ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Возникновение керровской черной дыры из двух струнообразных объектов Неймана–Унти–Тамбурино

В. С. Манько[1a], Е. Д. Родченко[2], Э. Руиз[3], М. Б. Садовникова[2b]

[1] *Центр передовых исследований и обучения при Национальном политехническом институте Мексики, кафедра физики.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[3] *Саламанкский университет, Институт фундаментальной физики и математики.*
E-mail: [a] *vsmanko@fis.cinvestav.mx,* [b] *sadovnikov@phys.msu.ru*

Статья поступила 25.12.2008, подписана в печать 19.01.2009.

Показано, что изолированная черная дыра Керра может интерпретироваться как результат нелинейной суперпозиции двух одинаковых источников НУТ, обладающих противоположными моментами вращения и расположеными на оси симметрии на определенном критическом расстоянии друг от друга.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, метрика Керра, формализм Эрнста, решение Неймана–Унти–Тамбурино.

УДК: 530.12:531.51. PACS: 04.20.Jb, 04.70.Bw, 97.60.Lf.

Как было показано недавно [1], хорошо известное решение Неймана–Унти–Тамбурино (НУТ) [2] представляет собой струнообразный объект с двумя полубесконечными особенностями ненулевой массы и противоположными угловыми моментами, которые примыкают к полюсам центрального невращающегося тела. Это решение является простейшим среди экваториально-антисимметричных четырехмерных пространств ОТО, точное определение которым было дано в работе [3]. Хотя обычный «нутовский» объект обладает некоторыми нефизическими свойствами, такими, как наличие областей с отрицательной массой и замкнутыми времениподобными линиями, в настоящей работе нами будет показано, что конфигурации, состоящие из нескольких нутовских компонент, могут порождать физически значимые модели, лишенные патологий обычного пространства НУТ. Конкретно мы рассмотрим простой, но очень убедительный пример: возникновение керровской черной дыры из двух взаимодействующих объектов НУТ. Рассмотрение будет проведено в рамках точного решения, описывающего возможную нелинейную суперпозицию двух нутовских источников.

Напомним, что решение стационарной аксиально–симметричной вакуумной задачи в ОТО сводится к нахождению комплексной функции $\mathcal{E}$, удовлетворяющей уравнению Эрнста [4]

$$(\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}})(\mathcal{E}_{,\rho,\rho}+\rho^{-1}\mathcal{E}_{,\rho}+\mathcal{E}_{,z,z})=2(\mathcal{E}_{,\rho}^2+\mathcal{E}_{,z}^2), \qquad (1)$$

где ρ и z — цилиндрические координаты Вейля–Папапетру, запятая обозначает частное дифференцирование по следующей за ней координате, а черта над символом означает комплексное сопряжение. Используя интегральный метод Сибгатуллина [5], потенциал $\mathcal{E}$, удовлетворяющий (1), может быть построен по его виду на верхней части оси симметрии. На участке $z>\sqrt{m^2+\nu^2}$ оси z комплексный потенциал Эрнста отдельно взятого решения НУТ имеет вид [1]

$$e(z)\equiv\mathcal{E}(\rho=0,z)=\frac{z-m-i\nu}{z+m+i\nu}, \qquad (2)$$

где m — полная масса объекта НУТ, а ν — усредненный угловой момент на единицу длины полубесконечной особенности. Нелинейная суперпозиция двух простых решений НУТ, имеющих одинаковые массы и противоположные угловые моменты, может быть формально представлена следующими данными на оси:

$$e(z)=\frac{z-k-m-i\nu}{z-k+m+i\nu}\cdot\frac{z+k-m+i\nu}{z+k+m-i\nu}, \qquad (3)$$

где параметр k задает смещение нутовских компонент по оси симметрии относительно начала координат. Следует отметить, что если данные (2) определяют экваториально-антисимметричное решение, поскольку для них верно характеристическое соотношение $e(z)e(-z)=1$ [3], то данные (3) удовлетворяют соотношению $e(z)\bar{e}(-z)=1$ и, следовательно, уже определяют экваториально-симметричное пространство–время [6, 7].

Ниже мы приводим окончательный вид потенциала Эрнста $\mathcal{E}$, построенного по данным (3) с помощью метода Сибгатуллина, а также выражения для соответствующих функций f, γ и ω, входящих в стационарную аксиально-симметричную метрику Папапетру

$$\mathrm{d}\,s^2=f^{-1}[e^{2\gamma}(\mathrm{d}\,\rho^2+\mathrm{d}\,z^2)+\rho^2\,\mathrm{d}\,\varphi^2]-f(\mathrm{d}\,t-\omega\,\mathrm{d}\,\varphi)^2, \qquad (4)$$

опуская все промежуточные выкладки (многие важные подробности получения решений данного типа заинтересованный читатель может найти в работе [8]):

$$\mathcal{E}=\frac{A-B}{A+B},\quad f=\frac{A\bar{A}-B\bar{B}}{(A+B)(\bar{A}+\bar{B})},$$

$$e^{2\gamma}=\frac{A\bar{A}-B\bar{B}}{64d^4{\alpha_+}^2{\alpha_-}^2R_+R_-r_+r_-},\quad \omega=-\frac{4\mathrm{Im}[G(\bar{A}+\bar{B})]}{A\bar{A}-B\bar{B}},$$

$$\begin{aligned}A=\big[&(m^2+\nu^2)(k^2-m^2)(k^2-m^2-\nu^2)-2m^2k^2\nu^2\big]\times\\&\times(R_+-R_-)(r_+-r_-)+\\&+2\alpha_+\alpha_-(m^2+\nu^2)(m^2-k^2)(R_+R_-+r_+r_-)-\\&-\alpha_+\alpha_-[2m^4+(m^2+\nu^2)(k^2-m^2)](R_++R_-)(r_++r_-)-\end{aligned}$$

$$- 2imk\nu d[(\alpha_+ - \alpha_-)(R_+r_+ - R_-r_-) - - (\alpha_+ + \alpha_-)(R_+r_- - R_-r_+)],$$

$$B = 4d\big\{m\alpha_+\alpha_-\big[(m^2-d)(R_+ + R_-) - (m^2+d)(r_+ + r_-)\big] + + ik\nu\big[\alpha_-(m^2-d)(R_+ - R_-) - \alpha_+(m^2+d)(r_+ - r_-)\big]\big\},$$

$$\begin{aligned} G = {} & d\big[d^2 + m^2(m^2+2ik\nu)\big]\big[(\alpha_+ - \alpha_-)(R_-r_- - R_+r_+) + \\ & + (\alpha_+ + \alpha_-)(R_+r_- - R_-r_+)\big] - \\ & - 2m^2d^2\big[(\alpha_+ + \alpha_-)(R_-r_- - R_+r_+) + \\ & + (\alpha_+ - \alpha_-)(R_+r_- - R_-r_+)\big] - \\ & - m\alpha_+\alpha_-(d^2+m^4)(R_+ + R_-)(r_+ + r_-) + \\ & + m\big[kd^2(k+4i\nu) - (2k^2-m^2)(m^2+\nu^2)^2 + k^2\nu^4\big]\times \\ & \times (R_+ - R_-)(r_+ - r_-) - \\ & - 2m\alpha_+\alpha_-(k^2-m^2)(m^2+\nu^2)(R_+R_- + r_+r_-) - \\ & - 2dz\big\{\alpha_-(m^2-d)\big[m\alpha_+(R_+ + R_-) + ik\nu(R_+ - R_-)\big] - \\ & - \alpha_+(m^2+d)\big[m\alpha_-(r_+ + r_-) + ik\nu(r_+ - r_-)\big]\big\} + \\ & + 2d\alpha_+\alpha_-(2m^2+ik\nu)\big[m^2(R_+ + R_- - r_+ - r_-) - \\ & - d(R_+ + R_- + r_+ + r_-)\big] + \\ & + 2md\big[d^2 - m^4 - ik\nu(2m^2+ik\nu)\big]\big[\alpha_-(R_- - R_+) + \alpha_+(r_+ - r_-)\big] - \\ & - 2md^2(m^2 - k^2 + \nu^2 - 2ik\nu)\big[\alpha_-(R_- - R_+) + \alpha_+(r_- - r_+)\big], \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \alpha_+)^2}, \quad r_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \alpha_-)^2}, \tag{6}$$

и

$$\alpha_\pm = \sqrt{m^2 + k^2 - \nu^2 \pm 2d}, \quad d = \sqrt{m^2k^2 + \nu^2(k^2 - m^2)}. \tag{7}$$

Полученная метрика является асимптотически плоской и описывает вращающееся тело, имеющее массу $2m$, угловой момент $2k\nu$ и массовый квадрупольный момент $2m(k^2 - m^2 - \nu^2)$. Поскольку хорошо известное решение Керра для вращающейся черной дыры [9] характеризуется двумя параметрами m и a (соответственно полной массой и угловым моментом на единицу массы, причем массовый квадрупольный момент керровского источника равен $-ma^2$), то естественным образом возникает предположение о том, что метрика (5) в частном случае $k = m$ переходит в решение Керра с полной массой $2m$ и полным угловым моментом на единицу массы ν. Чтобы убедиться в правильности данной гипотезы, положим $k = m$ в (5) и (7). Тогда получаем

$$\alpha_\pm = \sqrt{2m^2 - \nu^2 \pm 2m^2}, \quad d = m^2, \tag{8}$$

а формулы для A, B и G принимают вид

$$\begin{aligned} & A = [(\alpha_+ - i\nu)R_+ + (\alpha_+ + i\nu)R_-]F, \quad B = 4m\alpha_+F, \\ & G = m[(\alpha_+ - 2m - i\nu)R_+ + (\alpha_+ + 2m + i\nu)R_- + \\ & \quad + 2\alpha_+(2m + i\nu - z)]F, \end{aligned} \tag{9}$$

$$F = -2m^4[(\alpha_- + i\nu)r_+ + (\alpha_- - i\nu)r_-], \tag{10}$$

где F является общим множителем. Сокращая F в выражениях для потенциала Эрнста и метрических функций и вводя эллипсоидальные координаты по формулам

$$x = \frac{1}{2\alpha_+}(R_+ + R_-), \quad y = \frac{1}{2\alpha_+}(R_+ - R_-), \tag{11}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} = \frac{\alpha_+x - i\nu y - 2m}{\alpha_+x - i\nu y + 2m}, \qquad f = \frac{{\alpha_+}^2x^2 + \nu^2y^2 - 4m^2}{(\alpha_+x + 2m)^2 + \nu^2y^2}, \\ & e^{2\gamma} = \frac{{\alpha_+}^2x^2 + \nu^2y^2 - 4m^2}{{\alpha_+}^2(x^2 - y^2)}, \quad \omega = -\frac{4m\nu(\alpha_+x + 2m)(1-y^2)}{{\alpha_+}^2x^2 + \nu^2y^2 - 4m^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Вводя теперь параметры

$$p = \frac{\alpha_+}{2m}, \quad q = \frac{\nu}{2m}, \quad p^2 + q^2 = 1, \tag{13}$$

мы переписываем (12) в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} = \frac{px - iqy - 1}{px - iqy + 1}, \qquad f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(px+1)^2 + q^2y^2}, \\ & e^{2\gamma} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2 - y^2)}, \quad \omega = -\frac{2\alpha_+q(px+1)(1-y^2)}{p(p^2x^2 + q^2y^2 - 1)}, \end{aligned} \tag{14}$$

т. е. мы пришли к одному из стандартных представлений решения Керра [4, 10].

Таким образом, нами показано, что нелинейная суперпозиция двух решений НУТ может порождать керровское пространство. Мы надеемся, что дальнейшие исследования позволят выяснить, насколько фундаментальным является полученный результат для физики черных дыр.

Работа выполнена при финансовой поддержке фондов CONACyT (Мексика) (грант 45946–F) и MCyT (Испания) (грант FIS2006–05319).

Список литературы

1. *Manko V.S., Ruiz E.* // Class. Quantum Grav. 2001. **18**. P. L11.
2. *Newman E., Tamburino L., Unti T.* // J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 915.
3. *Ernst F.J., Manko V.S., Ruiz E.* // Class. Quantum Grav. 2006. **23**. P. 4945.
4. *Ernst F.J.* // Phys. Rev. 1968. **167**. P. 1175.
5. *Сибгатуллин Н.Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М., 1984.
6. *Kordas P.* // Class. Quantum Grav. 1995. **12**. P. 2037.
7. *Meinel R., Neugebauer G.* // Class. Quantum Grav. 1995. **12**. P. 2045.
8. *Manko V.S., Ruiz E.* // Class. Quantum Grav. 1998. **15**. P. 2007.
9. *Kerr R.P.* // Phys. Rev. Lett. 1963. **11**. P. 237.
10. *Kramer D., Stephani H., MacCallum M.A.H., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge, 1980.

Formation of a Kerr black hole from two stringy Newman–Unti–Tamburino objects

V. S. Manko[1a], **E. D. Rodchenko**[2], **E. Ruiz**[3], **M. B. Sadovnikova**[2b]

[1] *Departamento de Fisica, Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del IPN, A.P. 14-740, 07000 Mexico D.F., Mexico.*
[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[3] *Instituto Universitario de Fisica Fundamental y Matematicas, Universidad de Salamanca, 37008 Salamanca, Spain.*
E-mail: [a] *vsmanko@fis.cinvestav.mx,* [b] *sadovnikov@phys.msu.ru.*

It is shown that an isolated Kerr black hole can be interpreted as arising from a pair of identical counter-rotating NUT objects placed on the symmetry axis at an appropriate distance from each other.

Keywords: Einstein equations, Kerr metric, Ernst formalism, NUT solution.
PACS: 04.20.Jb, 04.70.Bw, 97.60.Lf.
Received 25 December 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2009).

Сведения об авторах

1. Манько Владимир Семенович — канд. физ.-мат. наук, доцент РУДН им. П. Лумумбы; e-mail: vsmanko@fis.cinvestav.mx.
2. Родченко Е.Д. — аспирант.
3. Руиз Э. — аспирант.
4. Садовникова Марианна Борисовна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр.; e-mail: sadovnikov@phys.msu.ru.