Структура двухточечной функции Грина калибровочного поля в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными

К. В. Степаньянц[a], Е. С. Шевцова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] stepan@phys.msu.ru

Статья поступила 27.04.2009, подписана в печать 05.06.2009.

Для наиболее общей перенормируемой $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса исследован вклад в функцию Гелл-Манна–Лоу двухпетлевых диаграмм, которые содержат кубичное взаимодействие суперполей материи, при использовании регуляризации высшими производными. Показано, что все интегралы по петлевому импульсу в безмассовом случае факторизуются в интегралы от полных производных и могут быть легко вычислены. Тем самым проясняется происхождение связи между двухпетлевой β-функцией и однопетлевой аномальной размерностью суперполя материи.

Ключевые слова: β-функция, суперсимметрия, функция Гелл-Манна–Лоу.
УДК: 530.145. PACS: 11.30.Pb.

Введение

Одной из наиболее важных проблем современной квантовой теории поля является вопрос о сокращении ультрафиолетовых расходимостей. Как правило, при вычислениях квантовых поправок возникают все возможные типы расходящихся слагаемых, которые не запрещены симметриями теории и имеют требуемый индекс расходимости. Тем не менее существуют и исключения, объяснить которые далеко не всегда просто. Например, недавно было показано [1], что $N = 8$ супергравитация является конечной в трехпетлевом приближении, несмотря на то что трехпетлевые расходимости в такой теории могли бы существовать, если исходить из рассуждений, основанных на вычислении индекса расходимости [2]. Однако существуют и более простые примеры, когда в суперсимметричных теориях расходимости ведут себя лучше, чем это кажется на первый взгляд. Например, в $N = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях n-петлевая β-функция связана с аномальной размерностью суперполей материи и β-функцией в предыдущих петлях [3]. Такая связь, вообще говоря, не следует из каких-либо симметрий теории. Можно попробовать получить ее, подставляя решения тождеств Славнова–Тейлора в уравнения Швингера–Дайсона [4, 5]. При этом соотношение между ренормгрупповыми функциями следует из того, что интегралы, определяющие функцию Гелл-Манна–Лоу, факторизуются в интегралы от полных производных. Впервые такая закономерность была замечена для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики [6], а затем проверена и для более сложных теорий [7, 8]. Важно, что такая закономерность видна только при использовании регуляризации высшими ковариантными производными [9, 10], прежде всего поскольку интегрирование производится по d^4k, в отличие от размерной регуляризации [11]. Заметим, что размерная регуляризация неудобна для расчетов в суперсимметричных теориях, поскольку она нарушает суперсимметрию. Поэтому в суперсимметричных теориях обычно используют ее модификацию, называемую размерной редукцией [12]. Однако хорошо известно, что размерная редукция является противоречивой [13].

Факторизация интегралов, которые определяют двухточечную функцию Грина, в интегралы от полных производных имеет очень важное значение. Помимо указанной выше связи между ренормгрупповыми функциями оно приводит к некоторым другим нетривиальным соотношениям, которым удовлетворяют функции Грина [4]. Возможно, что они следуют из некоторой скрытой симметрии, но до сих пор такая симметрия еще не найдена.

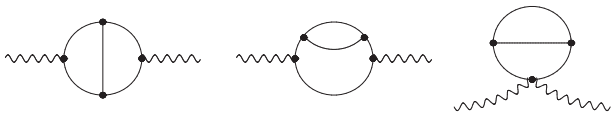
Важным вопросом является определение круга суперсимметричных теорий, в которых существует факторизация интегралов, определяющих функцию Гелл-Манна–Лоу, в интегралы от полных производных. До настоящего времени рассматривались только теории, в которых суперпотенциал был не более чем квадратичен по хиральным суперполям материи. Однако наиболее общая перенормируемая $N = 1$ суперсимметричная теория также содержит кубичный суперпотенциал. В частности, в Минимальной суперсимметричной стандартной модели существуют слагаемые, кубичные по суперполям материи. Поэтому вопрос об исследовании таких теорий является особенно актуальным.

Целью настоящей работы была проверка факторизации двухточечной функции Грина в интеграл от полной производной в пределе нулевого внешнего импульса для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с кубичным взаимодействием.

1. $N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса

В настоящей работе рассматривается действие с кубичным суперпотенциалом

$$S = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \\ + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta (\phi^*)^i (e^{2V})^j_i \phi_j +$$



Двухпетлевые диаграммы, определяющие вклад в функцию Гелл-Манна–Лоу, пропорциональный $\lambda^{ikl}\lambda^*_{jkl}$

$$+\left[\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}\lambda^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\right) + \text{э. с.}\right], \quad (1)$$

где ϕ_i — хиральные суперполя материи, которые лежат в некотором представлении калибровочной группы R, V — вещественное скалярное суперполе, которое в качестве одной из компонент содержит калибровочное поле A_μ. Суперполе W_a представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля. Действие модели (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\phi \to e^{i\Lambda}\phi, \quad e^{2V} \to e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda},$$

если выполняется условие

$$(T^A)_j{}^{i_1}\lambda^{ji_2i_3} + (T^A)_j{}^{i_2}\lambda^{i_1ji_3} + (T^A)_j{}^{i_3}\lambda^{i_1i_2j} = 0,$$

где индекс A нумерует генераторы калибровочной группы. В наших обозначениях генераторы фундаментального представления t^A нормируются условием $\mathrm{tr}(t^At^B) = \delta^{AB}/2$.

Для квантования модели будем использовать метод фонового поля [2]. Регуляризацию и фиксацию калибровки удобно выбрать так, чтобы фоновая калибровочная инвариантность не нарушалась. Для настоящей работы существенно, что при наличии нетривиального (кубичного по суперполям материи) суперпотенциала необходимо вводить слагаемое с высшими производными не только для калибровочного поля, но и для хиральных суперполей материи. Сделаем это при помощи следующих замен:

$$\frac{1}{4}(\phi^*)^i(e^{2V'})_i{}^j\phi_j \to \frac{1}{8}(\phi^*)^i\left[e^{\Omega^+}e^{2V}\left(1+\frac{(D_\alpha^2)^m}{\Lambda^{2m}}\right)e^{\Omega}\right]_i{}^j\phi_j + \\ + \frac{1}{8}(\phi^*)^i\left[e^{\Omega^+}\left(1+\frac{(D_\alpha^2)^m}{\Lambda^{2m}}\right)e^{2V}e^{\Omega}\right]_i{}^j\phi_j,$$

где Ω — фоновое поле, а D_α — фоновая ковариантная производная. Также необходимо добавлять и слагаемые с высшими производными, которые модифицируют пропагатор калибровочного суперполя. Однако они в этой работе несущественны. Явный вид таких слагаемых можно найти в работах [5, 7].

Кроме того, необходимо добавить в производящий функционал детерминанты Паули–Вилларса, для того чтобы сократить остаточные однопетлевые расходимости [14]. После этого эффективное действие для рассматриваемой теории строится стандартным образом.

2. Вычисление функции Гелл-Манна–Лоу

Мы будем вычислять часть двухпетлевого вклада в функцию Гелл-Манна–Лоу, которая содержит кубичные вершины. Она определяется суммой трех эффективных диаграмм, показанных на рисунке, в пределе нулевой массы. Целью настоящей работы является вычисление вклада этих диаграмм и проверка того, что он факторизуется в интеграл от полной производной. (Вклад полей Паули-Вилларса, которые необходимы для устранения однопетлевых расходимостей, в работе не исследуется.) В результате вычисления было получено, что вклад рассматриваемых диаграмм в функцию Гелл-Манна–Лоу равен

$$\Delta\beta_2(\alpha) = \alpha^2 C(R)_i{}^j \frac{\lambda^*_{jkl}\lambda^{ikl}}{4\pi r} I, \quad (2)$$

где были использованы следующие обозначения:

$$\mathrm{tr}(T^AT^B) \equiv T(R)\delta^{AB}; \quad (T^A)_i{}^k(T^A)_k{}^j \equiv C(R)_i{}^j; \quad r \equiv \delta_{AA}.$$

Интеграл I при этом записывается в виде (при вычислении функции Гелл-Манна–Лоу необходимо перейти к пределу $m^{ij} \to 0$)

$$I \equiv 64\pi^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d}{d\ln\Lambda}\frac{1}{q^2}\frac{d}{dq^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{k^2(q+k)^2(1+k^{2m}/\Lambda^{2m})}\frac{1}{(1+(q+k)^{2m}/\Lambda^{2m})} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{(1+q^{2m}/\Lambda^{2m})} + \frac{mq^{2m}/\Lambda^{2m}}{(1+q^{2m}/\Lambda^{2m})^2}\right)\right].$$

Благодаря равенству

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2}\frac{d}{dq^2}f(q^2) = \frac{1}{16\pi^2}\big(f(q^2=\infty) - f(q^2=0)\big)$$

этот интеграл является интегралом от полной производной и может быть легко вычислен:

$$I = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d}{d\ln\Lambda}\left[\frac{4}{k^4(1+k^{2m}/\Lambda^{2m})^2}\right] = -\frac{1}{2\pi^2}.$$

Как следствие

$$\Delta\beta_2(\alpha) = -\alpha^2 C(R)_i{}^j \frac{\lambda^*_{jkl}\lambda^{ikl}}{8\pi^3 r}.$$

Сравнивая полученный результат с выражением для аномальной размерности

$$\gamma_i{}^j(\alpha) = -\frac{\alpha C(R)_i{}^j}{\pi} + \frac{\lambda^*_{ikl}\lambda^{jkl}}{4\pi^2} + \ldots,$$

несложно убедиться, что с рассматриваемой точностью и для рассматриваемой группы диаграмм[1] он согласуется с точной β-функцией Новикова, Шифмана, Ванштейна и Захарова [3]

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2\left[3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha)/r\right]}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)}.$$

[1] Сравнивать необходимо слагаемые, пропорциональные второй степени констант λ^{ijk}.

Заключение

Таким образом, мы убедились, что факторизация интегралов, определяющих функцию Гелл-Манна–Лоу, в интегралы от полных производных также, по-видимому, имеет место и для теорий с кубичным взаимодействием. Заметим, что проведенная проверка не является тривиальной, поскольку при наличии регуляризации высшими производными интегралы по петлевым импульсам имеют достаточно сложную структуру, которая не сводится к каким-либо простым базисным интегралам. Вопрос о том, почему происходит такая факторизация является весьма нетривиальным. Наиболее обещающий способ доказательства этого факта основан на подстановке решений тождеств Славнова–Тейлора в уравнения Швингера–Дайсона. Мы даже не исключаем, что с помощью этого метода окажется возможным объяснить «как бы случайные» сокращения расходимостей в такой сложной модели, как $N = 8$ супергравитация.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00281а).

Список литературы

1. *Bern Z., Carrasco J.J., Dixon L.J., Johanson H., Kosower D.A., Roiban R.* // Phys. Rev. Lett. 2007. **98**. P. 161303; *Bern Z., Dixon L.J., Roiban R.* // Phys. Lett. 2007. **B 644**. P. 265; *Green M.B., Russo J.G., Vanhove P.* // Phys. Rev. Lett. 2007. **98**. P. 131602.
2. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию, М., 1989.
3. *Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. 1983. **B229**. P. 381; *Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* // Phys. Lett. 1985. **166B**. P. 329; *Shifman M.A., Vainshtein A.I.* // Nucl. Phys. 1986. **B277**. P. 456.
4. *Степаньянц К.* // ТМФ. 2005. **142**. С. 37; ТМФ. 2007. **150**. С. 442.
5. *Пименов А.Б., Солошенко А.А., Степаньянц К.В., Шевцова Е.С.* // Известия вузов. Физика. 2008. № 5. С. 5.
6. *Soloshenko A.A., Stepanyantz K.V.* E-print hep-th/0304083; сокращенная версия: *Солошенко А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2004. **140**. С. 437.
7. *Пименов А.Б., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 2008. **155**. С. 398.
8. *Пименов А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2006. **147**. С. 290.
9. *Славнов А.* // ТМФ. 1975. **23**. С. 3.
10. *West P.* // Nucl. Phys. 1986. **B 268**. P. 113.
11. *t'Hooft G., Veltman M.* // Nucl.Phys. 1972. **B44**. P. 189.
12. *Siegel W.* // Phys.Lett. 1979. **84 B**. P. 193.
13. *Siegel W.* // Phys.Lett. 1980. **94B**. P. 37.
14. *Славнов А., Фаддеев Л.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1988.

Structure of the two-point Green function of the gauge field for $N = 1$ sypersymmetric Yang–Mills theory, regularized by higher covariant derivatives

E. S. Shevtsova, K. V. Stepanyantz[a]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *stepan@phys.msu.ru.*

For the most general renormalizable $N = 1$ supersymmetric Yang–Mills theory, regularized by higher derivatives, we investigate a contribution to the Gell-Mann–Low function from the two-loop diagrams, containing cubic interaction of the matter superfields. We find that all integrals with respect to the loop momentum in the massless case are factorized to the integrals of total derivatives and can be easily calculated. Thus, we explain the origin of the relation between the two-loop β-functon and the one-loop anomalous dimension of the matter superfield.

Keywords: β-function, supersymmetry, Gell-Mann–Low function.
PACS: 11.30.Pb.
Received 27 April 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2009).

Сведения об авторах

1. Степаньянц Константин Викторович — канд. физ.-мат. наук; доцент; тел.: 8(495)939-53-89, e-mail: stepan@phys.msu.ru.
2. Шевцова Екатерина Сергеевна — аспирантка; e-mail: shevtsova-katya@yandex.ru.