

О золотом сечении и самоподобных структурах в оптике

Н. В. Грушина^a, А. М. Зотов, П. В. Короленко^b, А. Ю. Мишин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра оптики и спектроскопии. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^anatalya_grushina@mail.ru, ^bpukorolenko@rambler.ru

Статья поступила 13.12.2008, подписана в печать 16.04.2009.

На основе численного моделирования установлено, что связанное с золотыми пропорциями самоподобие в структуре дифракционных решеток и многослойных систем Фибоначчи находит адекватное отражение в их оптических характеристиках. Сопоставлены свойства оптических элементов с различной апериодической структурой. Показано, что устройства, созданные с использованием свойств золотого и серебряного сечений, имеют схожее поведение оптических параметров с точки зрения проявления указанных сечений.

Ключевые слова: золотое сечение, дифракционная решетка, многослойная система.

УДК: 535.317:621.378. PACS: 42.15.Eq.

Введение

В настоящее время заметно возраст интерес к феномену золотого сечения (ЗС) [1]. Если ранее основной акцент делался на анализе различных форм проявления ЗС в искусстве, живой и неживой природе, то сейчас значительно большее внимание уделяется реализации его эвристических возможностей. Можно привести много примеров, когда ЗС стало ориентиром при обнаружении и изучении новых явлений и эффектов. Так, известен факт использования представлений о ЗС при открытии структуры фуллеренов [2, 3]. Важную роль сыграли ассоциации, связанные с ЗС, при изучении и интерпретации свойств квазикристаллов с осью симметрии пятого порядка, обнаружение которых кардинально изменило существовавшие взгляды на природу и различие живой и неживой материи [4, 5]. Математическая модель, описывающая апериодическую структуру квазикристаллов, нашла применение и в оптике.

Существует ряд работ, в которых одномерная модель квазикристалла используется для построения нового типа оптических элементов: апериодических дифракционных решеток и многослойных систем [6–8]. Такие решетки и многослойные системы имеют разнообразные применения. Они успешно используются в селективных волноводных устройствах [9], в системах компрессии импульсов [10] и преобразованиях частоты оптического излучения [11]. Одновременно указанные элементы являются удобным средством для исследования физических эффектов, приводящих к формированию самоподобных световых структур [12]. Целью настоящей работы является поиск общих физических закономерностей, связывающих самоподобие структуры оптических элементов с самоподобием характеристик прошедших через них световых волн. Особое внимание удалено выявлению особенностей преобразования волн, обусловленных присутствием в структуре элементов ЗС. Даны оценка степени уникальности этих особенностей.

ЗС и связанные с ним золотые пропорции чаще всего ассоциируются с геометрической задачей деления отрезка на две неравные части в таком соотношении, когда большая часть относится к меньшей, как весь отрезок к большей части. Величина этих отношений равна иррациональному числу $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, называемому коэффициентом ЗС. С ЗС тесным образом связана числовая последовательность Фибоначчи, имеющая вид: 1, 1,

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Во многих случаях именно через нее ЗС реализуется в различных объектах и процессах. В основе последовательности Фибоначчи лежит суммационный принцип, согласно которому каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad (1)$$

где m — номер числа Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи обладает важным свойством, согласно которому $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F_{m+1}}{F_m} = \Phi$.

С использованием закономерности (1) может быть дано описание упомянутой выше одномерной модели квазикристалла, расстояния между атомами которого принимают лишь два значения: большое — A и малое — B . Чередование больших и малых интервалов между атомами носит апериодический характер и подчиняется простому рекурсивному правилу, задающему поблочный принцип построения цепочки атомов: $S_k = S_{k-1}S_{k-2}$ (для $k \geq 2$) [12]. Задавая начальные блоки в виде $S_0 = B$, $S_1 = A$, для последовательности блоков более высокого уровня получаем выражения

$$S_2 = AB; \quad S_3 = ABA; \quad S_4 = ABAAB \text{ и т. д.} \quad (2)$$

Хорошо видно, что изменение структуры блоков с увеличением их уровня отражает суммационный принцип построения последовательности Фибоначчи. Примечательно, что при увеличении номера k структурного блока S_k отношение числа интервалов A к числу интервалов B , содержащихся в блоке, стремится к коэффициенту ЗС.

Рассматриваемый одномерный квазикристалл обладает еще одним уникальным свойством, связывающим его геометрию с коэффициентом ЗС. Это свойство состоит в следующем: если рассмотреть последовательность порядковых номеров больших интервалов A , то при увеличении всех ее членов в Φ раз она переходит в последовательность индексов для малых интервалов B . Это указывает на наличие сочетающегося с золотыми пропорциями самоподобия в структуре квазикристалла. При этом коэффициент самоподобия оказывается равным Φ .

1. Структура и свойства оптических устройств Фибоначчи

Способ построения одномерного квазикристалла является одновременно алгоритмом для создания аperi-

дических дифракционных решеток и многослойных систем. Так, при их построении закон чередования малых и больших межатомных расстояний в квазикристалле переносится на законы чередования узких и широких щелей в амплитудной решетке и слоев с большим и меньшим показателем преломления в многослойной системе. Естественно, построенные на основе данного алгоритма оптические элементы (часто их называют элементами Фибоначчи) обладают, как и одномерные квазикристаллы, внутренним самоподобием.

Выполненные в рамках настоящей работы расчеты показали, что указанное самоподобие находит отражение и в ряде характеристик световых волн, прошедших через дифракционные решетки и многослойные системы Фибоначчи. Это подтверждает рис. 1, *a*, где показано характерное для дальней зоны распределение амплитуды поля дифракции при нормальном падении волны на амплитудную решетку. При расчете использовался метод сложения амплитуд волн, дифрагировавших на широких и узких щелях, последовательность которых определяется принципом Фибоначчи [13]. Количество щелей принималось равным $N = 500$, ширины щелей значительно уступали размерам непрозрачных зон. В отличие от периодической решетки, на которой поле дифракции характеризуется эквидистантной последовательностью максимумов A, B, C, \dots , решетка Фибоначчи формирует целую фракталоподобную систему дополнительных дифракционных пиков, положение которых определяется принципом ЗС. Для удобства восприятия некоторые интервалы, удовлетворяющие золотой пропорции, на данном и приведенных ниже рисунках помечены стрелками; отношение длин интервалов, помеченных стрелками, равно коэффициенту Φ . На рис. 1, *a* дополнительные максимумы D и E делят в соответствии с ЗС расстояние между главными максимумами A и B . Максимумы E и H по ЗС делят интервалы DB и AD . Дополнительные максимумы F и G находятся в точках ЗС между максимумами D и E . Для остальных дополнительных дифракционных пиков также можно указать интервалы, которые делятся ими в соответствии с ЗС. Все это указывает на присутствующее самоподобие расположения дифракци-

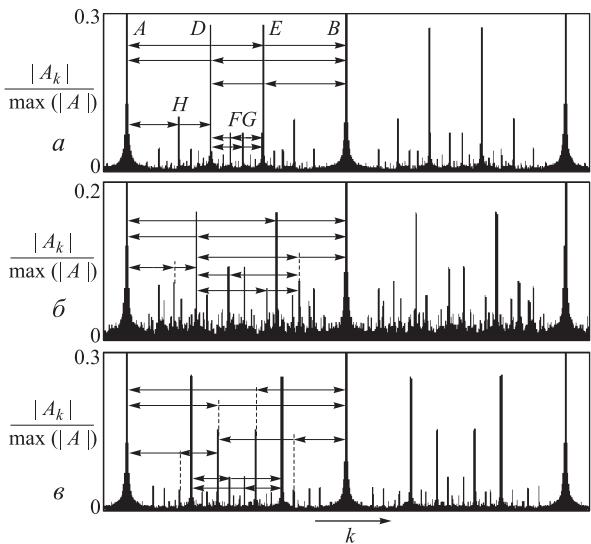


Рис. 1. Картинны дифракции света на решетках: *a* – решетка Фибоначчи; *б* – решетка на основе обобщенной последовательности Фибоначчи; *в* – решетка на базе ряда серебряного сечения; k – пространственная частота

онных максимумов, характеризующееся коэффициентом самоподобия, равным Φ .

Дополнительное самоподобие картинам дифракции придает схожесть их отдельных фрагментов. Структура дифракционных максимумов в интервале AB подобна структуре максимумов в интервалах DE и FG . Отношение этих интервалов r в отличие от коэффициента самоподобия будем в дальнейшем называть параметром подобия. Для рассматриваемого случая он оказывается равным $r = 4.2$, что примерно равно Φ^3 . Коэффициент и параметр самоподобия дифракционной картины, как показывают расчеты, не зависят от того, меняются ли по соответствующему закону ширины щелей, размеры непрозрачных зон либо периоды решеток. Не вносит существенных изменений в поле дифракции и переход от амплитудной решетки к фазовой.

На наличие самоподобия и ЗС указывает также анализ характеристик многослойных систем. На рис. 2, *a* показан рассчитанный с использованием матричного формализма [7, 8] спектр пропускания четвертьволновой системы, насчитывающей 233 слоя. Показатели преломления в слоях принимались (как и в нижеприведенных расчетах) равными 1.45 и 2.3. В самоподобности спектра несложно убедиться, если сравнить представленный график с его растянутой модификацией, задаваемой зависимостью $T(\omega/s)$, где s – положительное число (рис. 2, *б*). Схожесть графиков, представленных на рис. 2, *a*, *б*, при $s = 4.9$, а также присутствующие в них золотые пропорции (см. расположение стрелок) указывают на то, что самоподобие спектра тесно связано с ЗС. Отметим, что указанное значение s соответствует максимальному значению коэффициента корреляции в поведении графиков и фактически определяет параметр самоподобия.

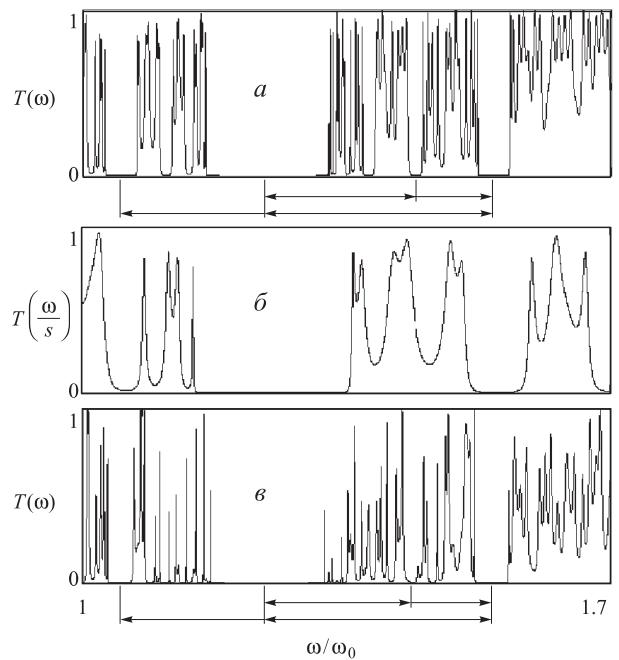


Рис. 2. График зависимости коэффициента пропускания T многослойной системы Фибоначчи от циклической частоты излучения ω (*а*); график $T(\omega/s)$ при $s = 4.9$ (*б*); график $T(\omega)$ при случайном замещении 5% слоев (*в*); ω_0 – частота, при которой фазовые набеги в каждом слое равны $\pi/2$

Самоподобные признаки в спектрах пропускания характеризуются определенной степенью устойчивости. Ее иллюстрирует приведенная на рис. 2, в одна из реализаций спектра пропускания, когда осуществлена замена 5% случайно расположенных слоев на слои с альтернативным значением показателя преломления. Как видно из хода кривой пропускания, такая замена не приводит к существенным изменениям положения наиболее широких запрещенных зон, которое по-прежнему соответствует золотым пропорциям. Расчеты показывают, что кардинальная трансформация структуры спектра наблюдается, когда уровень рандомизации превышает 10%.

Самоподобие, сочетающееся с золотыми пропорциями, можно обнаружить и в зависимости коэффициента пропускания T многослойной системы Фибоначчи от числа слоев n . Для четвертьволновой системы она графически представлена на рис. 3, а. Из приведенного графика видно, что точки ЗС совпадают с положением ряда хорошо выраженных минимумов пропускания. Расстановка этих точек позволяет говорить, что и здесь коэффициент самоподобия в расположении минимумов пропускания оказывается равным величине Φ . На графике $T(n)$ несложно обнаружить и самоподобие структуры отдельных его фрагментов. Это можно сделать, если сравнить поведение графика с ходом его растянутой в s раз модификации. В нашем случае наилучшая схожесть графиков достигается, если $s \equiv r = 4.2$ (рис. 3, б). Обращает на себя внимание совпадение значений параметров подобия зависимости $T(n)$ и распределения амплитуды в поле дифракции на решетке Фибоначчи.

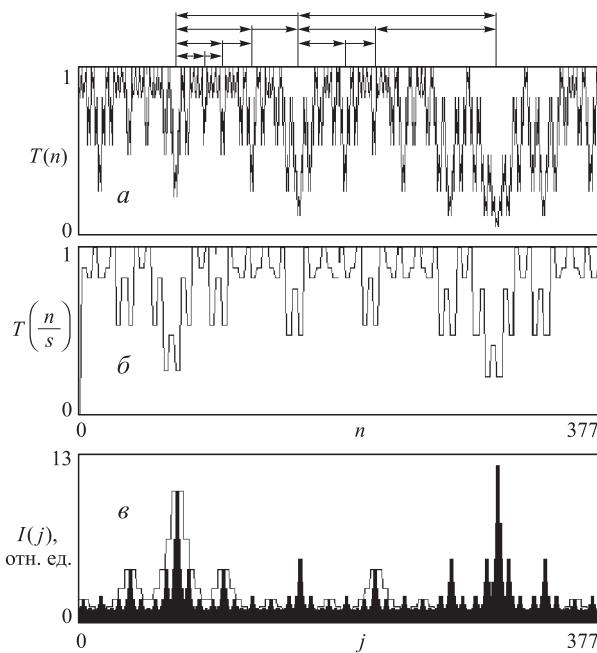


Рис. 3. Зависимость коэффициента пропускания T многослойной системы Фибоначчи от числа слоев n (а); график $T(n/s)$ при $s = 4.25$ (б); распределение интенсивности I по слоям системы (в); j — номер слоя, сплошной массив — распределение $I(j)$, тонкая линия — распределение, растянутое в $s = 4.25$ раза

Весьма отчетливо ЗС и признаки самоподобия проявляются на графике распределения интенсивности света по слоям многослойной системы. На рис. 3, в такой график приведен для системы из 377 слоев. Он рас-

считывался с помощью уже упоминавшегося матричного метода. Анализ структуры приведенного графика, а также его сравнение с растянутой в s раз модификацией показывают, что присутствующее в нем самоподобие характеризуется практически теми же параметрами, что и зависимость $T(n)$. Примечательной является схожесть расположения максимумов интенсивности в слоях многослойной системы и амплитуды поля в картине дифракции света на решетке Фибоначчи (рис. 1, а).

2. Характеристики модернизированных систем Фибоначчи

Рассмотрим вопрос о том, будет ли присуще самоподобие модернизированным системам Фибоначчи, построенным на основе последовательности обобщенных чисел Фибоначчи [1] и так называемого числового ряда металлических сечений [14]. При их построении используется обобщение суммационного принципа Фибоначчи. Для получения ряда обобщенных чисел Фибоначчи суммационный принцип сводится к следующей рекуррентной формуле:

$$F_p(m) = F_p(m-1) + F_p(m-p-1), \quad (3)$$

где p — неотрицательное целое число.

Согласно формуле (3), каждому p соответствует своя числовая последовательность. В случае $p=1$ «генерируемая» последовательность будет совпадать с рядом Фибоначчи. Для каждого p существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F_p(m+1)}{F_p(m)} = \tau_p$, называемый обобщенной золотой пропорцией. При $p=0$ $\tau_0=2$, при $p=1$ $\tau_1=1.618\dots=\Phi$, при $p=2$ $\tau_2=1.465\dots$, а при $p \rightarrow \infty$ $\tau_\infty \rightarrow 1$.

При построении ряда $G(n)$ металлических сечений суммационный принцип выражается формулой

$$G_{pq}(m+1) = pG_{pq}(m) + qG_{pq}(m-1), \quad (4)$$

где p и q — целые неотрицательные числа.

Для предела $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{G_{pq}(m+1)}{G_{pq}(m)} = \sigma_{pq}$ справедливо выражение

$$\sigma_{pq} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \quad (5)$$

При $p=q=1$ величина σ_{11} оказывается равной коэффициенту ЗС $\sigma_{11}=\Phi$. Соответствующая $p=2$ и $q=1$ величина $\sigma_{21}=2.414\dots$ получила название коэффициента серебряного сечения, при $p=3$ и $q=1$ говорят о коэффициенте бронзового сечения σ_{31} . Если $p=1$, а $q=2$ или $q=3$, то принято говорить соответственно о медном и никелевом сечениях. Важная особенность ряда серебряного сечения состоит в том, что он связан с геометрией квазикристаллов, обладающих осью симметрии восьмого порядка (такие квазикристаллы были обнаружены уже после открытия квазикристаллов с осью симметрии пятого порядка).

Рассмотрим подробнее свойства оптических систем, построенных на базе последовательности обобщенных чисел Фибоначчи с $p=2$ и числового ряда серебряного сечения. Система блоков первичных элементов A и B , соответствующих последовательности обобщенных чисел Фибоначчи, будет иметь вид

$$S_0 = B, \quad S_1 = A, \quad S_2 = B, \quad S_3 = S_2 S_0, \quad S_4 = S_3 S_1, \dots \quad (6)$$

Блоки элементов ряда серебряного сечения будут обладать следующей структурой:

$$S_0 = B, \quad S_1 = A, \quad S_2 = S_1 S_1 S_0, \quad S_3 = S_2 S_2 S_1, \quad S_4 = S_3 S_3 S_2, \dots \quad (7)$$

Результаты расчета картин дифракции света на амплитудных решетках, структура которых сформирована путем применения правил (6) и (7), графически приведены на рис. 1, б, в. Ориентируясь на расположение и длины стрелок на указанном рисунке, можно сделать вывод о существовании самоподобия в распределении амплитуд поля дифрагировавшей волны. Действительно, отношение длин стрелок (расположенных на одной линии) на рис. 1, б оказывается близким к значению τ_2 , а на рис. 1, в — к значению σ_{21} . Это говорит о том, что пропорции, заложенные в математических соотношениях, связанных со структурой решеток, проявляются и в структуре дифрагировавших волн. Тем самым, сравнивая графики на рис. 1, а, б, в, можно говорить об определенной аналогии между картинами дифракции света на решетках разных типов. В то же время следует отметить особую гармоничность в расположении и величине пиков в поле дифракции света на решетке Фибоначчи.

К неоднозначным выводам приводят сравнение оптических характеристик многослойных систем, отличающихся видом используемого суммационного принципа. Так, для многослойной системы, построенной на основе обобщенных чисел Фибоначчи, зависимость пропускания от числа слоев и распределение по слоям интенсивности света не обнаруживают ни отчетливых пропорций, ни связанного с ними самоподобия в расположении экстремальных точек.

Иными свойствами обладают многослойные системы, построенные на базе ряда серебряного сечения. Приведенные на рис. 4 графики зависимостей $T(n)$, $T(n/s)$, $I(j)$ указывают на то, что такого рода системы, подобно системе Фибоначчи, имеют самоподобные оптические характеристики с коэффициентом самоподобия, равным коэффициенту серебряного сечения. Зависимости $T(n)$ и $I(j)$ имеют также одинаковый параметр подобия $r = 5.8 \approx \sigma_{21}^2$, близкий к параметру подобия в распределении амплитуды поля дифрагировавшей на решетке световой волны (рис. 1, в). Приведенные факты указывают на то, что оптические элементы, геометрия

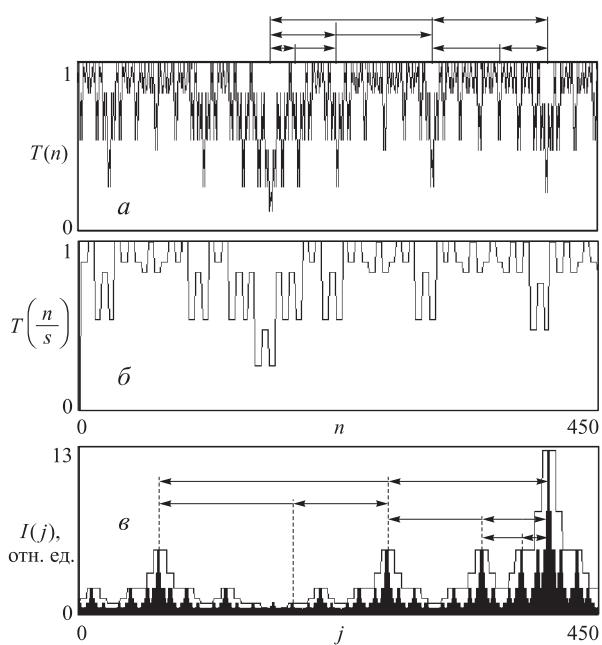


Рис. 4. Самоподобие в многослойных системах на основе ряда серебряного сечения. Обозначения те же, что на рис. 3

которых отражает принцип серебряного сечения, с точки зрения гармонии своих характеристик приближаются к элементам Фибоначчи. Из этого следует, что оптическим свойствам устройств Фибоначчи не следует придавать исключительный характер.

В ходе выполнения настоящей работы были проведены дополнительные расчеты с целью сравнения устройств, одни из которых построены с использованием суммационного принципа Фибоначчи, а другие созданы на основе иных апериодических последовательностей. Были выбраны последовательности Морса—Туэ, двойного периода и Рудина—Шапиро [12]. В ходе анализа оптических свойств таких систем было обнаружено, что в ряде случаев отдельные их характеристики обнаруживают признаки самоподобия. Однако проявление единообразного самоподобия в совокупности характеристик, свойственного системам Фибоначчи, в них не наблюдается.

Заключение

Один из основных выводов, который можно сделать на основе выполненных расчетов, состоит в том, что связанное с золотыми пропорциями самоподобие структуры дифракционных решеток и многослойных систем Фибоначчи адекватным образом проявляется в их оптических характеристиках. При этом отмечается определенное единообразие в поведении оптических параметров, характеризующееся единым коэффициентом самоподобия.

Сравнение систем Фибоначчи с другими системами, построенными на основе обобщения суммационного принципа Фибоначчи, указывает на ограниченный характер проявления в характеристиках последних самоподобных признаков. Исключение составляют устройства, созданные с использованием ряда серебряного сечения. Их свойства по своей гармонии приближаются к свойствам систем Фибоначчи. Этот факт можно гипотетически объяснить, связав его с тем, что геометрия устройств, построенных с использованием правил золотого и серебряного сечений, отражает структуру квазикристаллов с различным типом вращательной симметрии. Такая связь обеспечивает специфическую упорядоченность в расположении первичных элементов рассматриваемых устройств и в конечном счете самоподобие характеристик световых волн. Все это говорит о том, что свойства систем Фибоначчи не следует считать абсолютно уникальными.

Рассмотренные в настоящей работе физические закономерности могут найти применение при оптимизации параметров и контроле качества устройств, построенных с использованием суммационного принципа Фибоначчи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4408.2008.2).

Список литературы

1. Stakhov A. // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. **27**, N 5. P. 1124.
2. Смоли Р.Е. // УФН. 1998. **168**, № 3. С. 323.
3. Крото Г. // УФН. 1998. **168**, № 3. С. 343.
4. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**, N 20. P. 1951.
5. Векилов Ю.Х. // Сорос. образоват. журн. 1997. № 1. С. 87.
6. Sah Yuvaraj, Ranganath G.S. // Opt. Comm. 1995. **114**, N 1-2. P. 18.

7. Kohmoto M., Sutherlan B., Iguchi K. // Phys. Rev. Lett. 1987. **58**, N 23. P. 2436.
8. Gellermann W., Kohmoto M., Sutherland B., Taylor P.C. // Phys. Rev. Lett. 1994. **72**, N 5. P. 633.
9. Hiltunen M., Dal Negro L., Feng N.N. et al. // J. Lightwave Technol. **25**, N 7. P. 1841.
10. Makarova L.N., Nazarov M.M., Ozheredov I.A. et al. // Phys. Rev. E. 2007. **75**, N 3. P. 036609-1.
11. Chen Y.-b., Zhu Y.-y., Qin Y.-q. et al. // J. Phys.: Condens. Matter. 2000. **12**, N 5. P. 529.
12. Albuquerque E.L., Cottam M.G. // Phys. Rep. 2003. **376**, N 4, 5. P. 225.
13. Грушина Н.В., Короленко П.В., Маркова С.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 40.
14. De Spinadel V.W. // Intern. Mathem. J. 2002. **2**, N 3. P. 279.

About golden mean and self-similar structures in optics

N.V. Grushina^a, A.M. Zotov, P.V. Korolenko^b, A.Yu. Mishin

Department of Optics and Spectroscopy, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^anatasha_grushina@mail.ru, ^bpukorolenko@rambler.ru.

It has been found out with the help of numerical modeling that self-similarity of Fibonacci gratings and multilayer systems with golden proportion in their structures reveals in their optical characteristics. Properties of optical systems with different aperiodic structure have been compared. It has been shown that structures based on golden mean and Silver mean have similar behavior of optical parameters.

Keywords: golden mean, grating, multilayer system.

PACS: 42.15.Eq.

Received 13 December 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2009).

Сведения об авторах

1. Грушина Наталья Владимировна — аспирантка; тел.: 939-57-40, e-mail: natasha_grushina@mail.ru.
2. Зотов Алексей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, инженер; тел.: 939-17-17, e-mail: azotov@gmail.com.
3. Короленко Павел Васильевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: 939-57-40, e-mail: pukorolenko@rambler.ru.
4. Мишин Алексей Юрьевич — инженер; тел.: 939-17-17, e-mail: physic_tx@list.ru.