ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Эволюция одиночного вихря в однородной неравновесной среде

Н. А. Винниченко[a], А. И. Осипов, А. В. Уваров

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра молекулярной физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: [a] nickvinn@yandex.ru

Статья поступила 09.10.2008, подписана в печать 26.12.2008.

Решена задача об эволюции одиночного вихря в неравновесной среде с энерговкладом, зависящим от температуры или от плотности. Показано, что в устойчивой к малым возмущениям среде происходит переход вихря в новое стационарное состояние, распада вихря не происходит. Для энерговклада, зависящего от температуры, в пределах малого и большого времени релаксации получены аналитические решения, описывающие процесс изменения характеристик вихря. Проведено сравнение с результатами численного моделирования методом Годунова.

Ключевые слова: неравновесный газ, круговой вихрь, распад вихря, устойчивость.

УДК: 532.517.43:533.6.011. PACS: 47.70.Nd, 47.32.cd.

Введение

В последние годы в связи с развитием скоростных летательных аппаратов и с проблемами оптимизации газодинамических лазеров возрос интерес к вопросам эволюции газодинамических возмущений, в том числе и вихревых, в потоке неравновесного газа, в котором энергия во внутренних степенях свободы молекул не равна равновесному значению [1–4]. Механизм взаимодействия вихрей и неравновесной среды известен: наличие вихревой структуры приводит к изменению температуры или плотности среды и дополнительному сбросу энергии из внутренних степеней свободы. Этот энерговклад в свою очередь приводит к изменению газодинамических параметров вихря. Тем не менее до сих пор остается открытым принципиальный вопрос об окончательном состоянии вихрей в неравновесной среде: исчезают ли вихри в среде с энерговкладом, распадаются ли в результате развития неустойчивостей или же сохраняются, меняя свои характеристики? Цель настоящей работы — рассмотреть задачу об эволюции одиночного кругового вихря в однородной неравновесной области аналитически и при помощи численного моделирования. Используются два типа энерговклада: зависящий от температуры и зависящий от плотности, — и обсуждается устойчивость среды для каждого из типов энерговклада.

1. Постановка задачи

Рассмотрим эволюцию вихря в однородной неравновесной сжимаемой среде, описываемой уравнениями Эйлера в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\rho v_r}{r}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial v_r}{\partial r}=0,\\
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=0,\\
&c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v_r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=Q,\\
&p=\frac{R}{\mu}\rho T.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь v_r и v_φ — радиальная и угловая компоненты скорости, ρ, p и T — плотность, давление и температура, Q — энерговклад, R — газовая постоянная, c_p и μ — изобарная теплоемкость и молярная масса газа. Энерговклад Q может зависеть от плотности и температуры среды, что приводит к взаимному влиянию вихревого течения и неравновесных процессов в среде. В качестве энерговклада, зависящего от температуры, рассмотрим энерговклад в колебательно-неравновесном газе в модели постоянной колебательной энергии

$$Q(T)=\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\rm eq}(T)}{\tau(T)}-\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\rm eq}(T_0)}{\tau(T_0)},\tag{2}$$

где $\varepsilon=\text{const}$ — колебательная энергия, $\varepsilon_{\rm eq}(T)$ — равновесное значение колебательной энергии, соответствующее температуре T, $\tau(T)$ — время релаксации, T_0 — температура невозмущенной среды. При численном моделировании время релаксации τ либо предполагалось постоянным (для сравнения с аналитическим решением), либо использовалась формула Ландау–Теллера $\tau=A\exp(B/T^{1/3})$. Величина времени релаксации варьировалась в широком диапазоне, поскольку некоторые эксперименты [5] показывают, что около 25% энергии разряда может непосредственно переходить в тепло, тогда как остальная часть релаксирует довольно медленно.

Подобная постановка задачи использовалась в работе [2], где рассматривался энерговклад, зависящий от плотности:

$$Q(\rho)=q\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\tag{3}$$

(q — постоянный параметр, ρ_0 — плотность невозмущенной среды). Такая модель энерговклада используется иногда в физике плазмы, где энерговклад считается пропорциональным температуре электронов, а она в свою очередь пропорциональна отношению электрического поля к плотности. Заметим, что в отсутствие вихря для обоих типов энерговклада суммарный энерговклад равен нулю, т.е. энергия, поступающая из внутренних степеней свободы, в невозмущенной среде уравновешивается теплоотдачей. Таким образом, в отсутствие вихря среда стационарна.

В качестве начального условия рассмотрим круговой вихрь с нулевой радиальной скоростью и произвольными профилями угловой компоненты скорости и плотности:

$$v_r(r) \equiv 0, \quad v_\varphi(r) = v_{\varphi 0}(r), \quad \rho(r) = \rho_0(r),$$
$$p(r) = p_\infty - \int\limits_r^\infty \frac{\rho_0(x) v_{\varphi 0}^2(x)}{x}\, dx, \quad T(r) = \frac{\mu}{R}\frac{p(r)}{\rho(r)}. \qquad (4)$$

В отсутствие энерговклада в невязкой жидкости такой вихрь стационарен. Таким образом, мы рассматриваем именно взаимодействие вихря и неравновесного состояния среды.

Стоит заметить, что, несмотря на то что круговой вихрь является принципиально дозвуковым течением, для адекватного описания его изменения в неравновесной среде необходимо использовать систему уравнений (1) для сжимаемой жидкости. Действительно, приближение Буссинеска, в рамках которого часто рассматривают течения в среде с энерговкладом, в случае, когда все величины зависят только от r и t, приводит к уравнению непрерывности в виде $\partial(r v_r)/\partial r = 0$, откуда следует, что $v_r(r,t) \equiv 0$, что при подстановке в уравнение движения дает $\partial v_\varphi/\partial t = 0$, т.е. параметры вихря в приближении Буссинеска не меняются.

2. Численное моделирование

Было проведено численное моделирование задачи (1)–(4) методом Годунова первого порядка с точным решением задачи Римана. Граничные условия на оси были получены с помощью разложения уравнений системы (1) в ряд по степеням r [6]. Граничные условия на бесконечности были заданы следующим образом: $v_r(r_{\max}) = \partial^2 v_\varphi/\partial r^2(r_{\max}) = \partial^2 T/\partial r^2(r_{\max}) = \partial^2 \rho/\partial r^2(r_{\max}) = 0$; граничное условие для давления следует из уравнения состояния. На рис. 1 показаны результаты численного моделирования для изначально однородного по плотности вихря Гаусса: $\rho_0(r) = \rho_\infty = \mathrm{const}$, $v_{\varphi 0}(r) = v_0 r \exp((1-r^2)/2)$ и энерговклада (2). Число Маха 1/30, поступательная температура невозмущенной среды 300 К, колебательная температура 3000 К, время релаксации 10^{-8} с, что намного меньше типичного времени колебательной релаксации (моделирование непосредственного перехода энергии разряда в тепло). Значения радиальной скорости и поправки к угловой скорости нормированы на v_0, плотности — на ρ_∞, значения времени указаны в секундах, r — в радиусах вихря. При моделировании использовалась неравномерная сетка со сгущением при малых r, состоящая из 500 точек, правая граница $r_{\max} = 40$.

Наличие вихря приводит к изменению температуры и плотности среды и появлению ненулевого энерговклада, изменяющего характеристики вихря. Конечное состояние, образующееся в результате взаимодействия, будет стационарно, если суммарный энерговклад в нем снова станет равным нулю. Таким образом, вихрь переходит в изотермическое состояние $T(r) = T_0$ в среде с энерговкладом (2) и в состояние с постоянной плотностью $\rho(r) = \rho_0$ в среде с энерговкладом (3). Процесс изменения параметров вихря определяется соотношением скоростей двух процессов с характерными временами: временем выравнивания температуры $t_{\mathrm{iso}T} \approx c_p \tau / c_{\mathrm{vib}}$, где c_{vib} — теплоемкость колебательных степеней свободы, и временем движения образующейся волны $t_{\mathrm{wave}} \approx R_{\mathrm{vor}}/c_s$, где R_{vor} — радиус вихря, c_s — скорость звука. Если $t_{\mathrm{iso}T} \ll t_{\mathrm{wave}}$, как в случае, показанном на рис. 1, то температура быстро приходит к значению $T(r) = T_0$, при этом остальные переменные, кроме давления, не успевают измениться. На следующем этапе формируется волна, которая уносит лишнюю массу от оси вихря, оставляя за собой измененный профиль угловой компоненты скорости. В конечном состоянии после ухода волны радиальная скорость равна нулю, угловая компонента скорости меняется на величины порядка $(\rho_0 - \rho_{\mathrm{iso}T}) v_0/\rho_\infty$. Если, напротив, $t_{\mathrm{iso}T} \gg t_{\mathrm{wave}}$, то амплитуда образующейся волны заметно меньше, поскольку вложенная энергия успевает лучше распределиться, эволюция вихря протекает дольше, но результат — изменение угловой компоненты скорости и унос массы от оси вихря — очень близок к случаю малого времени релаксации. Подчеркнем, что вихрь не исчезает и не распадается, а переходит в новое стационарное состояние с несколько измененными характеристиками.

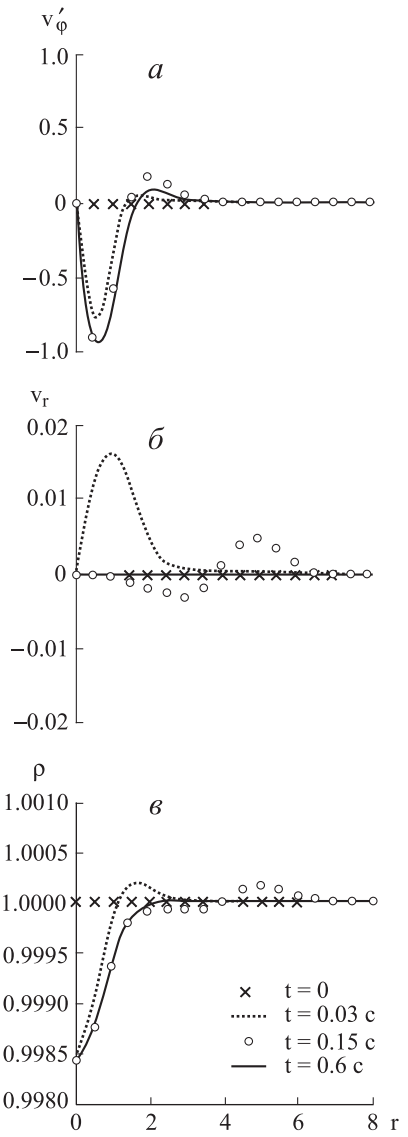

Рис. 1. Эволюция вихря в среде с энерговкладом, зависящим от температуры. Показаны радиальные профили: *а* — поправки к угловой компоненте скорости; *б* — радиальной компоненты скорости; *в* — плотности — в различные моменты времени

3. Аналитическое решение при малом времени релаксации

Если время релаксации достаточно мало и $t_{\mathrm{iso}T} \ll \ll t_{\mathrm{wave}}$, процессы выравнивания температуры и распространения волны можно разделить во времени. Это позволяет построить аналитическое решение для малых времен релаксации и небольших чисел Маха ($M^2 \ll 1$). После перехода вихря в изотермическое состояние $T(r) = T_0$ уравнения непрерывности и движения можно линеаризовать относительно изотермического вихря с начальным профилем угловой компоненты скорости: $v_r \equiv v'_r(r,t)$, $v_\varphi = v_{\varphi 0}(r) + v'_\varphi(r,t)$, $\rho = \rho_{\mathrm{iso}T}(r) + \rho'(r,t)$, где $\rho_{\mathrm{iso}T}(r) = \rho_\infty \exp\left(-\frac{\mu}{RT_0}\int\limits_r^\infty \frac{v^2_{\varphi 0}(x)}{x}\,dx\right)$ — распределение плотности в вихре с угловой скоростью $v_{\varphi 0}(r)$ и температурой T_0. В результате решения полученной системы уравнений можно получить решение для поправок к плотности и компонентам скорости в виде ряда Фурье–Бесселя

$$
\begin{aligned}
v'_r(r,t) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{La_i}{\mu_i}\sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}\right)\frac{J_1\left(\frac{\mu_i r}{L}\right)}{\rho_{\mathrm{iso}T}(r)}\sin\left(\sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}\frac{\mu_i}{L}t\right),\\
v'_\varphi(r,t) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{L^2}{\mu_i^2}a_i\frac{J_1\left(\frac{\mu_i r}{L}\right)}{\rho_{\mathrm{iso}T}(r)}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}\frac{\mu_i}{L}t\right)\right)\times\\
&\quad\times\left(\frac{\partial v_{\varphi 0}}{\partial r}+\frac{v_{\varphi 0}}{r}\right),\\
\rho'(r,t) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{L}{\mu_i}a_i\left(1-J_0\left(\frac{\mu_i r}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}\frac{\mu_i}{L}t\right)\right)+\\
&\quad+\rho_0(0)-\rho_{\mathrm{iso}T}(0).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь μ_i — положительные корни функции Бесселя $J_1(x)$, L — длина отрезка, на котором выполняется разложение в ряд, $a_i = \frac{2}{(J_2(\mu_i))^2}\frac{1}{L^2}\int\limits_0^L r\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial r}-\frac{\partial\rho_{\mathrm{iso}T}}{\partial r}\right)J_1\left(\frac{\mu_i r}{L}\right)dr$ — коэффициенты разложения. Это решение описывает волну изменения плотности и скорости в вихре после быстрого прихода в изотермическое состояние. Сравнение аналитического решения (5) с результатами численного моделирования для времени релаксации 10^{-8} с ($t_{\mathrm{iso}T}/t_{\mathrm{wave}} \approx 7\cdot 10^{-4}$) показало хорошее согласие, максимальное отклонение составило 4% для профиля угловой компоненты скорости и около 20% для радиальной, что объясняется как приближенным характером аналитического решения, так и наличием численной вязкости, влияющей на численное решение.

4. Аналитическое решение при большом времени релаксации

Если выделение энергии, напротив, происходит медленно по сравнению с распространением газодинамических возмущений ($t_{\mathrm{iso}T} \gg t_{\mathrm{wave}}$), амплитуда образующейся волны мала и давление меняется слабо. Это позволяет записать уравнение энергии в виде $c_p\partial T/\partial t = Q$, пренебрегая процессом распространения звуковых волн, и с учетом уравнения состояния при неизменном давлении получить приближенное решение для температуры и плотности. Линеаризовав затем оставшиеся уравнения относительно исходного вихря, можно получить решение для возмущений давления и скорости

$$
\begin{aligned}
v_r(r,t) &= \frac{-\int\limits_0^r \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}x\,dx}{r\rho(r,t)},\\
v'_\varphi(r,t) &= -\left(\frac{\partial v_{\varphi 0}}{\partial r}+\frac{v_{\varphi 0}}{r}\right)\int\limits_0^t v_r(r,\tau)\,d\tau,\\
p'(r,t) &= \int\limits_r^\infty \rho(x,t)\left(\frac{\partial v_r(x,t)}{\partial t}-\frac{2v_{\varphi 0}(x)v'_\varphi(x,t)}{x}\right)dx.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Это решение недостаточно точно описывает начальную фазу эволюции вихря (рис. 2, *а*), поскольку не учитывает распространение звуковых волн, но адекватно предсказывает последующие стадии и результат изменения параметров вихря (рис. 2, *б*).

5. Устойчивость неподвижной среды к малым возмущениям

Вопрос устойчивости вихря в процессе эволюции в среде с энерговкладом связан с вопросом устойчивости самой среды к малым возмущениям. В случае энерговклада (2) известно, что при достаточно резком уменьшении времени релаксации с ростом тем-

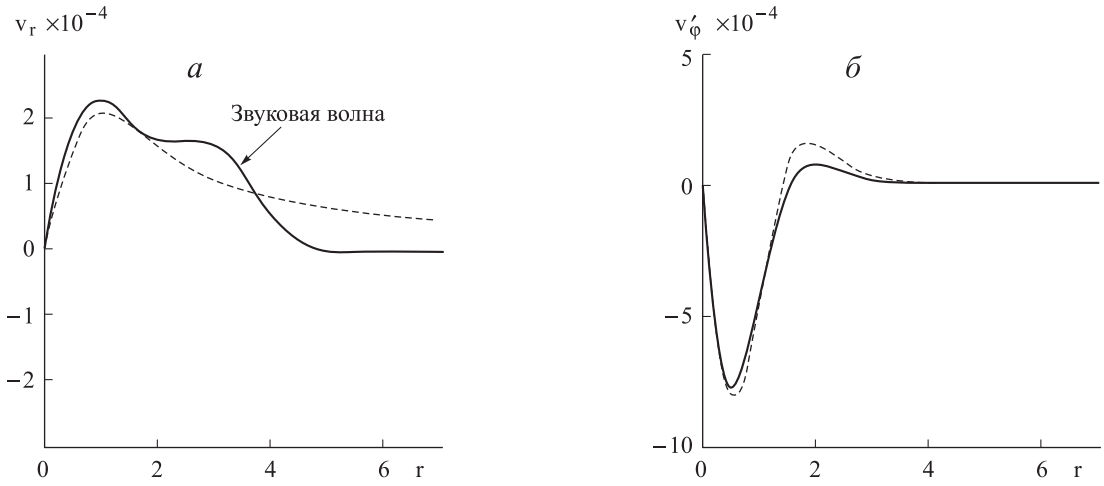

Рис. 2. Сравнение численного моделирования и аналитического решения (6) для $\tau = 10^{-3}$ с: *а* — профиль радиальной скорости, $t = 0.1$ с; *б* — профиль угловой компоненты скорости, $t = 5$ с

пературы среда неустойчива, в ней происходит усиление как акустической, так и тепловой мод [7]. Если ввести параметр α, связанный с зависимостью $\tau(T)$ и с запасом энергии в колебательных степенях свободы $\alpha = c_{\rm vib}/\tau + (\varepsilon - \varepsilon_{\rm eq}(T_0)) \cdot (\partial\tau/\partial T)/\tau^2$, то оказывается, что среда устойчива по отношению к малым возмущениям при $\alpha \geqslant 0$ и неустойчива при $\alpha < 0$. С учетом вязкости и теплопроводности среда устойчива к достаточно коротковолновым возмущениям и при отрицательных α. Оценивая минимальное волновое число возникающих при перестройке вихря возмущений как $k \approx 1/R_{\rm vor}$, можно получить оценку устойчивости в виде

$$\mathrm{Re}\,\frac{|\alpha|}{c_p\omega} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Pr}} + \frac{4}{3(\gamma-1)}, \qquad (7)$$

где ω — максимальная угловая скорость вихря, $\mathrm{Re} = \omega R_{\rm vor}^2\rho/\eta$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Pr} = \eta c_p/\lambda$ — число Прандтля, η — вязкость, λ — теплопроводность, γ — показатель адиабаты. Сравнение (7) с результатами численного моделирования эволюции вихря показывает, что такая оценка справедлива и для случая среды с вихрем. Следует заметить, что соотношение (7) справедливо при произвольной зависимости $\tau(T)$.

В случае энерговклада (3) в отсутствие вязкости и теплопроводности среда оказывается неустойчивой при любых ненулевых значениях параметра q. При положительных q усиливается акустическая мода, при отрицательных — тепловая. В работе [2] было обнаружено быстрое исчезновение вихря при отрицательных значениях q. Как видно из анализа устойчивости неподвижной среды, оно является просто развитием неустойчивости тепловой моды в среде с энерговкладом (3), а не чем-то специфичным для самого вихря. Эта неустойчивость известна в физике лазеров как ионизационно-перегревная, или тепловая [8], и является основным препятствием для создания более мощных газодинамических лазеров. С учетом вязкости и теплопроводности среда оказывается устойчивой для достаточно коротковолновых возмущений:

$$-\frac{1}{(\gamma-1)\,\mathrm{Pr}} \leqslant \mathrm{Re}\,\frac{q}{\omega c_s^2} \leqslant \frac{4}{3(\gamma-1)} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}. \qquad (8)$$

Сравнение оценки (8) с результатами численного моделирования эволюции вихря показывает неплохое согласие.

Выводы

Таким образом, показано, что изменение вихря в неравновесной среде зависит от свойств среды и размеров вихря. Если среда устойчива к малым возмущениям, вихрь перестраивается в новое состояние, постепенно затухая при наличии вязкости, распада или быстрого исчезновения вихря при этом не происходит. Процесс перестройки вихря включает выравнивание параметра, соответствующего типу энерговклада, и движение волны перераспределения плотности и скорости от оси вихря. Если среда неустойчива, то для больших вихрей, для которых не выполнены условия устойчивости ((7) для энерговклада (2) или (8) для энерговклада (3)), происходит усиление тепловых и акустических возмущений, а малые вихри перестраиваются в новое состояние, одновременно затухая из-за вязкости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00203).

Список литературы

1. *Казаков А.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 56.
2. *Soukhomlinov V.S., Sheverev V.A., Ötügen M.V.* // Phys. Fluids. 2005. **17**. P. 058102.
3. *Винниченко Н.А., Никитин Н.В., Уваров А.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 107.
4. *Osipov A.I., Uvarov A.V., Vinnichenko N.A.* // Phys. Fluids. 2006. **18**. P. 105106.
5. *Znamenskaya I.A., Koroteev D.A., Lutsky A.E.* // Phys. Fluids. 2008. **20**. P. 056101.
6. *Constantinescu G.S., Lele S.K.* // J. Comput. Phys. 2002. **183**. P. 165.
7. *Осипов А.И., Уваров А.В.* // УФН. 1996. **166**, № 6. С. 639.
8. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М., 1992.

Evolution of a single vortex in uniform non-equilibrium medium

N. A. Vinnichenko[a], **A. I. Osipov, A. V. Uvarov**

Department of Molecular Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] nickvinn@yandex.ru.

The problem of a single vortex evolution in a non-equilibrium medium with temperature-dependent or density-dependent energy release is solved. It is shown that if the medium is stable against small perturbations the vortex transforms into a new stationary state, no vortex breakdown occurs. For the temperature-dependent energy release, in the limits of small and large relaxation time, analytical solutions are derived, describing the process of vortex transformation. The comparison with the results of numerical simulations using Godunov method is performed.

Keywords: nonequilibrium gas, columnar vortex, vortex breakdown, stability.
PACS: 47.70.Nd, 47.32.cd.
Received 9 October 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторах

1. Винниченко Николай Аркадьевич — к. ф.-м. н., научн. сотр.; тел.: 939-27-41, e-mail: nickvinn@yandex.ru.
2. Осипов Алексей Иосифович — д. ф.-м. н., профессор; тел.: 939-27-41, e-mail: osipov@phys.msu.ru.
3. Уваров Александр Викторович — д. ф.-м. н., профессор; тел.: 939-27-41, e-mail: uvarov@phys.msu.ru.