

Модель Гросса–Невё в условиях нарушенной Лоренц-инвариантности

Н. В. Губина^a, В. Ч. Жуковский^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^agubinanadya@gmail.com, ^bzhukovsk@phys.msu.ru

Статья поступила 27.04.2009, подписана в печать 05.06.2009.

Вычислен эффективный потенциал в двумерной модели Гросса–Невё с нарушенной Лоренц-инвариантностью, исследованы свойства полученного потенциала, найдены экстремумы путем решения уравнения щели и сравнения полученных результатов с теорией в случае ненарушенной Лоренц-инвариантности. Показано, что в изучаемой модели наблюдаются эффекты, принципиально отличающие ее от хорошо изученной модели без нарушения.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.30.Cr.

Ключевые слова: модель Гросса–Невё, Лоренц-инвариантность, эффективный потенциал.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.30.Cr.

Введение

Наличие Лоренц- и СРТ-симметрии в физических теориях есть отражение фундаментальных законов природы. Инвариантность всех известных взаимодействий относительно пространственно-временных преобразований Лоренца и набора дискретных СРТ-преобразований проверена множеством экспериментальных [1, 2] и теоретических исследований (см., напр., [3, 4]) и является принципиальной. Однако есть основания считать, что по некоторым, пока неизвестным, причинам эти симметрии лишь приблизительны. Было высказано несколько гипотез по поводу возможных механизмов нарушения Лоренц- и СРТ-симметрий, в частности гипотеза о спонтанном характере нарушения Лоренц-симметрии (и как следствие возможном нарушении СРТ-симметрии). В стандартной модели нет механизма, допускающего нарушение Лоренц- и СРТ-симметрий, но в настоящее время есть основания рассматривать эту модель в качестве низкоэнергетического приближения более фундаментальной теории. Таковой может выступать теория суперструн, суперсимметричное обобщение (SUSY) и др. Попытки установить наличие предполагаемого нарушения Лоренц-инвариантности касались феноменологических аспектов не только физики частиц, но теории гравитации, квантовой гравитации и космологии [5, 6].

Стандартная модель, дополненная членами, учитывающими эффект нарушения Лоренц- и СРТ-симметрии, образует так называемую *расширенную стандартную модель* [4]. В самом простейшем случае нарушения Лоренц- и СРТ-инвариантности эти члены имеют следующий вид: $\frac{1}{2}\eta_\mu\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}A_\gamma$, что представляет собой четырехмерный аналог топологического члена Черна–Саймонса с постоянным вектором η^μ в лагранжиане калибровочного поля, и СРТ-нечетного члена для фермионов $\psi b_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi$ с постоянным вектором b^μ . Векторы b^μ и η^μ , имея выделенную ориентацию, нарушают изотропность пространства и приводят к нарушению Лоренц-инвариантности. В настоящее время существует множество работ, посвященных исследованию нарушений обоих типов: (см., напр., [7–9]). В настоящей работе исследованы результаты нарушения

Лоренц-инвариантности с введением в теорию члена второго типа в фермионном секторе стандартной модели в рамках двумерной модели Гросса–Невё.

1. Двумерная модель Гросса–Невё

Модель Гросса–Невё, впервые введенная и проанализированная в работе [10], — это модель фермионов в двух пространственно-временных измерениях (2D) с дискретной хиральной симметрией. Она может быть получена размерной редукцией как из более фундаментальных теорий высшей размерности (см., напр., [11]) так и, в частности, из трехмерной теории Гросса–Невё [12]. Данная модель имеет большое значение ввиду того факта, что она демонстрирует в двух измерениях основные черты,ственные КХД в четырех измерениях (асимптотическая свобода, перенормируемость [13], размерная трансмутация), что было отмечено в работе [14]. Ее евклидово действие имеет вид

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^2x \left[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \frac{g}{2N}(\bar{\psi}\psi)^2 \right], \quad (1)$$

где g — безразмерная константа связи, N — число компонент ψ , в целях разрешимости устремляемое к бесконечности, γ -матрицы удовлетворяют дираковской алгебре и определены как

$$\gamma_1 = \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2, \quad \gamma_3 = -i\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 = \gamma_5,$$

где σ_i — матрицы Паули.

Для линеаризации действия проводится преобразование Хаббарда–Стратоновича, для чего вводится новое скалярное поле

$$\sigma(x) = \frac{g}{N}\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (2)$$

В результате действие приобретает вид

$$S[\bar{\psi}, \psi, \sigma] = \int d^2x \left[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\psi\sigma + \frac{N}{2g}\sigma^2 \right]. \quad (3)$$

Выражение для производящего функционала теперь выглядит следующим образом:

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi D\sigma \exp(-S[\bar{\psi}, \psi, \sigma]). \quad (4)$$

При этом среднее по вакууму

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{\delta \ln Z}{\delta \sigma} + \frac{N}{g} \langle \sigma \rangle = \frac{N}{g} \sigma_0$$

перестает быть равным нулю, в системе наблюдается конденсат.

Вводя эффективный потенциал V_{eff} как функцию хиральной переменной σ , которую при больших N можно считать постоянной, и определяя его с помощью равенства

$$\int D\bar{\psi} D\psi \exp(-S[\bar{\psi}, \psi, \sigma]) = \exp(-NV_{\text{eff}}(\sigma)), \quad (5)$$

где V - объем 2D-пространства, получаем

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \ln(k^2 + \sigma^2) + \frac{1}{2g} \sigma^2. \quad (6)$$

Из условия минимума эффективного потенциала в стационарной точке $\sigma = \sigma_0$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{2\sigma_0}{k^2 + \sigma_0^2} + \frac{\sigma_0}{g} = 0$$

вытекает так называемое уравнение щели

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{2}{k^2 + \sigma_0^2} = \frac{1}{g}. \quad (7)$$

Поскольку последний интеграл логарифмически расходится, для решения данного уравнения вводится обрезание Λ в ультрафиолетовой области двумерного пространства импульсов. Предел $\Lambda \gg \sigma_0$ достигается при значениях константы связи $g \ll 1$. При таких ограничениях получаем

$$\sigma_0 = m = \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{g}\right). \quad (8)$$

Такой вид зависимости указывает на наличие в рассматриваемой модели асимптотической свободы:

$$g = g(\Lambda) = \frac{\pi}{\ln \Lambda/\sigma_0},$$

т. е. при $\Lambda \rightarrow \infty$, $g(\Lambda) \rightarrow 0$. Спонтанное нарушение хиральной инвариантности приводит к появлению в данной модели массы фермионов $m = \sigma_0$. Видно, что хиральная инвариантность нарушается динамически, т. е. при любой величине константы связи g фермионная масса m остается постоянной и не равной нулю.

После обрезания эффективный потенциал приобретает вид

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(\ln \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} - 1 \right), \quad (9)$$

из которого, как видно, выпала нефизическая константа Λ .

2. Двумерная модель Гросса–Невё с нарушенной Лоренц-инвариантностью

С учетом члена, нарушающего Лоренц-инвариантность, действие теории в евклидовом двумерном пространстве приобретает вид:

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^2x \left[\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3) \psi - \frac{g}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right], \quad (10)$$

где $\mu = 1, 2$, а b_μ — постоянный вектор.

Производя преобразование Хаббарда–Стратоновича и интегрируя по фермионным степеням свободы, получаем выражение для вакуум-вакуумной амплитуды как интеграл по полю σ , введенному в целях линеаризации действия

$$Z = \int d\sigma \text{Det}(i\gamma_\mu k_\mu - \sigma - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3) e^{(NV/2g)\sigma^2}. \quad (11)$$

Определяя эффективный потенциал V_{eff} так же, как это было сделано ранее, и переходя в пространство Минковского при помощи замены

$$k_1 = k^1, \quad k_2 = ik^0, \quad b_1 = -ib^1, \quad b_2 = b^0, \quad (12)$$

получаем в явном виде выражение для эффективного потенциала

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk^1 \ln(\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2 - (k^0 + b^1)^2) + \frac{\sigma^2}{2g} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dk^1 \left(\left| b^1 - \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| b^1 + \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| \right) + \frac{\sigma^2}{2g}. \end{aligned}$$

Введем теперь обрезание Λ :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} dk^1 \left(\left| b^1 - \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| b^1 + \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| \right) + \frac{\sigma^2}{2g} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\Lambda/2}^{-b^0 - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}} dk^1 \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b^0 + \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}}^{\Lambda/2} dk^1 \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-b^0 - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}}^{-b^0 + \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}} dk^1 2b^1 + \frac{\sigma^2}{2g}. \end{aligned}$$

Интегрируя данное выражение, получим эффективный потенциал

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= -\frac{1}{4\pi} \left(-2 \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} \sqrt{(b^1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - (-\Lambda/2 + b^0) \sqrt{\sigma^2 + (-\Lambda/2 + b^0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 \ln \frac{\left| \sqrt{(b^1)^2} - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} \right|}{\left| -\Lambda/2 + b^0 + \sqrt{\sigma^2 + (-\Lambda/2 + b^0)^2} \right|} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda/2 + b^0) \sqrt{\sigma^2 + (\Lambda/2 + b^0)^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sigma^2 \ln \frac{\left| \Lambda/2 + b^0 + \sqrt{\sigma^2 + (\Lambda/2 + b^0)^2} \right|}{\left| \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} + \sqrt{(b^1)^2} \right|} \Big) - \\ - \frac{b^1}{\pi} \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2g}.$$

Этот результат приводит к уравнению щели

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = 0,$$

которое имеет следующий вид:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} dk^1 \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} - b^1}{\sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \left| b^1 - \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right|} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} + b^1}{\sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \left| b^1 + \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2} \right|} \right) + \frac{1}{g} = 0. \quad (13)$$

Отметим случаи, вытекающие из рассмотрения интеграла данного вида:

1) при $b^1 > \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2}$ интеграл (13) равен нулю;

2) при $b^1 < \sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2}$, т. е. $k^1 < -b^0 - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}$ и $k^1 > -b^0 + \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}$.

С учетом ограничений, наложенных на переменную интегрирования, получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} dk^1 \frac{2}{\sqrt{\sigma^2 + (k^1 + b^0)^2}} = \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left| k^1 + b^0 + \sqrt{(k^1 + b^0)^2 + \sigma^2} \right| \Big|_{-\Lambda/2}^{-b^0 - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}} + \right. \\ \left. + \ln \left| k^1 + b^0 + \sqrt{(k^1 + b^0)^2 + \sigma^2} \right| \Big|_{-b^0 + \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}}^{\Lambda/2} \right).$$

В соответствии с этим уравнение щели приобретает окончательный вид

$$\ln \frac{\left| \sqrt{(b^1)^2} - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} \right|}{\left| \sqrt{(b^1)^2} + \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} \right|} + \\ + \ln \frac{\left| \Lambda/2 + b^0 + \sqrt{(\Lambda/2 + b^0)^2 + \sigma^2} \right|}{\left| -\Lambda/2 + b^0 + \sqrt{(-\Lambda/2 + b^0)^2 + \sigma^2} \right|} - \frac{2\pi}{g} = 0. \quad (14)$$

При условии $\Lambda \gg b^0$, $\Lambda \gg b^1$ получаем

$$\ln \frac{\left| \sqrt{(b^1)^2} - \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} \right|}{\left| \sqrt{(\Lambda/2)^2 + \sigma^2} - \Lambda/2 \right|} - \frac{\pi}{g} = 0. \quad (15)$$

При этом эффективный потенциал определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{(b^1)^2} \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Lambda^2}{2} + \sigma^2 + 2(b^0)^2 \right) - \\ - \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\ln(\sqrt{(b^1)^2} \sqrt{(b^1)^2 - \sigma^2}) - \ln \frac{\sigma^2}{\Lambda} \right) + \frac{\sigma^2}{2g}, \quad (16)$$

из которого следует уравнение щели такого же вида, что и в (15).

В точках экстремума

$$V_{\text{eff}}(\bar{\sigma}) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{(b^1)^2} \sqrt{(b^1)^2 - \bar{\sigma}^2} - \frac{\Lambda^2}{8\pi} - \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} - \frac{(b^0)^2}{2\pi}.$$

Разрешим уравнение щели (15) относительно σ :

$$\bar{\sigma}^2 = 2|b^1|\Lambda \exp \left(-\frac{\pi}{g} \right) - \Lambda^2 \exp \left(-\frac{2\pi}{g} \right), \quad (17)$$

что можно записать в следующем виде:

$$\bar{\sigma}^2 = 2b^1\sigma_0 - \sigma_0^2, \quad (18)$$

где $\sigma_0 = \Lambda e^{-\pi/g}$ — решение (8) уравнения щели в случае ненарушенной Лоренц-инвариантности.

Исследование особенностей эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё с нарушенной Лоренц-инвариантностью приводит к следующим выводам:

1) при любом b^1 корнем уравнения щели $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = 0$, т. е. экстремумом потенциала V_{eff} , является $\bar{\sigma} = 0$;

2) из уравнения (18) следует

$$\sqrt{(b^1)^2 - \bar{\sigma}^2} = \sigma_0 - b^1,$$

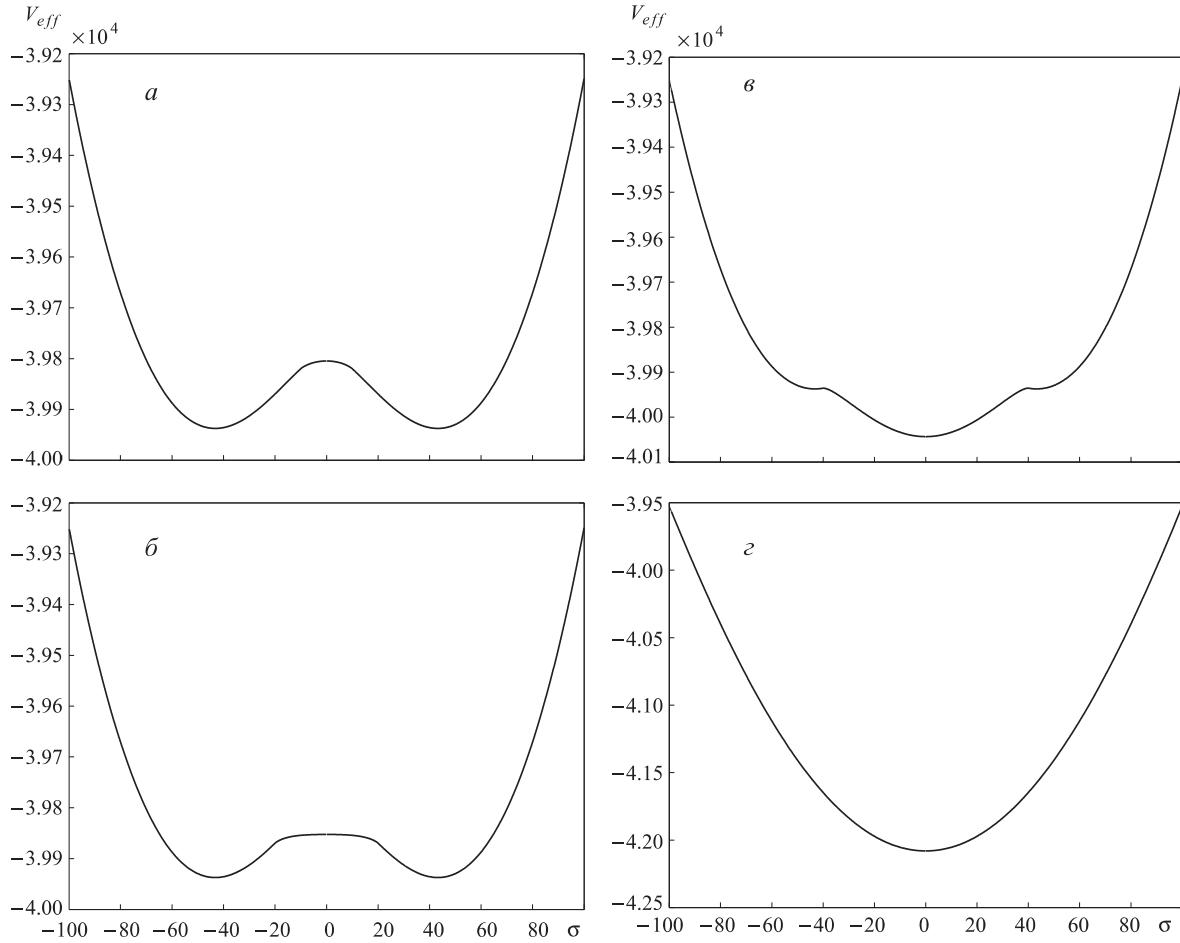
откуда получаем ограничение на величину компоненты b^1 вектора, нарушающего Лоренц-инвариантность:

$$\sigma_0 > b^1,$$

при выполнении которого в системе наблюдается нарушение хиральной симметрии и возникновение массы фермионов.

На рисунке представлены графики эффективного потенциала, построенные по формуле (16) в пределе больших Λ и представленные как зависимость $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(\sigma; g, b^1, b^0)$, где последний параметр играет роль аддитивного слагаемого и может быть принят равным 0, параметр Λ зафиксирован и равен 1000.

График на рис. а при $b^1 = 10$ по форме аналогичен соответствующему графику для случая ненарушенной Лоренц-инвариантности при $b^1 = 0$, определяемому формулой (9). Он имеет два симметричных глобальных минимума при $\bar{\sigma} = \pm\sigma_0$, где σ_0 для данных величин параметров принимает значение $\sigma_0 = 43.2$. График на рис. б построен для значения $b^1 = 20$ и также имеет два глобальных минимума, свидетельствующих о нарушении хиральной инвариантности в теории, которое, в согласии с результатами работы, имеет место, так как $b^1 < \sigma_0$. На рис. в представлен график эффективного потенциала для значения величины $b^1 = 40$, близкого к критическому $b_{\text{crit}}^1 = \sigma_0 = 43.2$. Вследствие этого ярко выраженных симметричных минимумов уже не наблюдается, но появляется минимум при $\sigma_0 = 0$. На рис. г изображен график эффективного потенциала при $b^1 = 120$, т. е. реализуется случай $b^1 > \sigma_0$. График имеет один глобальный минимум при $\sigma_0 = 0$, т. е., как видно, хиральная симметрия восстанавливается.



Эффективный потенциал $V_{\text{eff}} = V(\sigma; g, b^1, b^0)$ при $g = 1$, $b^0 = 0$ и $b^1 = 10$, $\Lambda = 1000$ (a), $b^1 = 20$, $\Lambda = 1000$ (б), $b^1 = 40$, $\Lambda = 1000$ (в), $b^1 = 120$, $\Lambda = 1000$ (г)

Заключение

В работе получено явное выражение для эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё с нарушенной Лоренц-инвариантностью, найдены экстремальные значения потенциала и зависимость величины конденсата, при которой они реализуются, от величины вектора b^1 , нарушающего Лоренц-инвариантность. Показано, что в отличие от теории с ненарушенной Лоренц-симметрией (при $b^1 = 0$), в которой хиральная инвариантность нарушена, $\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \neq 0$, при любой величине константы связи в теории с нарушенной Лоренц-инвариантностью при $b^1 > \sigma_0$ хиральная инвариантность восстанавливается и $\langle \sigma \rangle$ становится равной нулю.

Результаты, полученные в рамках двумерной модели Гросса–Невё, помимо принципиального значения для теории поля могут также найти применение для описания свойств одномерных протяженных моделей, например линейного полимера полиацетилена. Чистый полиацетилен является хорошим диэлектриком, но при определенных условиях может переходить в сверхпроводящее состояние [15]. Попытки описать скачок проводимости полиацетилена в рамках теории поля, в частности в модели Гросса–Невё с химическим потенциалом, привели к интерпретации данного явления как перехода между двумя фазами, в одной из которых хиральная симметрия спонтанно нарушена, во

второй — она восстанавливается. Результаты подобных теоретических исследований находятся в очень хорошем соответствии с экспериментом. Как выяснилось, можно провести параллель между ролью химического потенциала, введенного в лагранжиан модели при изучении свойств полиацетилена, и пространственной компонентой вектора, нарушающего Лоренц-инвариантность в нашей модели, при этом результаты настоящей работы не противоречат результатам работ по изучению свойств полиацетилена [16].

Список литературы

1. Bluhm R. // ArXiv: hep-ph/0011272.
2. Bluhm R., Kostelecky V.A., Russell N. // Phys. Rev. Lett. 1997. **79**. P. 1432.
3. Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Razumovsky A.S. // Phys. Rev. D. 2004. **70**. P. 025003.
4. Colladay D., Kostelecky V.A. // Phys. Rev. D. 1997. **55**. P. 6760; Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 116002.
5. Ahmadi F., Jalalzadeh S., Sepangi H. // Class. Quantum Grav. 2006 **23**. P. 4069.
6. Jacobson T., Liberati S., Mattingly D. // Annals Phys. 2006 **321**. P. 150.
7. Kharlanov O.G., Zhukovsky V.Ch. // J. Math. Phys. 2007. **48**. P. 092302.
8. Zhukovsky V.Ch., Lobanov A.E., Murchikova E.M. // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 065016.
9. Jackiw R., Kostelecky V.A. // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 18.

10. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 3235.
11. Antonyan E., Harvey J.A., Kutasov D. // Nucl. Phys. B. 2007. **776**. P. 93.
12. Bietenholz W., Gfeller A., Wiese U.-J. // JHEP. 2003. **0310**. P. 018.
13. Klimenko K.G. // Theor. Mat. Phys. 1988. **75**. P. 487.
14. Schoen V., Thies M. // ArXiv: hep-th/0008175.
15. Кризе И.Б., Рожавский А.С. // УФН. 1987. **152**, № 5. С. 1.
16. Minakata H., Chodos A. // ArXiv: hep-th/9709179v1.

The Gross–Neveu model under the condition of Lorentz invariance violation

N. V. Gubina^a, V. Ch. Zhukovsky^b

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a*gubinanadya@gmail.com*, ^b*zhukovsk@phys.msu.ru*.

The purpose of this work is to calculate the effective potential of the 2D Gross–Neveu model with the Lorentz violating term b_μ , investigation of the potential obtained, and search for extreme points by solving the gap equation and comparing the results with the model without Lorentz violation. Specific effects that distinguish this model from well-known Lorentz invariant model are discussed.

Keywords: Gross–Neveu model, Lorentz invariance, the efficient potential.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.30.Cp.

Received 27 April 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2009).

Сведения об авторах

1. Губина Надежда Валерьевна — аспирантка; тел.: 939-31-77, e-mail: gubinanadya@gmail.com.
2. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; профессор; тел.: 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.