Способ введения дробного интегро-дифференцирования в классической электродинамике

А. Н. Боголюбов[1a], А. А. Потапов[2b], С. Ш. Рехвиашвили[3c]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт радиотехники и электроники РАН. Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7.*
[3] *Кабардино-Балкарский государственный университет, факультет микроэлектроники и компьютерных технологий, кафедра материалов и компонентов твердотельной электроники. Россия, 360004, КБР, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173.*
E-mail: [a] *bogan7@yandex.ru,* [b] *potapov@mail.cplire.ru,* [c] *rsergo@mail.ru*

Статья поступила 07.10.2008, подписана в печать 13.03.2009.

С использованием понятий эффективных тока и скорости движения заряженной частицы в среде получены аналоги уравнений Максвелла с дробными производными. Рассмотрена калибровочная инвариантность и выведено диффузионно-волновое уравнение для скалярного и векторного потенциалов.

Ключевые слова: электродинамика, дробные операторы, дробное интегро-дифференцирование.
УДК: 530.1, 537. PACS: 41.20.Jb.

Введение

В настоящее время стало ясно, что для описания аномальных диссипативных процессов переноса в средах с фрактальной структурой требуется применять математический аппарат дробного интегро-дифференцирования [1–3]. В связи с этим возникает естественный вопрос о применении этого аппарата в различных областях, в частности в задачах электродинамики и радиофизики [4].

В настоящей статье делается попытка ввести дробное интегро-дифференцирование по времени в основные уравнения электродинамики материальных сред. Соответствующее электромагнитное поле, как показано ниже, в этом случае имеет свои отличительные черты.

Центральное место в дробном исчислении занимают интегро-дифференциальные операторы Римана–Лиувилля и Капуто [2, 3]. Оператор Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in R$ с началом в точке s представим в виде

$$D^{\alpha}_{st}y(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_s^t \frac{y(t')\,dt'}{|t-t'|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ y(t), & \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D^{\alpha-n}_{st}y(t), & n-1 < \alpha \leqslant n,\ n \in N, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Оператор Капуто определяется с помощью равенства

$$\partial^{\alpha}_{0t}y(t) = \operatorname{sign}^n(t-s)D^{\alpha-n}_{st}\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n \in N.$$

Связь между операторами Римана–Лиувилля и Капуто задается как

$$\partial^{\alpha}_{0t}y(t) = D^{\alpha}_{st}y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(s)}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Если выполняется равенство $y^{(k)}(s) = 0$, то операторы Римана–Лиувилля и Капуто тождественны $\partial^{\alpha}_{0t} \equiv D^{\alpha}_{st}$. При целочисленном α эти операторы также совпадают как между собой, так и с обычными производными целого порядка.

Эффективный ток и эффективная скорость

В прикладных задачах для нахождения токов и зарядовых распределений пользуются различными подходами. После того как найдены токи и заряды, производится расчет полей. При этом на всех этапах приходится иметь дело со сложными численными методами, которые зачастую доставляют большую погрешность. От указанной трудности, по нашему мнению, можно частично избавиться, если для вычисления плотности электрического тока $\boldsymbol{j}(t)$ взять уравнение временной дисперсии:

$$\boldsymbol{j}(t) = \frac{q}{\tau}\int\limits_0^t g(t-t')n(t')\left(\frac{d\boldsymbol{r}(t')}{dt'}\right)dt', \tag{1}$$

где q — заряд электрона, τ — некоторое характерное время процесса, t — безразмерное (отнесенное к τ) время, $n(t)$ — концентрация электронов, $\boldsymbol{r}(t)$ — вектор перемещения, $g(t)$ — функция памяти.

Реальные диссипативные системы, как правило, обладают «остаточной памятью» (термин заимствован из [5]), которая в наиболее простом виде задается степенной функцией [2, 5]

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{t^{\alpha}}. \tag{2}$$

Необходимо сказать, что функция памяти вида (2) используется во многих физических задачах для учета фрактальных свойств [2, 4]. Параметр α находится в интервале от 0 до 1.

Из (1), учитывая (2) и определения дробных операторов, получаем

$$\boldsymbol{j}(t) = \frac{q}{\tau}D^{\alpha-1}_{0t}\left(n(t)\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right). \tag{3}$$

Если электрический ток течет в замкнутом контуре, то концентрация носителей заряда в нем не зависит от времени. В этом случае из (3) получается следующее выражение для скорости носителей заряда:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{1}{\tau}D^{\alpha-1}_{0t}\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\partial^{\alpha}_{0t}\boldsymbol{r}(t). \tag{4}$$

Выражения (3) и (4) определяют эффективную плотность тока и эффективную скорость носителей заряда. Этим выражениям можно придать другой конструктивный смысл. Воспользуемся рассуждениями, предложенными в [6]. Обращая выражение (4), затем интегрируя по переменной t, получим

$$\boldsymbol{r}(t) = \tau D_{0t}^{-\alpha}\boldsymbol{v}(t) + \mathrm{const}. \tag{5}$$

Из (5) находим приращение

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \\ = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^{t+\Delta t}\frac{\boldsymbol{v}(t')\,dt'}{(t+\Delta t-t')^{1-\alpha}} - \int\limits_0^{t}\frac{\boldsymbol{v}(t')\,dt'}{(t-t')^{1-\alpha}}\right) \approx \\ \approx \frac{\tau(\Delta t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \xi^{\alpha-1}\boldsymbol{v}(t+\Delta t-\xi\Delta t)\,d\xi.$$

С помощью теоремы о среднем получаем

$$\boldsymbol{v}(t) \approx \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\tau}\,\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{(\Delta t)^{\alpha}}. \tag{6}$$

Выражение (6) определяет гельдеровскую производную с показателем α [7]. Эту производную и, следовательно, выражение (4) вполне допустимо принять за эффективную скорость движения заряженных частиц в среде. Обратим внимание на то, что в случае стохастического движения производная $d\boldsymbol{r}/dt$, вообще говоря, не существует, поэтому оператор $D_{0t}^{\alpha-1}$, стоящий в правой части (4), в математическом смысле выступает в роли регуляризующего оператора. Масштабный показатель α характеризует степень регулярности траектории движения, причем чем он меньше, тем более неравномерной является траектория. При $\alpha = 1/2$ имеет место классический винеровский процесс. Если $\alpha > 1/2$, то перенос является быстрым (супердиффузия).

Знак приближенного равенства в (6) нужно понимать следующим образом. При $\Delta t \to 0$ выражение (6) строго не переходит в (4). Величина интервала времени Δt в (6) подбирается так, чтобы соответствие между (4) и (6) сохранилось. В целом точность аппроксимации дробной производной Капуто выражением (6) зависит от вида функции $\boldsymbol{r}(t)$ и может быть численно оценена в конкретных случаях.

Наконец отметим, что в работе [8] на основе принципа наименьшего действия и выражения (4) получен дробный аналог уравнения движения, а в работе [6] это уравнение исследовалось на примере колебаний закрепленного с двух сторон стержня. Было показано, что дробные уравнения и их решения в указанном выше смысле допускают четкую физическую интерпретацию.

Первое и второе уравнения Максвелла

Дальнейшее наше рассмотрение базируется на обобщениях закона электромагнитной индукции и закона полного тока с использованием выражений (4) и (3). Рассмотрим сначала электроны, которые двигаются в проводнике, помещенном во внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}$, со скоростью, определяемой формулой (4). На электроны будет действовать сила Лоренца $\boldsymbol{F} = \frac{q}{\tau}[\boldsymbol{B}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{r}(t)]$.

Электрическое напряжение, возникающее при обходе электронами замкнутого гладкого контура L, равно

$$\frac{1}{q}\oint\limits_L(\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{l}) = \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\oint\limits_L([\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(t)]\,d\boldsymbol{l}) = \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\Phi, \tag{7}$$

где Φ — магнитный поток через область, ограниченную контуром L.

Перепишем (7) через напряженность электрического поля

$$\oint\limits_L(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}) = -\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\Phi. \tag{8}$$

Равенство (8) представляет собой закон электромагнитной индукции, выраженный через дробную производную Капуто. Параметр α здесь будет характеризовать изменения магнитного поля. Применяя к (8) теорему Стокса, получаем аналог первого уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{B}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь без внешнего магнитного поля проводник объемом V и площадью поперечного сечения S, по которому протекает ток электронов с вектором плотности, определяемым выражением (3). По теореме Остроградского–Гаусса сила тока сквозь поверхность ∂V с вектором нормали $\boldsymbol{n}$ равна

$$\int\limits_S(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\,dS = \int\limits_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\,dV, \tag{10}$$

где ∂V — замкнутая поверхность, ограничивающая область V.

С учетом (3) сила тока будет равна

$$\frac{1}{\tau}D_{0t}^{\alpha-1}\int\limits_V\left(\frac{d\rho}{dt}\right)dV = \int\limits_V\left(\frac{1}{\tau}D_{0t}^{\alpha-1}\frac{d\rho}{dt}\right)dV = \int\limits_V\left(\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\rho\right)dV, \tag{11}$$

где ρ — объемная плотность заряда. Сравнивая (10) и (11), получаем уравнение непрерывности

$$\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\rho + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0. \tag{12}$$

Закон полного тока дает

$$\int\limits_S(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\,dS = \int\limits_L(\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}). \tag{13}$$

Применяя к (13) теорему Стокса, получим

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}. \tag{14}$$

Чтобы уравнение (14) удовлетворяло уравнению непрерывности (12), по аналогии с классической схемой его необходимо представить в следующем виде:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{D}. \tag{15}$$

Уравнение (15) представляет собой аналог второго уравнения Максвелла, а слагаемое с дробной производной определяет ток смещения.

Использование дробных производных в дифференциальных уравнениях математических моделей физических процессов должно тщательно обосновываться в каждом конкретном случае [2–5]. Полученные выше результаты позволяют утверждать, что замена в уравнениях Максвелла первых производных по времени на дробные производные по времени равносильна введению параметров, которые учитывают «эффект памяти» — временную дисперсию. Это заключение является вполне естественным, если вспомнить известные результаты по обобщению уравнений переноса с помощью дробных производных [2, 4, 5]. Легко убедиться, что, как и в обычном случае, к уравнениям (9) и (15) в полной мере применима процедура усреднения с целью получения макроскопических полей.

Векторный и скалярный потенциалы

Для выведенных уравнений представляет интерес рассмотреть вопрос о вспомогательных функциях — векторном и скалярном потенциалах. Поскольку нами применяется только дробная производная по времени, то два не рассмотренных выше уравнения максвелловской системы остаются без изменений. Выпишем полную систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{B}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{D}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho. \end{aligned} \tag{16}$$

Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ вводится стандартно

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в первое уравнение (16), получим

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}\right) = 0. \tag{18}$$

Из (18) следует, что вектор $\boldsymbol{E}$ определен заданием вектор-потенциала $\boldsymbol{A}$ с точностью до градиента произвольной скалярной функции ϕ, которую естественно назвать скалярным потенциалом:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A} - \nabla\varphi,$$

Далее, не ограничивая общности, применим калибровку

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\varphi = 0. \tag{19}$$

Несложно убедиться, что выражению (19) отвечают следующие соотношения калибровочной инвариантности:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha} f, \tag{20}$$

где f — произвольная скалярная функция.

В результате получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \mu\mu_0\boldsymbol{j} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\left(-\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A} - \nabla\varphi\right), \\ \operatorname{div}\left(-\frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}A - \nabla\varphi\right) &= \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{21}$$

С использованием (20) из (21) получаются следующие уравнения для векторного и скалярного потенциалов [2, 3]:

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{(c\tau)^2}\partial_{0t}^{2\alpha}\boldsymbol{A} &= -\mu\mu_0\boldsymbol{j}, \\ \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{(c\tau)^2}\partial_{0t}^{2\alpha}\varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость света в вакууме.

Уравнения (22) представляют собой уравнения с изменяющимся типом [2, 3] и позволяют сделать важные заключения. В отсутствие зарядов и токов из (22) получаются однородные уравнения с частной производной дробного порядка. В отличие от классического случая — решения Даламбера, решениями этих уравнений уже не могут быть достаточно произвольные функции. С физической точки зрения это означает, что протекающая по определенным правилам пространственно-временная эволюция заряженных частиц будет накладывать ограничения на характер порождаемого электромагнитного поля.

Заключение

Отметим, что попытка записать волновые уравнения для электромагнитных полей через дробные производные предпринималась ранее в работе [9]. Однако принадлежность функций $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ к классу Липшица–Гельдера не дает никаких оснований осуществить замену простых производных на дробные производные Римана–Лиувилля в исходных уравнениях Максвелла. Кроме того, полученные в [9] аналоги волновых уравнений не являются линейными. Даже в линеаризированном виде они не могут иметь решений при использовании традиционных граничных условий. Запись же новых условий, содержащих дробные интегралы Римана–Лиувилля, очевидно, нуждается в дополнительном обосновании. Предложенный в настоящей работе подход с производной Капуто позволяет избежать указанных недостатков.

Список литературы

1. *Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А.* и др. Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А. А. Потапова. М., 2008.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
3. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
4. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М., 2005.
5. *Нигматуллин Р.Р.* // ТМФ. 1992. № 2. С. 354.
6. *Рехвиашвили С.Ш.* // Нелинейный мир. 2007. **5**, № 4. С. 194.
7. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* // УФН. 1985. **146**, № 3. С. 493.
8. *Рехвиашвили С.Ш.* // Письма в ЖТФ. 2004. **30**, № 2. С. 33.
9. *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* // Фракталы в прикладной физике. Арзамас-16, 1995. С. 5.

Method of fractional integro-differentiation in classic electrodynamics

A. N. Bogolyubov[1a], **A. A. Potapov**[2b], **S. Sh. Rehviashvili**[3c]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Mokhovaya str. 11, build. 7, Moscow 125009, Russia.*
[3] *Department of Materials and Components of Solid-State Electronics, Faculty of Microelectronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkar State University, Chernyshevskogo str. 173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkar Republic, Russia.*
E-mail: [a] *bogan7@yandex.ru,* [b] *potapov@mail.cplire.ru,* [c] *rsergo@mail.ru.*

With concept of the effective current and the velocity of the charged particle movement in the medium, equations with fractional derivatives are obtained which are analogous to Maxwell equations. Calibration invariance for the obtained equations is considered and the diffusion-wave equation is derived for scalar and vector potentials.

Keywords: electrodynamics, fractional operators, fractional integro-differentiation.
PACS: 41.20.Jb.
Received 7 October 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2009).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: 8(495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Потапов Александр Алексеевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр.; тел.: 8(495) 629-34-06, e-mail: potapov@mail.cplire.ru.
3. Рехвиашвили Серго Шотович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: 8(866) 242-71-04, e-mail: rsergo@mail.ru.