. It is corroborated with the numerical calculations. It is shown that the correction may be on the order of 1 to 7% depending on the electro conductivity of the material and the geometry of the experiment. Determination of the adjustment function is of great importance in investigation of the structure transformation in metallic liquids.

Keywords: adiabatic thermal pressure coefficient, modulation method, liquid metals, heat conduction.

PACS: 65.20.-w.

Received 7 November 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Соболева Анна Владимировна — аспирантка; тел.: 939-43-88, e-mail: velytsok@mail.ru.
2. Благонравов Лев Александрович — к. ф.-м. н., доцент; тел.: 939-43-88, e-mail: blagonravova@mail.ru.