

Эволюция масштаба однородной изотропной турбулентности на основе решения уравнений Навье–Стокса с помощью итераций

О. А. Николаева^a, Ф. В. Шугаев^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^aaoo-kkk@yandex.ru, ^bbshugaev@phys.msu.ru

Статья поступила 18.03.2009, подписана в печать 11.05.2009.

Приведены статистические характеристики затухающей турбулентности на основе полной системы уравнений Навье–Стокса. Метод решения уравнений Навье–Стокса основан на фундаментальном решении параболической системы, которая сводится к интегральным уравнениям типа Вольтерра. Особенность метода состоит в том, что разностные схемы не используются.

Ключевые слова: затухающая турбулентность, статистические характеристики, уравнения Навье–Стокса.

УДК: 532.542.4. PACS: 47.27.-i.

Введение

Турбулентные течения широко распространены в природе и технике и играют определяющую роль во многих процессах, начиная от образования галактик и кончая циркуляцией крови в организме человека.

Отметим два приближенных подхода к описанию турбулентности, популярных в настоящее время. Это теория подобия Колмогорова [1], позволившая получить вид структурной функции турбулентных пульсаций, а также закон распределения энергии пульсаций по волновым числам. Второй подход — моделирование крупными вихрями (Large Eddy Simulation [2]).

В настоящее время большинство исследователей считает, что все свойства турбулентного течения могут быть получены из уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных гипотез. При этом стохастизация реализуется за счет граничных условий либо начальных данных, а затем производится усреднение по полученным решениям.

Для решения используются разностные схемы. Эти методы объединены под названием прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation [3]). Таким путем впервые теоретически была обнаружена неустойчивость течения в круглой трубе, экспериментально исследованная Рейнольдсом. Предыдущие попытки обнаружить неустойчивость этого течения с помощью линейного анализа не привели к успеху.

Однако разностные методы позволяют решать на современных компьютерах задачи, в которых число не превосходит по порядку. Между тем развитая турбулентность возникает при. В природных явлениях в атмосфере Земли число достигает, а в процессах на Солнце. Таким образом, возникает потребность построения решения уравнений Навье–Стокса методом, альтернативным разностным схемам.

Ниже турбулентное течение описывается на основе полной системы уравнений Навье–Стокса, которая была преобразована в систему интегральных уравнений типа Вольтерра. Новый метод решения уравнений Навье–Стокса основан на фундаментальном решении линейной параболической системы. Особенность метода в том, что разностные схемы не используются.

1. Уравнение Навье–Стокса в произвольной системе координат

Уравнения Навье–Стокса представляют собой параболическую систему, коэффициенты при старших производных зависят от неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \nu^m \frac{\partial w}{\partial u^m} &= s, \\ \frac{\partial \nu_l}{\partial t} + \nu^m \nabla_m \nu_l &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\frac{1}{\gamma} \rho(1+h) + \frac{2}{3} \mu s \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \nabla_m (\mu \nabla_m \nu^m) + \frac{1}{\rho} \nabla_m \mu \nabla^m \nu_l, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nu^m \frac{\partial h}{\partial u^m} &= \frac{\gamma}{Pr} \frac{\lambda}{\rho} \Delta h - (\gamma-1)(1+h)s - \\ &- \gamma(\gamma-1) \frac{\mu}{\rho} \{ \nabla^m \nu^r \nabla_m \nu_r + \nabla_r \nu^m \nabla_m \nu^r \} - \\ &- \frac{2}{3} \gamma(\gamma-1) \frac{\mu}{\rho} s^2 + \frac{\gamma}{Pr \rho} g^{lm} \frac{\partial \lambda}{\partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^m}, \\ w &= -\ln \rho, \quad s = \operatorname{div} \nu, \quad h = T - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , T , μ , λ — плотность, температура, вязкость, тепловая удельная проводимость соответственно, Δ — оператор Лапласа, Pr — число Прандтля, γ — показатель адиабаты. Система (1) записана в безразмерном виде, характерная длина ν_0/c , характерное время ν_0/c_0^2 , где $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$, индекс «0» относится к начальному состоянию, c — скорость звука. Система (1) принадлежит к параболическому типу [4, 5].

При записи системы (1) использовалось уравнение состояния $\rho = \frac{\rho R T}{M}$, где R — универсальная газовая постоянная, M — молекулярный вес. Для газов в широком интервале температур вязкость и теплопроводность можно определять по формулам

$$\mu = T^{3/4}, \quad \lambda = T^{3/4}.$$

Представленный метод решения заключается в приведении системы (1) к системе интегральных уравнений с последующим использованием итераций. Ко второму уравнению применяем операцию rot :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^q}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \nu^s \left\{ \frac{\partial (Q^q \sqrt{g})}{\partial \mathbf{u}^s} + \sqrt{g} Q^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon s}^q \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\mu}{\rho} g^{lm} \nabla_l \nabla_m (Q^q \sqrt{g}) + f_{1q}, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{1q} = & \frac{\varepsilon_{qmk}}{\sqrt{g}} N_m \nu^s N_k \nu_s - \frac{1}{\gamma} \frac{\varepsilon_{qmk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^m} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial (\rho T)}{\partial \mathbf{u}^k} - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{qmk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^m} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial (\mu s)}{\partial \mathbf{u}^k} + \\ & + g^{lr} \frac{\varepsilon_{qmk}}{\sqrt{g}} N_m \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^l} \right) (N_k \nu_r + N_r \nu_k) + \\ & + 2 \frac{\varepsilon_{qmk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^m} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}^k} + \frac{1}{\rho \sqrt{g}} g^{lm} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^l} N_m (\sqrt{g} Q^q) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ g^{lm} N_l (\sqrt{g} Q^q) - g^{lq} N_l (\sqrt{g} Q^m) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^m} \left(\frac{\mu}{\rho} \right), \end{aligned}$$

$Q^q = e^{qlm} N_l \nu_m$, e^{qlm} — перестановочный тензор.

Затем ко второму уравнению системы (1) применим операцию div и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \nu^m \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^m} = & \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \Delta s - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{s}{\rho} (1+h)^{-1/4} \right) \Delta h = \\ = & \frac{1}{\gamma} (1+h) \Delta w + f_2, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_2 = & g^{kr} g^{lm} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^r} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^l} + \frac{1}{\rho} \mu_{,rl} \right\} (N_k \nu_m + N_m \nu_k) - \\ & - g^{rk} (N_r \nu^m) (N_m \nu_k) + g^{lm} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^l} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^l} \right\} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}^m} - \\ & - \frac{2}{\gamma \rho} g^{lm} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{u}^l} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}^m} + \\ & + g^{lm} g^{kr} \varepsilon_{prm} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^l} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{g} Q^p)}{\partial \mathbf{u}^k} + Q^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon k}^p \right\} - \\ & - \frac{1}{\gamma} g^{km} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^k} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial (\rho(1+h))}{\partial \mathbf{u}^m} - \frac{2}{3} g^{km} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^k} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial (\mu s)}{\partial \mathbf{u}^m} - \\ & - \frac{s}{\rho} (1+h)^{-5/4} g^{lm} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}^l} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}^m} - \frac{1+h}{\gamma} g^{lm} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{u}^l} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{u}^m}, \\ \mu_{,rl} = & \frac{\partial^2 \mu}{\partial \mathbf{u}^r \partial \mathbf{u}^l} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}^\varepsilon} \Gamma_{rl}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Первое и третье уравнения системы (1) вместе с уравнениями (2), (3) образуют замкнутую систему.

2. Метод решения

Метод решения отличается от предложенного ранее [4, 5] только в деталях. Вычислительная процедура может быть разделена на две части. Во-первых, мы находим приближенное решение (параметрикс). Затем мы строим фундаментальное решение системы, не принимая в расчет функции f_i . Как было указано, используется итеративная процедура. Решение линеаризованной системы берется в качестве первой итерации. Предположим, что $(n-1)$ -я итерация известна. Тогда коэффициенты, относящиеся к оператору Лапласа, из-

вестны. Таким образом, мы имеем линейные уравнения с переменными коэффициентами. Далее предполагаем, что коэффициенты зависят только от t , координаты рассматриваются как параметры. Рассматриваем сначала только уравнения относительно w, s, h . Фундаментальное решение для Ω_i может быть определено отдельно [6]. Преобразование Фурье уравнений при учете только старших производных по координатам с $f_i \equiv 0$ таково:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}}{dt} &= \tilde{s}, \\ \frac{d\tilde{s}}{dt} &= -\frac{4}{3} k^2 \nu(y, t) \tilde{s} - \frac{1+h(y, t)}{\gamma} k^2 \tilde{w} + \\ &+ k^2 \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{s(y, t)}{\rho} (1+h(y, t))^{-1/4} \right) \tilde{h}, \\ \frac{d\tilde{h}}{dt} &= -\frac{\gamma}{\Pr} k^2 \eta(y, y) \tilde{h} - (\gamma-1) \tilde{s}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\rho}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, мы имеем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Они могут быть решены, например, методом, предложенным Гурса [7]. Параметрикс должен быть найден с помощью обратного преобразования Фурье. Пусть $Y_{ij}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau)$ есть параметрикс. Теперь мы можем построить фундаментальное решение нашей системы. Представим систему в виде

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = a_{ij}(\mathbf{u}, t) \Delta \psi_j + b_{ij}(\mathbf{u}, t) \psi_j + f_i(\mathbf{u}, t).$$

Выполняя подстановку $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{y}$ в функцию $Y_{ij}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau)$, построим фундаментальное решение

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = & Y_{ij}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau) + \\ & + \int_\tau^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} Y_{il}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau) \Phi_{lj}(\mathbf{y}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Функция Φ есть решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = & K_{ij}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau) + \\ & + \int_\tau^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} K_{lm}(\mathbf{u}, t; \mathbf{y}, \sigma) \Phi_{mj}(\mathbf{y}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Величина k есть произведение матриц

$$\begin{aligned} K_{ij}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = & \{a_{im}(\mathbf{u}, t) \Delta - b_{im}(\mathbf{u}, t)\} Y_{ij}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{y}, \tau). \end{aligned}$$

Величина Φ равна

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) &= \sum_{l=1}^{\infty} K_{ij}^{(l)}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau), \\ K_{ij}^{(l)}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) &= \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^n} K_{im}^{(l-1)}(\mathbf{y}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{y}, \quad K_{ij}^{(1)} = K_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение может быть представлено в виде

$$\psi_i^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{ij}^{(n-1)}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, 0) \psi_j(\mathbf{u}, 0) d\boldsymbol{\xi} +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{ij}^{(n-1)}(\mathbf{u}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) f_j^{(n-1)}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi},$$

$$\psi_1 = w, \quad \psi_2 = s, \quad \psi_3 = h.$$

Верхний индекс показывает номер итерации. Мы рассматриваем задачу Коши в неограниченной области.

Возможны разные типы турбулентности, соответствующие заданию различных начальных значений.

В частности, начальные значения могут быть выражены как

$$\tilde{\Omega}_{0m}(\mathbf{k}) = i\varepsilon_{mpq}k_p A_q, \quad A_i = b_{jlm}^{(i)} k_1^{\beta_j} k_2^{\beta_l} k_3^{\beta_m},$$

$$\beta_j + \beta_l + \beta_m = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

коэффициенты b_{jlm}^i — произвольные числа. Начальные значения s, w, h считаются равными нулю. Далее использовалось усреднение по начальным данным.

Таким образом, частные решения линейной системы — $e^{\sigma_1 t}$, $e^{\sigma_2 t} \cos \omega t$, $e^{\sigma_2 t} \sin \omega t$, где величины σ_m ($m = 1, 2$), ω определяются из характеристического уравнения линейной системы

$$f^3 + f^2 k^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{Pr} \right) + f k^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma}{Pr} k^2 + 1 \right) + \frac{k^4}{Pr} = 0.$$

Корни, соответствующие осциллирующему решению, таковы ($k \leq k_* \leq 1$):

$$f_1 = \sigma_1, \quad f_{2,3} = \sigma_2 \pm i\omega,$$

$$\sigma_1 = u + v - \frac{a}{3}, \quad \sigma_2 = -(u + v) - \frac{a}{3}, \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v),$$

$$a = k^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{Pr} \right), \quad b = k^2 \left(1 + \frac{4\gamma k^2}{3Pr} \right), \quad c = \frac{k^4}{Pr},$$

$$p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}, \quad q = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2},$$

$$u = \left(-q + \sqrt{p^3 + q^2} \right)^{1/3}, \quad u = - \left(q + \sqrt{p^3 + q^2} \right)^{1/3}.$$

Дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет две ветви. Мы используем ту ветвь, которая соответствует меньшему затуханию. Ранее линейное решение уравнений Навье–Стокса использовалось для анализа дисперсии и затухания плоских акустических волн в одномерном случае [8].

Решение линейной системы имеет вид

$$\tilde{Z}_i(\mathbf{k}, t) = \tilde{M}_{ij}(\mathbf{k}, t) \tilde{Z}_j(\mathbf{k}, 0),$$

где \tilde{M}_{ij} — фундаментальная матрица решений, $\tilde{Z}_1 = \tilde{w}$, $\tilde{Z}_2 = \tilde{s}$, $\tilde{Z}_3 = \tilde{h}$. Решение линейного уравнения для Ω_i имеет вид

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{k}, t) = \tilde{\Omega}_i(\mathbf{k}, 0) e^{-k^2 t}.$$

Скорость газа зависит от величин следующим образом:

$$\tilde{v}_j = \frac{i}{k^2} (\varepsilon_{jsm} k_s \tilde{\Omega}_m - k_j \tilde{s}) + i k_j \tilde{\varphi},$$

причем $\Delta\varphi = 0$.

Изложенный способ применен для нахождения статистических свойств затухающей турбулентности. Использованы первая и вторая итерации. Как показали расчеты, различие между второй и третьей итерациями несущественно.

Масштаб турбулентности выражается следующим образом:

$$L_v(\mathbf{x}) = \int_0^\infty N_{v_{ij}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

для скорости, где

$$N_{v_{ij}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\overline{v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})}}{\sqrt{\overline{v_i^2(\mathbf{x})}} \sqrt{(v_j(\mathbf{x}))^2}},$$

$$L_\rho(\mathbf{x}) = \int_0^\infty N_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

для плотности, где

$$N_\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\overline{\rho'(\mathbf{x}) \rho'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})}}{\{\overline{\rho'(\mathbf{x})}\}^2}.$$

На рис. 1 представлена корреляционная функция скорости $N_{v_{ij}}(\boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\xi}$ — безразмерная координата). Видно, что касательная $dN/d\boldsymbol{\xi}$ равна нулю в точке $\boldsymbol{\xi} = 0$, как это следует из теоретических соображений.

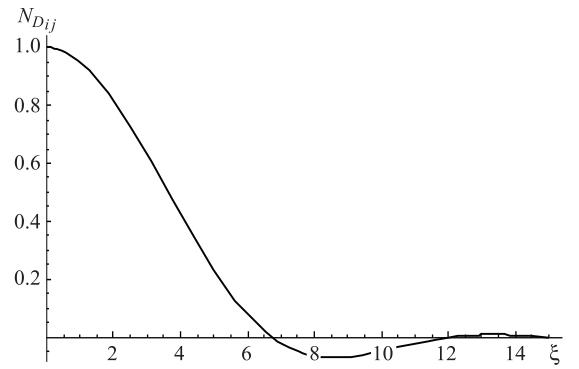


Рис. 1. Корреляционная функция скоростей при $t = 1$

На рис. 2 показано изменение кинетической энергии турбулентных пульсаций со временем. Поскольку приток энергии извне отсутствует, кинетическая энергия турбулентных пульсаций затухает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$.

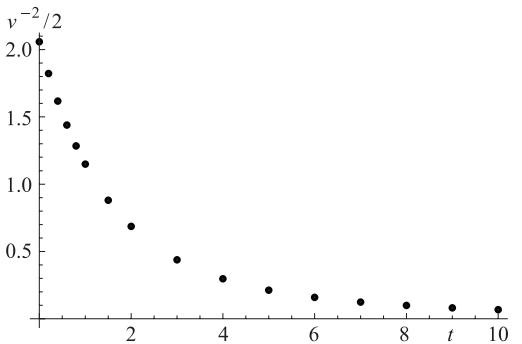


Рис. 2. Изменение кинетической энергии турбулентных пульсаций со временем

Величина $d\overline{v^2}/dt$ характеризует энергию диссипации. Ее изменение дано на рис. 3.

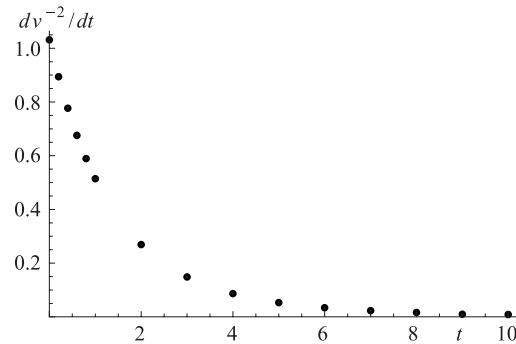


Рис. 3. Энергия диссипации

На рис. 4 сравниваются экспериментальные [9] и расчетные значения масштаба турбулентных пульсаций скорости. Видно качественное соответствие между расчетом и экспериментом. Рис. 5 демонстрирует изменение со временем масштаба турбулентных пульсаций плотности. Как и в случае турбулентных пульсаций скорости, масштаб возрастает со временем.

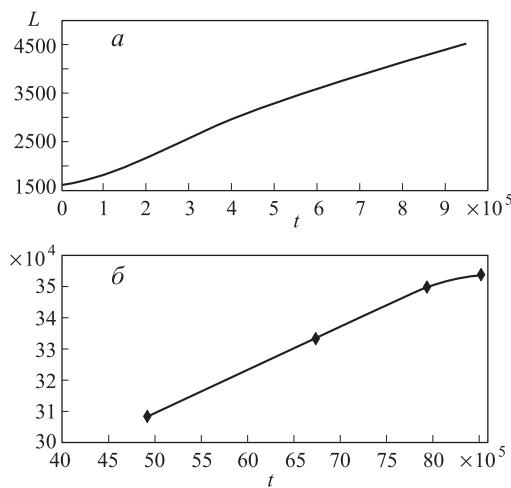


Рис. 4. Зависимость масштаба турбулентных пульсаций скорости от времени: а — расчет, б — эксперимент для сеточной турбулентности [9]

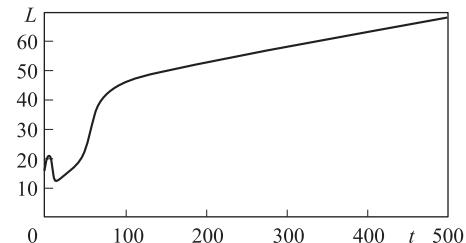


Рис. 5. Временная зависимость масштаба турбулентных пульсаций плотности

Заключение

Турбулентное течение описано на основе полной системы уравнений Навье–Стокса. Построены корреляционные функции для плотности и скорости. Выполнен расчет масштаба турбулентных пульсаций скорости и плотности. Показано, что масштаб турбулентности возрастает со временем. Вид корреляционных функций и поведение масштаба для турбулентных пульсаций скорости качественно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Авторы выражают благодарность Л. С. Штеменко и Е. Н. Терентьеву за полезное обсуждение и конструктивные замечания.

Список литературы

- Колмогоров А.Н. Собр. соч. Т. 2. М., 1960.
- Lesieur M., Metais O. Comte P. Large-Eddy Simulations of Turbulence. Cambridge University Press, 2005.
- Jamme S., Cazalbou J.B., Torres F., Chassaing P. // Flow Turbulence and Combustion. 2002. N 68. P. 227.
- Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
- Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964.
- Shugaev F. V., Terentiev E.N., Shtemenko L.S., Nikolaeva O.A. et al. // Proc. SPIE. 2007. N 6747. P. 674.
- Гурса Э. Курс математического анализа. Т. III, ч. II: Интегральные уравнения. М., 1934.
- Truesdell C. // J. Rat. Mech. Anal. 1953. N 2. P. 643.
- Agui J.H., Briassulis G., Andreopoulos Y. // J. Fluid Mech. 2005. N 524. P. 143.

Evolution of the length scale of homogeneous isotropic turbulence on the basis of the solution of the Navier–Stokes equations by iterative procedure

O. A. Nikolaeva^a, F. V. Shugaev^b

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^aaoo-kkk@yandex.ru, ^bbshugaev@phys.msu.ru.

Statistical properties of decaying turbulence are analyzed on the basis of the complete Navier–Stokes equations. The method of calculation uses the fundamental solution of the parabolic system which is reduce to the integral equations of the Volterra type. The characteristic feature of the method is that finite-difference schemes are not used.

Keywords: decaying turbulence, statistical properties, Navier–Stokes equations.

PACS: 47.27.-i.

Received 18 March 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2009).

Сведения об авторах

- Николаева Оксана Александровна — аспирантка; e-mail: oo-kkk@yandex.ru.
- Шугаев Федор Васильевич — докт. физ.-мат. наук, доцент; профессор; тел.: 939-28-16, e-mail: shugaev@phys.msu.ru.