Совместная диффузия лучей в однородной среде со случайными неоднородностями

О. К. Власова[1a], Л. И. Приходько[2b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
[1] Центр гидрофизических исследований; [2] кафедра физики атмосферы.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] vlasovaok@mail.ru, [b] l.prikhodko@mail.ru

Статья поступила 01.03.2009, подписана в печать 21.04.2009.

Рассмотрены флуктуации направления и амплитуды двух лучей, распространяющихся в среде в среднем однородной со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Решение задачи основано на методе диффузии луча, позволившем получить плотности вероятностей распределения для относительной амплитуды и относительного направления лучей.

Ключевые слова: случайно-неоднородные среды, диффузия луча, уравнение Эйнштейна–Фоккера.
УДК: 550.388.2. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Исследование рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями представляет интерес для многих областей физики, включая, например, физику электромагнитных волн в плазме и ионосфере, физику звуковых волн в газах и жидкостях, атмосфере и морской среде. Метод диффузии луча, предложенный в работе [1] (см. также [2]) и используемый в настоящей работе, заключается в представлении уравнений для направления и положения луча в виде динамических уравнений типа уравнения Ланжевена, от которых возможен переход к уравнению Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей состояния луча. Теория броуновского движения, основанная на решении уравнения Ланжевена, и современная теория дифференциальных стохастических уравнений используют переход от динамического уравнения (уравнения Ланжевена) к уравнению Эйнштейна–Фоккера (диффузии), поскольку решать уравнение Эйнштейна–Фоккера с граничными или начальными условиями предпочтительнее, чем уравнение Ланжевена. Однако стохастическая задача полностью определена динамическим уравнением и предположениями о характере случайных воздействий, поэтому при получении уравнения Эйнштейна–Фоккера следует исходить из динамических уравнений и условий, накладываемых на случайные функции, важнейшим из которых является δ-корреляция по времени. Авторы работы [1] показали, что уравнения луча можно представить в виде уравнения Ланжевена, если в уравнениях луча перейти от длины дуги, играющей роль времени, к координате радиус-вектора, вдоль которой первоначально направлен луч. Заметим, что такой переход возможен лишь при малых отклонениях луча от невозмущенного направления и позволяет предположить, что размер неоднородностей диэлектрической проницаемости много меньше пройденного лучом пути.

В работах [1, 3] была рассмотрена задача о совместной диффузии двух лучей, однако решить уравнение для плотности вероятностей относительной диффузии двух лучей не удалось, ясно лишь, что при переменном коэффициенте диффузии решение не является гауссовым распределением. В связи с этим нами предпринята попытка изучения диффузии двух лучей без учета флуктуаций положения лучей. Проведенное в настоящей работе исследование позволяет перейти к рассмотрению совместного рассеяния N лучей для получения закона распределения параллельного пучка лучей, распространяющегося в случайно-неоднородной среде.

В работе [4] решена задача диффузии луча с учетом флуктуаций амплитуды плоской волны вдоль луча и получен совместный закон распределения плотности вероятностей амплитуды вдоль луча, положения и направления лучевого вектора. Флуктуации амплитуды вдоль лучей исследуются и в настоящей работе.

1. Вывод уравнения Эйнштейна–Фоккера

Запишем уравнения двух лучей и амплитуд вдоль лучей в виде динамических стохастических уравнений типа уравнения Ланжевена [3, 4]:

$$\frac{d\boldsymbol{S}_{\perp 1,2}}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\nabla \boldsymbol{r}_{\perp 1,2}\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_{\perp 1,2}, z), \quad \frac{d\boldsymbol{r}_{\perp 1,2}}{dz} = \boldsymbol{S}_{\perp 1,2},$$
$$\frac{dA_{1,2}}{dz} = -\frac{\alpha A_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_{\perp 1,2}, z)}{\partial z} + \right. \tag{1}$$
$$\left. + \int\limits_0^z \left(\frac{\partial^2\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'_{\perp 1,2}, z')}{\partial x'^2_{1,2}} + \frac{\partial^2\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'_{\perp 1,2}, z')}{\partial y'^2_{1,2}}\right)dz'\right],$$

где $1, 2$ — номера лучей, z — координата, вдоль которой первоначально направлены лучи, $\boldsymbol{S}_\perp\{S_x, S_y\}, \boldsymbol{r}_\perp\{x, y\}$ — координаты направления и положения луча, A, A_0 — амплитуда вдоль луча и амплитуда вдоль луча на входе в случайную среду.

Уравнения (1) получены при условии, что отклонения луча от первоначального направления малы; кроме того, предполагается, что радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости $r_0 \ll z$. Эти предположения возможны, если флуктуации диэлектрической проницаемости малы, а именно

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_\alpha, \quad \alpha \ll 1.$$

Теперь процесс рассеяния луча можно считать марковским случайным процессом и перейти от уравнений (1) к уравнению Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей $P_z(\boldsymbol{r}_{\perp 1}, \boldsymbol{S}_{\perp 1}, A_1, \boldsymbol{r}_{\perp 2}, \boldsymbol{S}_{\perp 2}, A_2, z)$. Однако поскольку подобное уравнение невозможно решить даже без учета амплитуды [1], то ограничимся рассмотрением плотности вероятностей лишь для направления лучей

и амплитуды вдоль лучей, не интересуясь флуктуациями положения лучей:

$$P_z(\boldsymbol{S}_{\perp 1}, A_1, \boldsymbol{S}_{\perp 2}, A_2, z) = \\ = \int P_z(\boldsymbol{S}_{\perp 1}, \boldsymbol{r}_{\perp 1}, A_1, \boldsymbol{S}_{\perp 2}, \boldsymbol{r}_{\perp 2}, A_2, z)\, d\boldsymbol{r}_{\perp 1}\, d\boldsymbol{r}_{\perp 2}.$$

Ниже приведены ранее вычисленные [2, 4] и используемые в рассматриваемой задаче коэффициенты уравнения Эйнштейна–Фоккера:

$$F_{S_{x1}S_{y1}} = F_{S_{x2}S_{y2}} = F_{A_1S_{x1}} = F_{A_1S_{y1}} = F_{A_2S_{x2}} = F_{A_2S_{y2}} = 0, \\ F_{S_{x1}S_{x1}} = F_{S_{x2}S_{x2}} = F_{S_{y1}S_{y1}} = F_{S_{y2}S_{y2}} = D, \qquad (2) \\ F_{A_1A_1} = F_{A_2A_2} = 16DA_0^2\left(\frac{z}{r_0}\right)^2 = D_A.$$

Здесь $D = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2 r_0}$ — коэффициент диффузии луча для гауссовской корреляционной функции $\rho = \frac{\overline{\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}')\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'')}}{\overline{\varepsilon_\alpha^2}} = \rho[(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'')^2] = \rho(r^2) = e^{-r^2/r_0^2}$ [5], r_0 — радиус корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Уравнение Эйнштейна–Фоккера с учетом (2) приобретает вид

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x1}^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y1}^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x2}^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y2}^2}\right) + \\ + 2\frac{\partial^2}{\partial S_{x1}\partial S_{y2}}(F_{S_{x1}S_{y2}}P_z) + 2\frac{\partial^2}{\partial S_{x1}\partial S_{x2}}(F_{S_{x1}S_{x2}}P_z) + \\ + 2\frac{\partial^2}{\partial S_{x2}\partial S_{y1}}(F_{S_{x2}S_{y1}}P_z) + 2\frac{\partial^2}{\partial S_{y2}\partial S_{y1}}(F_{S_{y2}S_{y1}}P_z) + \\ + D_A\left(\frac{\partial^2 P_z}{\partial A_1^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial A_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial A_1\partial A_2}(F_{A_1A_2}P_z) + \\ + 2\frac{\partial^2}{\partial A_1\partial S_{x2}}(F_{A_1S_{x2}}P_z) + 2\frac{\partial^2}{\partial A_1\partial S_{y2}}(F_{A_1S_{y2}}P_z) + \\ + 2\frac{\partial^2}{\partial A_2\partial S_{x1}}(F_{A_2S_{x1}}P_z) + 2\frac{\partial^2}{\partial A_2\partial S_{y1}}(F_{A_2S_{y1}}P_z). \qquad (3)$$

Вычислим оставшиеся коэффициенты:

$$F_{S_{x1}S_{y2}} = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z \overline{\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_{\perp 1}, z)}{\partial x_1}\,\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'_{\perp 2}, z')}{\partial y'_2}}\, dz' = \\ = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z \frac{\partial^2\rho(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_2)}{\partial x_1\partial y'_2}\, dz' = \\ = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z\left[-4(y_1 - y'_2)(x_1 - x'_2)\frac{d^2\rho}{d(r^2)^2}\right]dz' = \\ = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\left[-4(y_1 - y'_2)(x_1 - x'_2)e^{-(\Delta x^2 + \Delta y^2)/r_0^2}\times\right. \\ \left.\times\frac{1}{r_0^4}\int_0^z e^{-(z-z')^2/r_0^2}\, dz'\right] = \\ = -2D\frac{\Delta x\Delta y}{r_0^2}e^{-(\Delta x^2+\Delta y^2)/r_0^2} = -2D\frac{\Delta x\Delta y}{r_0^2}e^{-R^2/r_0^2}$$

Здесь $R^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ — расстояние между лучами в плоскости (x, y). Остальные коэффициенты, связанные с диффузией двух лучей, таковы:

$$F_{S_{x1}S_{x2}} = D\left(1 - \frac{2\Delta x^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}, \\ F_{S_{y1}S_{y2}} = D\left(1 - \frac{2\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}, \\ F_{S_{x2}S_{y1}} = F_{S_{x1}S_{y2}}.$$

По определению и в соответствии с (1) коэффициент $F_{A_1A_2}$ равен выражению

$$F_{A_1A_2} = \frac{\alpha^2 A_0^2}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z \overline{dz'\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_{\perp 1}, z)}{\partial z} + \right.} \\ \overline{\left. + \int_0^z\left[\frac{\partial^2\varepsilon''_\alpha(\boldsymbol{r}''_{\perp 1}, z'')}{\partial x''^2_1} + \frac{\partial^2\varepsilon''_\alpha}{\partial y''^2_1}\right]dz''\right\}\times} \\ \overline{\times\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varepsilon'(\boldsymbol{r}'_{\perp 2}, z')}{\partial z'} + \int_0^{z'}\left[\frac{\partial^2\varepsilon'''_\alpha(\boldsymbol{r}'''_{\perp 2}, z''')}{\partial x'''^2_2} + \frac{\partial^2\varepsilon'''_\alpha}{\partial y'''^2_2}\right]dz'''\right\}}.$$

Принимая во внимание результаты вычисления коэффициентов, входящих в уравнение Эйнштейна–Фоккера и связанных с амплитудой в работе [3], и учитывая, что $\frac{z}{r_0} \gg 1$, получаем

$$F_{A_1A_2} = \frac{\alpha^2 A_0^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z dz'\int_0^z dz''\int_0^{z'} dz'''\left\{\frac{\partial^4\rho}{\partial x''^2_1\partial x'''^2_2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^4\rho}{\partial y''^2_1\partial x'''^2_2} + \frac{\partial^4\rho}{\partial y'''^2_2\partial x''^2_1} + \frac{\partial^4\rho}{\partial y''^2_1\partial y'''^2_2}\right\}.$$

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^z dz'\int_0^z dz''\int_0^{z'}\frac{\partial^4\rho}{\partial^2 x''\partial^2 x'''}\, dz''' = \int_0^z dz'\, z'\times \\ \times 2\int_0^\infty\left[16\frac{d^4\rho(r^2)}{d(r^2)^4}x^4 + 48\frac{d^3\rho}{d(r^2)^3}x^2 + 12\frac{d^2\rho}{d(r^2)^2}\right]dr = \\ = z^2 4\left[4\Delta x^4\frac{1}{r_0^8} - 12\Delta x^2\frac{1}{r_0^6} + 3\frac{1}{r_0^4}\right]\times \\ \times e^{-(\Delta x^2+\Delta y^2)/r_0^2}\int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2}\, dr = \\ = \frac{2\sqrt{\pi}\, z^2}{r_0^3}\left(4\frac{\Delta x^4}{r_0^4} - 12\frac{\Delta x^2}{r_0^2} + 3\right)e^{-(\Delta x^2+\Delta y^2)/r_0^2}.$$

В результате получим

$$F_{A_1A_2} = 8DA_0^2\frac{z^2}{r_0^2}e^{-R^2/r_0^2}\left\{\left(\frac{R}{r_o}\right)^4 - 4\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + 2\right\}. \qquad (4)$$

Легко убедиться в том, что имеют место соотношения

$$F_{A_1S_{x_2}} = -F_{A_2S_{x1}}, \quad F_{A_1S_{y2}} = -F_{A_2S_{y1}}. \qquad (5)$$

Подставим вычисленные коэффициенты в уравнение (3) и перейдем, как это сделано в работе [1], к переменным

$$A_- = A_1 - A_2, \qquad A_+ = \frac{A_1 + A_2}{2},$$
$$S_{x-} = S_{x1} - S_{x2}, \qquad S_{x+} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{2},$$
$$S_{y-} = S_{y1} - S_{y2}, \qquad S_{y+} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{2},$$

что позволяет после интегрирования по $\boldsymbol{S}_+, A_+$ получить уравнение, описывающее относительную диффузию двух лучей:

$$\frac{\partial P_z(A_-, \boldsymbol{S}_{\perp -}, z)}{\partial z} = 2D\frac{\partial^2 P_z}{\partial \boldsymbol{S}_{\perp -}^2} - 2D\left(1 - 2\frac{\Delta x^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}^2} -$$
$$-2D\left(1 - 2\frac{\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y-}^2} + 8D\frac{\Delta x \Delta y}{r_0^2}e^{-R^2/r_0^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}\partial S_{y-}} +$$
$$+ 2D_A\frac{\partial^2 P_z}{\partial A_-{}^2} - 2F_{A_1A_2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial A_-{}^2} - 2\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}\partial A_-}(F_{A_1S_{x1}} + F_{A_2S_{x1}}) -$$
$$- 2\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y-}\partial A_-}(F_{A_1S_{y2}} + F_{A_2S_{y1}}). \quad (6)$$

Из (5) следует, что два последних члена уравнения (6) равны нулю, и тогда уравнение для плотности вероятностей относительного направления и относительной амплитуды двух лучей имеет вид

$$\frac{\partial P_z(A_-, \boldsymbol{S}_{\perp -}, z)}{\partial z} = 2D\left[1 - \left(1 - 2\frac{\Delta x^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\right]\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}^2} +$$
$$+ 2D\left[1 - \left(1 - 2\frac{\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\right]\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y-}^2} +$$
$$+ 8De^{-R^2/r_0^2}\frac{\Delta x \Delta y}{r_0^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}\partial S_{y-}} + 2(D_A - F_{A_1A_2})\frac{\partial^2 P_z}{\partial A_-{}^2}, \quad (7)$$

где выражения для D_A и $F_{A_1A_2}$ определяются из (2) и (4) соответственно.

2. Решение уравнения Эйнштейна–Фоккера

Из уравнения (7) очевидно, что распределения относительной амплитуды двух лучей и относительного направления лучевого вектора независимы. Распределение относительной амплитуды подчиняется уравнению

$$\frac{\partial P_z(A_-, z)}{\partial z} = 2(D_A - F_{A_1A_2})\frac{\partial^2 P_z}{\partial A_-{}^2} \quad (8)$$

и начальным условиям

$$P_z(A_-, z = 0) = \delta(A_-).$$

Выражение $(D_A - F_{A_1A_2})$ является функцией z (2), (4).

Решение (8), как известно [6], является нормальным распределением с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma_{A_-}^2 = \frac{64D^*A_0^2}{3}\left(\frac{z}{r_0}\right)^3\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{R^4}{r_0^4} - 4\frac{R^2}{r_0^2} + 2\right]e^{-R^2/r_0^2}\right\}, \quad (9)$$

где $D^* = Dr_0$.

Заметим, что когда $R = 0$, то $D_A = F_{A_1A_2}$, относительная диффузия отсутствует. Если $\frac{\Delta R}{r_0} \gg 1$, то $F_{A_1A_2} = 0$. В этом случае относительная диффузия амплитуды двух лучей соответствует удвоенной диффузии амплитуды одного луча, т. е. флуктуации амплитуд вдоль лучей независимы.

Перейдем к рассмотрению плотности вероятности $P_z(\boldsymbol{S}_{\perp -}, z)$, которая подчиняется уравнению, следующему из (7):

$$\frac{\partial P_z(\boldsymbol{S}_{\perp -}, z)}{\partial z} = D_{S_{x-}}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}^2} + D_{S_{y-}}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{y-}^2} + D_{S_{x-}S_{y-}}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_{x-}\partial S_{y-}}, \quad (10)$$

и начальным условиям $P_z(\boldsymbol{S}_{\perp -}, z{=}0) = \delta(\boldsymbol{S}_{\perp -})$, где введены обозначения

$$D_{S_{x-}} = 2D\left[1 - \left(1 - 2\frac{\Delta x^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\right],$$
$$D_{S_{y-}} = 2D\left[1 - \left(1 - 2\frac{\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-R^2/r_0^2}\right], \quad (11)$$
$$D_{S_{x-}S_{y-}} = 8D\frac{\Delta x \Delta y}{r_0^2}e^{-R^2/r_0^2}.$$

Из этого уравнения следует, что если расстояние между лучами много больше радиуса корреляции неоднородностей, то происходит относительная диффузия с удвоенным по сравнению с диффузией одного луча коэффициентом диффузии, что говорит о независимом движении лучей. Эти выводы совпадают с результатами работы [1, 3].

Решение уравнения (10) известно, если равен нулю коэффициент при смешанной производной. Последнее возможно, если или Δx, или Δy равен нулю. Пусть, например, $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$, тогда получаем решение уравнения (10)

$$P_z = \frac{1}{8\pi Dz\sqrt{1 - e^{-\Delta y^2/r_0^2}}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-\Delta y^2/r_0^2}}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\left[\frac{S_{x-}^2}{8Dz\left(1 - e^{-\Delta y^2/r_0^2}\right)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{S_{y-}^2}{8Dz\left[1 - \left(1 - \frac{2\Delta y^2}{r_0^2}\right)e^{-\Delta y^2/r_0^2}\right]}\right]\right\}.$$

Для решения (10) при произвольных Δx, Δy перейдем к новым переменным S'_{x-}, S'_{y-} поворотом S_{x-}, S_{y-} на угол φ:

$$S'_{x-} = S_{x-}\cos\varphi + S_{y-}\sin\varphi, \quad S'_{y-} = -S_{x-}\sin\varphi + S_{y-}\cos\varphi.$$

В новых переменных уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial^2 P_z}{\partial S'^2_{x-}}\left[D_{S_{x-}}\cos^2\varphi + D_{S_{y-}}\sin^2\varphi + D_{S_{x-}S_{y-}}\cos\varphi\sin\varphi\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2 P_z}{\partial S'^2_{y-}}\left[D_{S_{x-}}\sin^2\varphi + D_{S_{y-}}\cos^2\varphi - D_{S_{x-}S_{y-}}\cos\varphi\sin\varphi\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2 P_z}{\partial S'_{x-}\partial S'_{y-}}\left[(-D_{S_{x-}} + D_{S_{y-}})\sin 2\varphi + D_{S_{x-}S_{y-}}\cos 2\varphi\right].$$

Угол поворота определяется равенством нулю коэффициента при смешанной производной:

$$\sin 2\varphi(D_{S_{y-}} - D_{S_{x-}}) = -D_{S_{x-}S_{y-}}\cos 2\varphi.$$

Поскольку случай $D_{S_{x-}S_{y-}} = 0$ уже рассмотрен нами ранее, то полагаем $D_{S_{x-}S_{y-}} \neq 0$. В результате поворота находим решение для переменных S'_{x-}, S'_{y-}. Возвращаясь вновь к переменным S_{x-}, S_{y-}, получим двумерный нормальный закон распределения со следующими дисперсиями и коэффициентом корреляции:

$$\sigma^2_{S_{x-}} = 2D_{S_{x-}} z,$$
$$\sigma^2_{S_{y-}} = 2D_{S_{y-}} z, \qquad (12)$$
$$r = \frac{D_{S_{x-}S_{y-}}}{2\sqrt{D_{S_{x-}} D_{S_{y-}}}}.$$

Заметим, что дисперсии относительных флуктуаций направления лучей, коэффициент корреляции между ними и дисперсия относительной амплитуды вдоль лучей (12), (9) зависят от расстояния между лучами.

Заключение

Проведенное в настоящей работе исследование совместной диффузии двух лучей позволило получить закон распределения плотности вероятностей относительного направления лучей и относительной амплитуды вдоль лучей при произвольном расстоянии между лучами. Оба распределения подчинены нормальному закону, дисперсии и коэффициент корреляции которых определяются выражениями (9), (11), (12). Отметим, что дисперсии относительных лучевых направлений пропорциональны величине $\frac{z}{r_0}$, дисперсия относительной амплитуды подчинена кубической зависимости $\left(\frac{z}{r_0}\right)^3$ [4].

Решение получено без учета диффузии положения лучей. Показано, что характеристики описанных выше распределений являются функциями расстояния между лучами.

Проведенное в работе математическое описание совместной диффузии лучей на основе стохастического метода можно использовать для исследования распространения параллельных пучков лучей в случайно-неоднородных средах.

Список литературы

1. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. **14**, № 5. С. 707.
2. *Власова О.К.* Развитие метода диффузии луча и решение некоторых задач рассеяния: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. МГУ, физический факультет, 2004.
3. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. М., 2008.
4. *Власова О.К., Приходько Л.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 5. С. 18.
5. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. М., 1975.
6. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947.

The rays diffusion in a random medium

O.K. Vlasova[1a], **L.I. Prikhod'ko**[2b]

[1] *Center of Hydrophysical Research;* [2] *Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *vlasovaok@mail.ru,* [b] *l.prikhodko@mail.ru.*

Fluctuations of the directions and the amplitudes along two rays, propagating in a medium with random inhomogeneous of dielectric permittivity, are considered. The probabilities density of distribution of the relative directions and amplitude are obtained making use the method of ray diffusion.

Keywords: random media, ray diffusion, Einstein–Fokker equation.
PACS: 41.20.Jb.
Received 1 March 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2009).

Сведения об авторах

1. Власова Ольга Кузьминична — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр.; e-mail: vlasovaok@mail.ru.
2. Приходько Лидия Ивановна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; e-mail: l.prikhodko@mail.ru.