Поток мощности направляемой моды световода

В. И. Кривенков

Московский государственный университет приборостроения и информатики. Россия, 107846, Москва, ул. Стромынка, д. 20. E-mail: krivenkov.v@gmail.com

Статья поступила 24.11.2008, подписана в печать 04.02.2009.

Интеграл $\int\limits_\Omega \Phi\Psi\, d\Omega$ по произвольной плоской области Ω, где скалярные функции точки Φ и Ψ являются решениями двумерного уравнения Гельмгольца, представлен, как контурный, в инвариантном виде и в трех основных ортогональных системах координат на плоскости (декартовой, полярной и эллиптической). Получено инвариантное выражение в виде контурного интеграла для потока мощности направляемой моды через произвольную область поперечного сечения световода, диэлектрическая проницаемость которой имеет постоянное значение.

Ключевые слова: световод, направляемая мода.

УДК: 621.396.22.029.7. PACS: 42.81.–i.

Многие уникальные свойства весьма популярных с точки зрения перспективы широкого использования в различных областях науки и техники микроструктуированных световодов [1, 2] можно объяснить исходя из распределения по сечению потоков мощности их направляемых мод. Например, возможность реализации одномодового режима работы в широком диапазоне длин волн или наличие запрещенных фотонных зон, когда в определенных диапазонах длин волн излучение не может проникать в оболочку. Однако при численном исследовании распределения потоков мощности направляемых мод по сечению указанных световодов следует учитывать, что недостаточно высокая точность расчетов может изменить качественную сущность полученных результатов.

Многие методы решения задачи о собственных волнах (направляемых модах) световодов со сложной формой поперечного сечения, каковыми по сути являются микроструктуированные световоды, позволяют наряду с дисперсионными характеристиками определять конфигурацию электромагнитного поля направляемых мод в поперечном сечении рассматриваемых световодов. В основном это конечно-разностные методы, точность которых сравнительно невелика. Метод, позволяющий с высокой точностью определять дисперсионные характеристики и составляющие электромагнитного поля направляемых мод световодов со сложной формой поперечного сечения, представлен в работах [3, 4].

Цель настоящей работы — получить выражение в виде контурного интеграла для усредненного по времени t потока мощности направляемой моды

$$P_\Omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_\Omega S_z\, d\Omega,$$

где S_z — составляющая вектора Пойнтинга вдоль оси световода (ось z), через произвольную область Ω поперечного сечения световода, диэлектрическая проницаемость которой ε имеет постоянное значение.

Прежде всего в виде контурного представим интеграл $\int\limits_\Omega \Phi\Psi\, d\Omega$ по плоской области Ω, ограниченной контуром L, где скалярные функции $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r})$ и $\Psi = \Psi(\boldsymbol{r})$ точки $\boldsymbol{r}$ на плоскости удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$(\nabla_t^2 + u^2)\begin{Bmatrix}\Phi\\ \Psi\end{Bmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где ∇_t — двумерный аналог оператора Гамильтона ∇.

Используя двумерные формулы Грина [5], можно показать, что

$$\int\limits_\Omega \Phi\Psi\, d\Omega = \frac{1}{2}u^2\oint\limits_L \big[u^2\Phi\Psi\boldsymbol{r} + (r\cdot\nabla_t\Phi)\nabla_t\Psi + (\boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_t\Phi)\boldsymbol{U}\nabla_t\Psi\big]\cdot\boldsymbol{U}\, d\boldsymbol{r}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{U}$ — оператор поворота на плоскости на угол $-\pi/2$.

Принимая во внимание ключевой характер интегрального соотношения (2), представим его в наиболее часто используемых ортогональных системах координат на плоскости, а именно в декартовой [6] x, y:

$$\iint\limits_\Omega \Phi\Psi\, dx\, dy = \frac{1}{2u^2}\Bigg[\oint\limits_L u^2\Phi\Psi(x\, dy - y\, dx) + \oint\limits_L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)(x\, dy + y\, dx) + \oint\limits_L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)(y\, dy - x\, dx)\Bigg],$$

в полярной [6, 7] r, φ, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\iint\limits_\Omega \Phi\Psi r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2u^2}\oint\limits_L\left(u^2r^2\Phi\Psi + r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)d\varphi - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)dr$$

и в эллиптической ξ, η, $x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta$:

$$\iint\limits_\Omega \Phi\Psi g\, d\xi\, d\eta = \frac{a^2}{4u^2}\Bigg[\oint\limits_L u^2\Phi\Psi(\sin 2\eta\, d\xi + \mathrm{sh}\, 2\xi\, d\eta) -$$

$$-\oint\limits_L \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)(\sin 2\eta\, d\xi-\operatorname{sh}2\xi\, d\eta)-$$

$$\left.-\oint\limits_L \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)(\operatorname{sh}2\xi\, d\xi+\sin 2\eta\, d\eta)\right],$$

где $g=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{a^2}{2}(\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta)$, a — половина расстояния между фокусами софокусных эллипсов ($\xi=\mathrm{const}$) и гипербол ($\eta=\mathrm{const}$).

При решении поставленной задачи будем исходить из стандартной модели световода как однородной вдоль некоторой оси z бесконечно протяженной диэлектрической структуры, направляемые моды которой представляют собой параметрические семейства собственных волн, распространяющихся вдоль оси z, векторы напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и магнитного поля $\boldsymbol{H}$ которых могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},z,t)&=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})\exp[j(\omega t-\beta z)],\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},z,t)&=\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})\exp[j(\omega t-\beta z)],\end{aligned}\qquad(3)$$

где ω и β — круговая частота и постоянная продольного распространения, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, j — мнимая единица.

Учитывая выражения (3), поток мощности P_Ω представим в виде

$$P_\Omega=\frac{c}{2}\int\limits_\Omega \boldsymbol{e}_\perp\cdot\boldsymbol{U}\boldsymbol{h}_\perp^*\,d\Omega,$$

где $\boldsymbol{e}_\perp=\boldsymbol{e}_\perp(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{h}_\perp=\boldsymbol{h}_\perp(\boldsymbol{r})$ — векторные функции точки $\boldsymbol{r}$ поперечного сечения световода — поперечные составляющие векторов $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$, $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ — скорость света в вакууме.

Продольные составляющие $e_z=e_z(\boldsymbol{r})$ и $h_z=h_z(\boldsymbol{r})$ векторов $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$ следует рассматривать как скалярные функции точки $\boldsymbol{r}$ поперечного сечения световода, которые, как известно, при $\varepsilon=\mathrm{const}$ удовлетворяют уравнению (1), где $u^2=k_0^2(\varepsilon-n_e^2)$, $n_e=\beta/k_0$ — эффективный показатель замедления фазовой скорости, $k_0=\omega/c$ — волновое число в вакууме.

Используя уравнения Максвелла для немагнитной однородной диэлектрической среды без пространственных зарядов и токов [8, 9], можно показать, что

$$\boldsymbol{e}_\perp=-\frac{j}{k_0(\varepsilon-n_e^2)}(n_e\nabla_t e_z+\boldsymbol{U}\nabla_t h_z),$$

$$\boldsymbol{h}_\perp=-\frac{j}{k_0(\varepsilon-n_e^2)}(n_e\nabla_t h_z-\varepsilon\boldsymbol{U}\nabla_t e_z),$$

и представить поток мощности P_Ω в виде

$$P_\Omega=\frac{c}{2k_0^2(\varepsilon-n_e^2)^2}\int\limits_\Omega\Big[n_e\big(\varepsilon|\nabla_t e_z|^2+|\nabla_t h_z|^2\big)+$$
$$+(\varepsilon+n_e^2)\nabla_t e_z\cdot\boldsymbol{U}\nabla_t h_z\Big]d\Omega.$$

Применив к последнему выражению двумерные формулы Грина [5] с учетом интегрального соотношения (2), получим следующее инвариантное выражение в виде контурного интеграла для потока мощности направляемой моды через область Ω поперечного сечения световода с постоянной диэлектрической проницаемостью:

$$P_\Omega=\frac{cn_e}{4k_0^2(\varepsilon-n_e^2)^2}\Bigg\{\oint\limits_L\varepsilon(\boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_t e_z)\,de_z+$$
$$+[\boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_t h_z+2(n_e+\varepsilon/n_e)e_z]\,dh_z+$$
$$+\oint\limits_L\big[k_0^2(\varepsilon-n_e^2)(\varepsilon e_z^2+h_z^2)\boldsymbol{r}+\varepsilon(\boldsymbol{r}\cdot\nabla_t e_z+2e_z)\nabla_t e_z+$$
$$\left.+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla_t h_z+2h_z)\nabla_t h_z\big]\cdot\boldsymbol{U}\,d\boldsymbol{r}\right\},$$

которое в прямоугольной декартовой системе координат x,y на плоскости поперечного сечения световода имеет вид [6]

$$P_\Omega=\frac{cn_e}{4k_0^2(\varepsilon-n_e^2)^2}\Bigg\{k_0^2(\varepsilon-n_e^2)\oint\limits_L(\varepsilon e_z^2+h_z^2)(x\,dy-y\,dx)+$$
$$+\oint\limits_L\left[\varepsilon\left(\frac{\partial e_z}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial h_z}{dx}\right)^2-\varepsilon\left(\frac{\partial e_z}{dy}\right)^2-\left(\frac{\partial h_z}{dy}\right)^2\right](x\,dy+y\,dx)+$$
$$+2\oint\limits_L\left(\varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial x}\frac{\partial e_z}{\partial y}+\frac{\partial h_z}{\partial x}\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)(y\,dy-x\,dx)+$$
$$+2\varepsilon\oint\limits_L e_z\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}dy-\frac{\partial e_z}{\partial y}dx\right)+2\oint\limits_L h_z\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}dy-\frac{\partial h_z}{\partial y}dx\right)+$$
$$\left.+2\left(n_e+\frac{\varepsilon}{n_e}\right)\oint\limits_L e_z\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}dx+\frac{\partial h_z}{\partial y}dy\right)\right\}.$$

В заключение заметим, что практический интерес представляет не столько сам поток мощности направляемой моды, сколько его нормированное выражение P_Ω/P, где P — поток мощности направляемой моды через все поперечное сечение световода.

Список литературы

1. *Желтиков А.М.* // УФН. 2000. **170**, № 11. С. 1203.
2. *Бирюков А.С., Дианов Е.М.* Волоконные световоды на основе фотонных кристаллов // Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства. 2002. № 5. С. 6.
3. *Кривенков В.И.* // ДАН. 2002. **387**, № 2. С. 184.
4. *Кривенков В.И.* // ДАН. 2003. **391**, № 5. С. 619.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., 1978.
6. *Belanov A.S., Krivenkov V.I.* // Sov. Lightwave Commun. 1991. **1**, № 3. P. 207.
7. *Кривенков В.И.* Волноводные характеристики трехслойных эллиптических световодов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990.
8. *Унгер Х.Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. М., 1980.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М., 2001.

Power flow of a guided mode of an optical fiber

V. I. Krivenkov

Moscow State University of Instrument and Informatics Science, Starominka st., 20, Moscow 107846, Russia.
E-mail: krivenkov.v@gmail.com.

It is shown that the integral $\int\limits_{\Omega} \Phi\Psi\, d\Omega$ on arbitrary plain area Ω, where scalar functions of a point Φ and Ψ are solutions of the two-dimensional reduced wave equation, can be transformed into contour integral, which is represented in an invariant form in either Cartesian or polar or elliptical coordinates. The invariant expression in the form of contour integral for the power flow of a guided mode of an optical fiber across arbitrary area with constant permittivity is obtained.

Keywords: fiber, guided mode.
PACS: 42.81.–i.
Received 24 November 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторе

Кривенков Вячеслав Иванович — к. ф.-м. н., доцент, доцент; тел.: 8(495) 447-09-61, e-mail: krivenkov.v@gmail.com.