Рекурсивный метод расчета древесных элементов S-матрицы произвольного порядка в скалярной электродинамике

Э. Э. Боос[1a], В. Е. Буничев[2b], А. В. Толоконников[3c]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. [1,2] НИИ ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ), отдел экспериментальной физики высоких энергий; отдел теоретической физики высоких энергий. [3] Физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: [a] boos@theory.sinp.msu.ru, [b] bunichev@theory.sinp.msu.ru, [c] tolokonnikov@hep.phys.msu.ru

Статья поступила 22.01.2009, подписана в печать 27.02.2009.

На примере скалярной электродинамики рассматривается возможность создания рекурсивного метода расчета древесных элементов S-матрицы на основе метода функционального интегрирования. Одним из преимуществ такого метода должна быть калибровочная инвариантность амплитуд без дополнительных действий над ними.

Ключевые слова: рекурсивные вычисления, функциональный интеграл, амплитуда рассеяния.

УДК: 539.12.01. PACS: 11.55.–m, 11.55.Bq, 11.55.Ds.

Введение

Одной из задач, поставленной перед Большим адронным коллайдером (LHC, CERN), является поиск физики вне рамок Стандартной модели (СМ). Эта задача ставит перед учеными проблему более точного расчета фоновых процессов, необходимого при определении отклонения физики от рамок СМ. В настоящее время существует достаточно много программных пакетов, таких, как CompHEP [1], GRACE [2], MADGRAPH [6], ALPGEN [3], O'MEGA-WHIZARD [4, 5], которые позволяют проводить расчеты процессов СМ с большим числом внешних линий в лидирующем приближении по теории возмущений.

Традиционно для вычислений используется техника диаграмм Фейнмана. В этом случае любой квантово-механической амплитуде ставится в соответствие набор графов, элементами которых являются операторы свободных полей и корреляционные функции. Достоинством этого метода является простота его автоматизации, но возникают трудности при вычислении процессов с участием большого числа частиц, так как число диаграмм растет с увеличением числа частиц, как $N!$.

Альтернативой использования диаграмм Фейнмана являются алгоритмы решения уравнений движения для функций Грина взаимодействующих полей или уравнения Дайсона–Швингера, как, например, в ALPHA [8] и в O'MEGA [5]. При этом для каждого процесса записывается система уравнений, рекурсивно выражающая многоточечные корреляционные функции через корреляционные функции низших порядков. Возникающая при решении уравнений рекурсивная процедура позволяет использовать так называемые амплитудные алгоритмы, где на каждом шаге интегрирования в амплитуду подставляются явные значения импульсов и только после этого амплитуда возводится в квадрат. Подобная техника обладает существенным преимуществом по скорости вычисления в сравнении с диаграммной техникой, но ее реализация сталкивается с проблемой: так как функции Грина не являются калибровочно-инвариантными объектами, то для построения перенормированных амплитуд нужно использовать дополнительные тождества — Уорда–Такахаши или в неабелевом случае Славнова–Тейлора. Кроме того, чтобы посчитать реальный процесс и перейти от функций Грина к амплитуде, выраженной с помощью операторов свободных полей, нужно использовать редукционные соотношения Лемана–Симанзика–Циммермана, что также усложняет автоматизацию вычислений.

В настоящей работе рассматривается возможность создания метода расчета древесных элементов S-матрицы произвольного порядка, основанного на методах функционального интегрирования, позволяющего использовать рекурсию и не требующего дополнительных действий по восстановлению калибровочной инвариантности амплитуд. Рассмотрение проведем на примере скалярной электродинамики.

1. Вводные положения

Рассмотрим скалярную электродинамику

$$L = L_0 - (ie)\left[(\partial_\mu\varphi^*)\varphi A^\mu - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)A_\mu\right] - (ie)^2\varphi^*\varphi A_\mu A^\mu.$$

Теперь, если мы хотим получить выражения для амплитуд рассеяния при помощи метода функционального интегрирования, нам необходимо определить нормальные символы S-матриц, как в [7], для свободных векторных и комплексных скалярных полей, после чего выписать выражения для соответствующих полей и пропагаторов

$$S_0^s = \exp\left\{ i\int dx\,[\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i\int dx\,dy\,\eta^*(x)D_s(x-y)\eta(y)\right\},$$

$$\varphi^*(z) = \frac{\delta}{\delta\eta(z)}\exp\left\{ i\int dx\,[\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i\int dx\,dy\,\eta^*(x)D_s(x-y)\eta(y)\right\}\Bigg|_{\eta,\eta^*=0},$$

$$\varphi(z) = \frac{\delta}{\delta\eta^*(z)}\exp\left\{ i\int dx\,[\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i\int dx\,dy\,\eta^*(x)D_s(x-y)\eta(y)\right\}\Bigg|_{\eta,\eta^*=0},$$

$$D_s(x_1-x_2) = \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}\times$$

$$\times \exp\left\{ i \int dx\, [\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i \int dx\, dy\, \eta^*(x) D_s(x-y)\eta(y) \right\}\Bigg|_{\eta,\eta^*=0}.$$

Аналогичным образом выпишем выражения для случая векторных полей:

$$S_0^v = \exp\left\{ i \int dx\, A^\mu(x) j_\mu(x) + \frac{i}{2} \int dx\, dy\, j_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right\},$$
$$A^\rho(z) = \frac{\delta}{\delta j_\rho(z)} \exp\left\{ i \int dx\, A^\mu(x) j_\mu(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2} \int dx\, dy\, j_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right\}\Bigg|_{j=0},$$
$$D^{\rho(1)\rho(2)}(x_1 - x_2) = \frac{\delta}{\delta j_{\rho(2)}(x_2)} \frac{\delta}{\delta j_{\rho(1)}(x_1)} \times$$
$$\times \exp\left\{ i \int dx\, A^\mu(x) j_\mu(x) + \frac{i}{2} \int dx\, dy\, j_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right\}\Bigg|_{j=0}.$$

Осталось добавить взаимодействие, и мы получим выражение для нормального символа S-матрицы, которое позволит нам получать амплитуды рассеяния для произвольного порядка теории возмущений:

$$S \sim \exp\left\{ \int dx \left((ie) \left[\left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta\eta^*(x)} \right) \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \frac{\delta}{\delta j_\mu(x)} - \right.\right.\right.$$
$$- \frac{\delta}{\delta\eta^*(x)} \left(\partial^\mu \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \right) \frac{\delta}{\delta j^\mu(x)} \Bigg] +$$
$$\left.\left.\left. + (ie)^2 \frac{\delta}{\delta\eta^*(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \frac{\delta}{\delta j_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta j^\mu(x)} \right) \right\} \times S_0^s S_0^v.$$

Следует отметить, что экспонента, содержащая взаимодействие, на самом деле является бесконечным рядом. Рассматривая структуру n-го порядка разложения экспоненты взаимодействия, можно подметить, что производные по скалярным источникам для всех порядков малости по константе взаимодействия имеют похожий вид, отличаясь только наличием разных комбинаций индексированных производных ∂_μ. Для n-го порядка разложения экспоненты своеобразная заготовка будет иметь вид $\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}$.

Кроме того, структура производных по векторным источникам для различных порядков малости по константе взаимодействия напрямую зависит от комбинаций индексированных производных ∂_μ.

Из этого можно сделать предположение и о том, что для получения древесных амплитуд произвольного порядка разложения экспоненты взаимодействия мы можем использовать следующую схему:

1) выписать алгоритм получения древесных компонент результата дифференцирования по скалярным источникам;

2) восстановить различные комбинации индексированных производных ∂_μ (для этого мы введем $\widehat{\Xi}$ — оператор восстановления индексированных производных);

3) определить соответствующие восстановленной комбинации Ξ производные по векторным источникам;

4) выписать алгоритм получения древесных компонент результата дифференцирования по векторным источникам и применить его в соответствии с Ξ;

5) перемножить получившиеся древесные выражения для скалярных и векторных полей в соответствии с некими правилами отбора, вырезающими именно древесные элементы S-матрицы.

Определить, какие производные по векторным полям соответствуют данным индексам, просто — все несвернутые индексы в результате взятия производных по скалярным источникам должны свернуться по индексам в результате взятия производных по векторным источникам.

2. Обозначения

Для того чтобы после получения древесных компонент производной по скалярным источникам восстановить комбинации индексированных производных ∂_μ, необходимо ввести специальные обозначения:

$$\frac{\delta}{\delta\eta(z)} \exp\left\{ i \int dx\, [\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i \int dx\, dy\, \eta^*(x) D_s(x-y)\eta(y) \right\} = \frac{\delta}{\delta\eta(z)} a, \quad (1)$$
$$\frac{\delta}{\delta\eta^*(z)} \exp\left\{ i \int dx\, [\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i \int dx\, dy\, \eta^*(x) D_s(x-y)\eta(y) \right\} = \frac{\delta}{\delta\eta^*(z)} a, \quad (2)$$
$$\frac{\delta}{\delta j_\rho(z)} \exp\left\{ i \int dx\, A^\mu(x) j_\mu(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2} \int dx\, dy\, j_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \right\} = \frac{\delta}{\delta j_\rho(z)} b. \quad (3)$$

При обнулении источников выражения (1)–(3) будут соответствовать комплексным скалярным и векторным полям. Отметим, что в производных старших порядков мы будем выделять пары производных, соответствующих пропагаторам при обнулении источников, помня, что производная по источникам от пропагатора даст ноль, а потому никаких действий с ними производить не нужно. Для примера: третья производная по скалярным источникам записывается в виде

$$\frac{\delta}{\delta\eta(z_3)} \frac{\delta}{\delta\eta^*(z_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(z_1)} \exp\left\{ i \int dx\, [\varphi^*(x)\eta(x) + \eta^*(x)\varphi(x)] + \right.$$
$$\left. + i \int dx\, dy\, \eta^*(x) D_s(x-y)\eta(y) \right\} =$$
$$= \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(z_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(z_1)} a \right) \left(\frac{\delta}{\delta\eta(z_3)} a \right).$$

3. Реализация алгоритма

Для того чтобы получить рекурсивное выражение для древесной части результата дифференцирования по скалярным источникам (без отвлечения на индексированные производные ∂_μ), нам потребуется ввести функцию пропагаторов $P(i[1], \ldots, i[k])$,где $i[1], \ldots, i[k]$ являются индексами аргументов источников, к которой мы должны будем предъявить следующие требования:

1) функция есть произведение пропагаторов вида

$$\left[\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})} \frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[l]})} a \right) \cdots \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[l]})} \frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[p]})} a \right) \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[p]})} \frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[k]})} a \right) \right] \left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[1]})} a \right) \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[k]})} a \right);$$

2) в одном пропагаторе не может быть одинаковых индексов, т. е.

$$\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[l]})}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[l]})}a\right) \quad \text{или} \quad \left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[l]})}\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[l]})}a\right);$$

3) не может быть части произведений пропагаторов, у которых все индексы имеют пару, например

$$\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[l]})}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[p]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[p]})}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[q]})}a\right)\times \times\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[q]})}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[l]})}a\right).$$

Теперь запишем, как выглядит древесная часть результата дифференцирования по скалярным источникам для n-го порядка разложения экспоненты взаимодействия $S(n)$:

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{\forall\{i[1],\ldots,i[k]\}\in\{1,n\}} C(i[1],\ldots,i[k])P(i[1],\ldots,i[k])\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}a\right)\Big\backslash \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[1]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[k]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[k]})}a\right)\right\}+$$
$$+D(n)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_i)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_i)}a\right),$$

где $C(i[1],dots,i[k])$ и $D(n)$ — числовые коэффициенты, которые будут обновляться при рекурсии. Здесь и далее после символа $\backslash$ стоят члены, исключенные из произведения.

Следующий шаг — определение оператора, который будет осуществлять переход от n-го к $n+1$-му порядку разложения экспоненты взаимодействия:

$$N^{(n)}\left(\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2]})}a\right)\cdots \cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[2k-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2k]})}a\right)\right)=$$
$$=\sum_{m=2,\,\mathrm{step}2}^{2k}\sum_{j=1,\,\mathrm{step}2}^{2k-1}\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[j]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[m]})}a\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[j-1]})}a\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[j+1]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[m-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[m+1]})}a\right)\cdots \cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[2k-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2k]})}a\right)\Bigg|_{i[j]\neq i[m]}+$$
$$+k\sum_{m=2,\,\mathrm{step}2}^{2k}\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[m]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[m-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[m+1]})}a\right)\cdots \cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[2k-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2k]})}a\right)+$$
$$+k\sum_{j=1,step2}^{2k-1}\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[j]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[j-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[j+1]})}a\right)\cdots \cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[2k-1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2k]})}a\right)+$$
$$+k(k+1)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[2k-1]})}a\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[2k]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}a\right).$$

Теперь запишем рекурсивную формулу перехода для древесной части результата взятия производных по скалярным источникам. Первым шагом рекурсии будет случай $n=1$, который в древесном приближении имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\to\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right).$$

Далее, действуя последовательно оператором $N^{(n)}$ на каждом шаге и раскрывая скобки, мы придем к выражению для шага $n+1$, которое будет связано с выражением для шага n следующим образом ($S(n+1)=N^{(n+1)}(S(n))$):

$$\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{\forall\{i[1],\ldots,i[k]\}\in\{1,n+1\}} C'(i[1],\ldots,i[k])P(i[1],\ldots,i[k])\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{n+1})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{n+1})}a\right)\times \times\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[1]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[k]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[k]})}a\right)\right\}+$$
$$+D'(n)\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_i)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_i)}a\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\sum_{\forall\{i[1],\ldots,i[k]\}\in\{1,n\}} C(i[1],\ldots,i[k])P(i[1],\ldots,i[k])\times$$
$$\times N^{(n+1)}\left(\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_n)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}a\right)\Big\backslash \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[1]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[1]})}a\right)\cdots\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_{i[k]})}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_{i[k]})}a\right)\right)+$$
$$+D(n)N^{(n+1)}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_i)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_i)}a\right)\right).$$

Далее по аналогии мы должны определить рекурсивную формулу для результата взятия производных по векторным источникам $V(n+1;\Xi)=M^{n+1}(V(n;\Xi))$, где $M^{(n)}$ является аналогом $N^{(n)}$. Понятно, что векторная часть будет зависеть от скалярной в силу существования двух типов вершин — эта зависимость отмечена аргументом Ξ.

Теперь у нас есть все для получения амплитуд древесного уровня. Для этого нам нужно рекурсивно получить древесную часть дифференцирования по скалярным источникам, потом восстановить индексированные производные ∂_μ, выписать соответствующие им древесные результаты дифференцирования по векторным источникам, которые мы тоже получим рекурсивно, и перемножить скалярную и векторную части с некими правилами отбора, которые нам выделят именно древесные амплитуды:

$$\{\widehat{\Xi}S(n+1)\} \otimes \{V(n+1;\Xi)\} = \\ = \{\widehat{\Xi}N^{(n+1)}(S(n))\} \otimes \{M^{(n+1)}(V(n;\Xi))\}.$$

Здесь через $\otimes$ обозначено перемножение с правилами, которые несложно сформулировать: 1) результатом умножения должен быть член с $(n-1)$-м пропагатором для n-го порядка разложения экспоненты взаимодействия; 2) в результате умножения не должно быть частей произведения пропагаторов, у которых все индексы имеют пару.

В качестве примера получения амплитуд имеет смысл рассмотреть комптоновское рассеяние скалярного бозона. В соответствии с приведенными выше формулами и замечаниями нам потребуются члены порядка $(ie)^2$, что означает расчет одно- и двухточечной функции. Следовательно, нам понадобятся элементы матриц $S(1)$ и $S(2)$, а также соответствующие им векторные источники $V(1,\Xi)$ и $V(2,\Xi)$, которые мы перемножим в согласии с правилами отбора и дополнительным отбором по внешним линиям, с тем чтобы получить необходимые нам выражения

$$S(1) = \left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right),$$

$$V(1,\Xi^{(1)}) = \left(\frac{\delta}{\delta j_\mu(x_1)}b\right)\left(\frac{\delta}{\delta j^\mu(x_1)}b\right).$$

Далее необходимо получить выражения для двухточечной части:

$$S(2) = N^{(2)}(S(1)) = \\ = \left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}a\right)+ \\ + \left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_2)}a\right)+ \\ + 2\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_1)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}a\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta^*(x_2)}a\right).$$

Далее нам необходимо выписать для всех возможных подходящих $\Xi_i^{(2)}$ выражения для $V(2,\Xi_i^{(2)})$. В качестве примера выпишем

$$V(2,\Xi_1^{(2)}) = \left(\frac{\delta}{\delta j_\nu(x_2)}\frac{\delta}{\delta j_\mu(x_1)}b\right) + \left(\frac{\delta}{\delta j_\nu(x_2)}b\right)\left(\frac{\delta}{\delta j_\mu(x_1)}b\right).$$

Теперь осталось перемножить, воспользовавшись правилами отбора, произвести отбор по внешним линиям и обнулить источники:

$$\{\widehat{\Xi^{(1)}}S(1)\} \otimes \{V(1;\Xi^{(1)})\} + \sum_{\forall\Xi}\{\widehat{\Xi}S(2)\} \otimes \{V(2;\Xi)\} \to \\ \to (ie)^2 \int dx_1\, \varphi^*(x_1)\varphi(x_1)A_\mu(x_1)A^\mu(x_1) + \\ + \frac{(ie)^2}{2!}\int dx_1\, dx_2 \big[\{(\partial_{\rho1}D_c(x_1-x_2))\varphi(x_1)(\partial_{\rho2}\varphi^*(x_2)) + \\ + (\partial_{\rho2}D_c(x_2-x_1))(\partial_{\rho1}\varphi^*(x_1))\varphi(x_2)\}A^{\rho1}(x_1)A^{\rho2}(x_2) - \\ - \{(\partial^{\rho2}\partial_{\rho1}D_c(x_1-x_2))\varphi(x_1)\varphi^*(x_2) + \\ + D_c(x_2-x_1)(\partial_{\rho1}\varphi^*(x_1))(\partial^{\rho2}\varphi(x_2))\}A^{\rho1}(x_1)A_{\rho2}(x_2) - \\ - \{D_c(x_1-x_2)(\partial^{\rho1}\varphi(x_1))(\partial_{\rho2}\varphi^*(x_2)) + \\ + (\partial_{\rho2}\partial^{\rho1}D_c(x_2-x_1))\varphi^*(x_1)\varphi(x_2)\}A_{\rho1}(x_1)A^{\rho2}(x_2) + \\ + \{(\partial^{\rho2}D_c(x_1-x_2))(\partial^{\rho1}\varphi(x_1))\varphi^*(x_2) + \\ + (\partial^{\rho1}D_c(x_2-x_1))\varphi^*(x_1)(\partial^{\rho2}\varphi(x_2))\}A^{\rho1}(x_1)A^{\rho2}(x_2)\big].$$

Эта структура соответствует диаграммам комптоновского рассеяния скалярного бозона в x-представлении.

Заключение

На примере скалярной электродинамики нами продемонстрирована возможность создания рекурсивного метода расчета древесных элементов S-матрицы при помощи методов функционального интеграла. Неоспоримым преимуществом данного метода является калибровочная инвариантность результата, достигаемая без каких-либо дополнительных действий. Программная реализация этого метода близка к завершению, хотя в статье и нет упоминаний об этом. Кроме того, следует отметить, что в данном алгоритме возможно расширение на однопетлевой уровень с сохранением рекурсии при вычислениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-02-91002-ЦЕРН_а, 08-02-92499-НЦНИЛ_а), а также Министерства науки и образования (грант НШ.1685.2003.2).

Список литературы

1. *Boos E.E., Dubinin M.N., Edneral V.F.* et al. // SINP MSU report. 89-63/140. 1989.
2. *Yuasa F., Fujimoto J., Ishikawa T.* et al. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2000. **138**. P. 18.
3. *Mangano M.L., Moretti M., Piccinini F.* et al. // JHEP 0307:001,2003.
4. *Kilian W., Ohl T., Reuter J.* // FR-THEP-07-01; SI-HEP-2007-07; arXiv: 0708.4233 [hep-ph].
5. *Moretti M., Ohl T., Reuter J.* // LC-TOOL-2001-040-rev; arXiv: hep-ph/0102195.
6. *Alwall J., Demin P., De Visscher S.* // JHEP0709:028,2007.
7. *Арефьева И.Я., Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* // Теоретическая и математическая физика. 1974. **21**, № 3.
8. *Moretti M.* // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2000. **89**. P. 190.

Recursive method of tree-level S-matrix elements of arbitrary order calculations in scalar electrodynamics

E. E. Boos[1a], **V. E. Bunichev**[2b], **A. V. Tolokonnikov**[3c]

[1] *Division of Expiremental High-Energy Physics;* [2] *Division of Theoretical High-Energy Physics, Skobeltsyn Research Institute of Nuclear Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[3] *Department of Quantum Theory and High-Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *boos@theory.sinp.msu.ru,* [b] *bunichev@theory.sinp.msu.ru,* [c] *tolokonnikov@hep.phys.msu.ru.*

Possibility of developing a recursive method of tree-level S-matrix elements for arbitrary order calculations in scalar electrodynamics based on functional integrals formalism is discussed. One of the advantages of this method is that has to have a gauge invariance of amplitudes without supplementary operations on them.

Keywords: recursive computations, functional integral, scattering amplitude.
PACS: 11.55.–m, 11.55.Bq, 11.55.Ds.
Received 22 January 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2009).

Сведения об авторах

1. Боос Эдуард Эрнстович — докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом; тел.: 939-23-93, e-mail: boos@theory.sinp.msu.ru.
2. Буничев Вячеслав Евгеньевич — мл. науч. сотр.; тел.: 939-23-93, e-mail: bunichev@theory.sinp.msu.ru.
3. Толоконников Андрей Владимирович — мл. науч. сотр.; тел.: 939-23-93, e-mail: tolokonnikov@hep.phys.msu.ru.