ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Экспресс-анализ параметров турбулентности

Н. Г. Ирошников[1], А. В. Ларичев[1,3], А. В. Корябин[4,a], В. И. Шмальгаузен[2,4]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
[1]кафедра медицинской физики; [2]кафедра общей физики и волновых процессов. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
[3]Институт проблем лазерных и информационных технологий (ИПЛИТ РАН). Россия, 140700, Московская обл., г. Шатура, ул. Святоозерская, д. 1.
[4]Международный учебно-научный лазерный центр Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Россия, 119991, Москва, Россия, Ленинские горы, д. 1, стр. 62.
E-mail: [a]koryabin@ilc.edu.ru

Статья поступила 23.04.2009, подписана в печать 04.06.2009.

Предложен метод, который позволяет получать оценки внешнего масштаба L_0 турбулентных флуктуаций и структурной постоянной C_n^2 при измерениях параметров волнового фронта светового пучка, прошедшего турбулентность, с помощью датчика Гартмана. Метод основан на разложении фазовых флуктуаций в пределах заданной апертуры в ряд по полиномам Цернике и анализе статистики коэффициентов этого разложения. Применения метода для оценки параметров турбулентности в жидкостной ячейке дало результаты, хорошо согласующиеся с оценками, полученными другими методами.

Ключевые слова: атмосферная турбулентность, моделирование турбулентности, полиномы Цернике, распространение излучения.

УДК: 621.378.325.535.3. PACS: 42.15.Dp, 42.25.Dd, 42.68.Bz, 47.27.E–.

Введение

При разработке и анализе адаптивных оптических систем, предназначенных для компенсации влияния атмосферной турбулентности на фазу светового излучения, часто возникает проблема проверки функционирования таких систем в условиях «реальной» турбулентности. Экспериментальные исследования такого рода на атмосферных трассах всегда осложнены метеорологическими условиями и нестационарностью атмосферы. По этой причине в последние годы интенсивно развивались методы лабораторного моделирования турбулентности с использованием управляемых фазовых экранов: адаптивных зеркал и электронно-оптических модуляторов на основе жидких кристаллов [1]. Присущие этим методам ограничения по динамическому диапазону вносимых фазовых искажений делают методы физического моделирования турбулентности вполне востребованными.

Одним из немногих описанных в литературе методов физического моделирования атмосферной турбулентности является использование жидкостной ячейки [2, 3]. В такой ячейке для создания флуктуаций показателя преломления среды используется турбулентная конвекция в слое жидкости, заключенном между плоским горизонтальными нагревателем, расположенным внизу, и холодильником, расположенным в верхней части ячейки.

Так как в жидкости диэлектрическая проницаемость гораздо сильнее зависит от температуры, чем в воздухе (величина производной средней диэлектрической проницаемости по температуре больше на 2–3 порядка), то значительные фазовые флуктуации будут накапливаться в световом пучке на гораздо меньших, чем в воздухе, расстояниях. При больших значениях числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^7 - 10^9$, когда конвективный теплообмен превалирует над теплообменом, обусловленным теплопроводностью, в такой ячейке возникает развитая турбулентность, которая, согласно литературным оценкам [2, 4], является локально-изотропной во всем объеме жидкости за исключением пристенных слоев.

Турбулентный режим в кювете можно варьировать путем изменения разности температур между нагревателем и холодильником, изменения вертикального расстояния между ними и использованием жидкостей с различными теплофизическими параметрами.

Согласно приведенным в [5] оценкам, усредненное вдоль трассы распространения светового пучка значение C_n^2 — структурного параметра, характеризующего интенсивность турбулентного перемешивания, в жидкостной ячейке легко может достигать величины $(0.1–10) \cdot 10^{-7}$ м$^{-2/3}$ при разности температур нагревателя и холодильника в диапазоне 5–66° С, что значительно превышает типичную величину для атмосферы ($\sim 10^{-14}$ м$^{-2/3}$). Это позволяет на одном-двух проходах светового пучка через ячейку (длина «трассы» порядка 0.5 м) смоделировать условия, соответствующие распространению на атмосферной трассе длиной более 1 км.

Жидкостные ячейки использовались для анализа потенциальных возможностей биморфных адаптивных зеркал [6], а также для экспериментального исследования сильных флуктуаций интенсивности [5].

Результаты исследования статистических параметров турбулентности в жидкостной ячейке с помощью датчика Гартмана приводятся в [3]. В этой работе по-

казано, что пространственный спектр флуктуаций показателя преломления в ячейке можно удовлетворительно описать модифицированной формулой Татарского–Кармана, учитывающей внутренний и внешний масштабы турбулентности. Локальные наклоны волнового фронта, измеряемые датчиком Гартмана, использовались в этой работе для вычисления автокорреляционной функции фазовых искажений, затем эти функции аппроксимировались кривыми, полученными на основе спектра Татарского—Кармана с подходящими значениями внутреннего и внешнего масштабов.

В работе [7] предложена методика для оценки качества синтезированных на компьютере фазовых экранов, предназначенных для моделирования распространения излучения в среде с колмогоровским спектром турбулентности. Синтезированные фазовые флуктуации в пределах заданной апертуры раскладывались в ряд по полиномам Цернике [8]. Качество сгенерированных экранов оценивалось по соответствию статистики коэффициентов этого разложения статистике для случая колмогоровского спектра.

В настоящей работе описывается обобщение этого метода, которое позволяет в процессе измерения параметров волнового фронта светового пучка с помощью датчика Гартмана получать оценки внешнего масштаба L_0 турбулентных флуктуаций и структурной постоянной C_n^2. Метод используется для оценки параметров турбулентности в жидкостной ячейке.

1. Разложение спектра фазовых флуктуаций по полиномам Цернике

Представим фазу $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ световой волны, прошедшей через турбулентную среду, в виде разложения по полиномам Цернике:

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t) Z_j(\boldsymbol{r}/R), \tag{1}$$

где $a_j(t)$ — коэффициенты разложения, $Z_j(\boldsymbol{r}/R)$ — полиномы Цернике с соответствующими радиальными и азимутальными индексами n и m, R — радиус приемной апертуры. Статистика коэффициентов разложения $a_j(t)$, в частности ковариационная матрица $\beta_{jk} = \langle a_j a_k \rangle$, определяется пространственным спектром флуктуаций показателя преломления в среде распространения. Мы будем рассматривать только диагональные элементы этой матрицы β_{jj}.

Для случая колмогоровской турбулентности выражения для β_{jk} были получены в работе [10]. Значения β_{jk} в этом случае пропорциональны отношению $(D/r_0)^{5/3}$, где $D = 2R$— диаметр приемной апертуры, а r_0 — радиус корреляции фазы световой волны на приемной апертуре (фридовский радиус) [13]:

$$r_0 = \left[0.422965116 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 C_n^2 L\right]^{-3/5}, \tag{2}$$

здесь λ — длина волны, C_n^2— структурная постоянная турбулентности, L — длина трассы.

Колмогоровский спектр турбулентных флуктуаций показателя преломления $\sim|\boldsymbol{\kappa}|^{11/3}$ явно не содержит каких-либо пространственных масштабов и поэтому удобен для проведения теоретических оценок. Вместе с тем в ряде случаев, например при анализе влияния турбулентности на работу телескопов с апертурой в несколько метров и более [12], необходимо учитывать величину внешнего масштаба турбулентности L_0.

При учете внешнего масштаба турбулентности двумерный спектр $\Phi(\kappa)$ фазовых флуктуаций волны, распространяющейся в турбулентной среде, выражается следующим образом [11–13]:

$$\Phi(\kappa) = \frac{A}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}}, \tag{3}$$

где $\kappa_0 = 1/L_0$, а величину A можно выразить через параметр r_1, который формально определяется по формуле, совпадающей с (2) для фридовского радиуса r_0:

$$A = 0.0229 r_1^{-5/3}. \tag{4}$$

В работе [11] получено выражение для ковариационной матрицы коэффициентов разложения фазы для общего случая двух разнесенных апертур. Для более простого случая одной апертуры выражение для диагональных элементов матрицы ковариаций запишется следующим образом [11, 12]:

$$\begin{gathered}\beta_{jj} = \langle a_j a_j \rangle = A \cdot 2^3 \pi^{8/3} D^{5/3} (n+1) f_n(\pi D/L_0) = \\ = 3.878 \left(\frac{D}{r_1}\right)^{5/3} f_n(\pi D/L_0), \\ f_n(x_0) = (n+1) \int\limits_0^\infty \frac{J_{n+1}^2(x)\, dx}{x(x^2 + x_0^2)^{11/6}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь n — радиальная степень j-го полинома Цернике. Таким образом, значения диагональных элементов ковариационной матрицы $\beta_{jj} = \gamma_{n(j)}$ не зависят от азимутального индекса m. Если $L_0 \to \infty$, $D/L_0 \to 0$, то коэффициенты γ_n совпадают со значениями, полученными Ноллом в работе [10] для колмогоровского спектра турбулентности.

Для нашего рассмотрения коэффициенты γ_n удобно нормировать на коэффициент γ_2 для полиномов второго порядка (рис. 1). Коэффициент γ_1 для полиномов первого порядка (средних по апертуре наклонов) может имеет меньшую относительную ошибку измерения (аппаратную), однако вибрации экспериментальной установки влияют именно на средние наклоны. Коэффициенты для полиномов порядка выше второго как правило имеют большую относительную ошибку измерения.

Из формулы (5) следует, что отношение γ_n/γ_2 не зависит от величины D/r_1, а определяется только значением D/L_0. Поэтому измеренные значения $\tilde{\gamma}_n/\tilde{\gamma}_2$ для нескольких $n > 2$ можно непосредственно использовать для оценки внешнего масштаба турбулентности $\hat{L}_0$. Для этого необходимо определить, для какого значения D/L_0 зависимость $\frac{\gamma_n}{\gamma_2}\left(\frac{D}{L_0}\right)$ наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные значения $\tilde{\gamma}_n/\tilde{\gamma}_2$.

Теперь любое из экспериментальных значений $\tilde{\gamma}_n$ можно использовать для вычисления величины $\tilde{r}_1$, обратив формулу (5):

$$\tilde{r}_1 = D\left[3.878 f_n(\pi D/\hat{L}_0)/\tilde{\gamma}_n\right]^{3/5}, \tag{6}$$

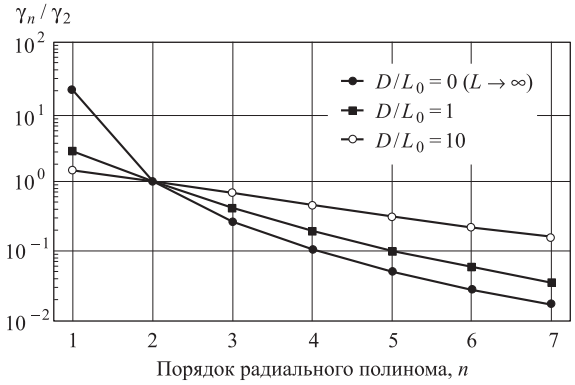

Рис. 1. Зависимость $\gamma_n/\gamma_2(n)$ для различной величины отношения D/L_0. Точки $\frac{\gamma_n}{\gamma_2}$, соответствующие целым значениям n, соединены линиями для наглядности

где $\hat{L}_0$ — оценка внешнего масштаба турбулентности, полученная на этапе аппроксимации кривых γ_n/γ_2. Теперь оценка средней по трассе структурной постоянной турбулентности $\tilde{C}_n^2$ следует из формулы (2):

$$\tilde{C}_n^2 = \tilde{r}_1^{-5/3}\left[0.423(2\pi/\lambda)^2 L\right]^{-1}. \qquad (7)$$

Значения, вычисляемые по (6) и (7), зависят от номера аберрации n, для повышения точности оценок можно использовать среднее по нескольким n.

2. Применение методики в эксперименте с жидкостной ячейкой

2.1. Конструкция ячейки

Конструкция ячейки представлена на рис. 2. Жидкость заполняет прямоугольную ячейку из оптического стекла длиной 34 см и шириной 21 см. Высота слоя жидкости в ячейке может меняться в пределах от 5 до 10 см. Нагреватель и холодильник представляют собой плоские теплообменники из нержавеющей стали, по которым циркулирует горячая и холодная вода.

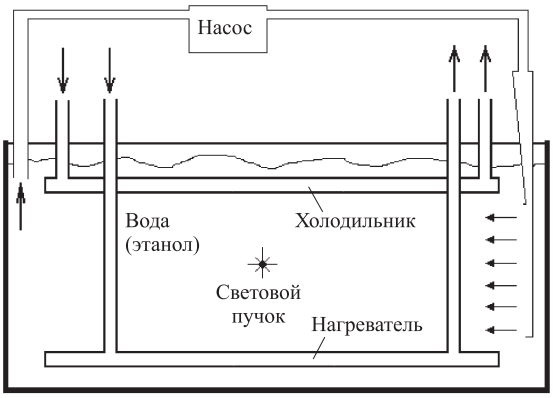

Рис. 2. Конструкция ячейки с системой прокачки заполняющей жидкости

Температура воды на входе в каждый теплообменник поддерживается постоянной при помощи термостатов. Низкая теплопроводность стеклянных стенок обеспечивает равенство потока тепла от нагревателя к холодильнику турбулентному потоку тепла через жидкость с точностью не хуже 10%.

Для моделирования сноса турбулентности ветром в конструкцию ячейки, в отличие от работ [3, 5], добавлены элементы, позволяющие осуществлять прокачку наполняющей жидкости: входное сопло специальной формы, выходное (заборное) сопло, циркуляционный насос с системой металлопластиковых труб. Скорость прокачки при расстоянии между нагревателем и холодильником 9 см может изменяться в пределах 0.8–2.7 см/с.

Для контроля разницы температур «нагреватель–холодильник» используется система, состоящая из персонального компьютера с платой аналого-цифрового преобразования (максимальная частота оцифровки 100 кГц, разрядность АЦП 12 бит) и 4 полупроводниковых термодатчика типа AD592AN с платой источников опорного напряжения.

Термодатчики измеряют температуры около входного и выходного патрубков пластины-нагревателя (t_1 и t_2), пластины-холодильника (t_3) и слоя жидкости в ячейке (t_4). Данные со всех датчиков во время проведения экспериментов записываются в файл и выводятся на экран монитора. Разность температур между нагревателем и холодильником вычислялась по формуле $\Delta t = [(t_2 + t_1)/2 - t_3]$.

Исследования параметров турбулентности в жидкостной ячейке проводились с помощью датчика волнового фронта ShaH-3020 [14]. Датчик изготовлен по схеме Шака–Гартмана [13]. Его пространственное разрешение при входной апертуре 30 мм и 1500 субапертурах составляет около 0.75 мм. Программное обеспечение датчика позволяет по измеренным на субапертурах локальным наклонам восстанавливать фазовый профиль анализируемого пучка и его разложение по полиномам Цернике. В экспериментах с ячейкой использовалось 35 полиномов — до 7-го радиального порядка включительно. Максимальная частота измерений датчика составляет около 56 Гц.

2.2. Результаты экспериментов

Результаты экспериментов для четырех значений разницы температур между нагревателем и холодильником $\Delta t = 10$, 15, 20 и 25°C и для расстояния $H = 10$ см между ними приведены в таблице. Для оценки внешнего масштаба использовались дисперсии коэффициентов Цернике γ_n с номерами $n = 3, \ldots, 6$.

Результаты экспериментов

Δt, °C	L_0, мм	r_1, мм	$<r_1>$, мм	C_n^2, м$^{-2/3}$	$<C_n^2>$, м$^{-2/3}$
10^a	2±0.15	(0.3÷0.37)	0.33	$(0.88\div1.2)\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-7}$
10^b	6±1.5	(3.1÷3.9)	3.4	$(1.7\div2.5)\cdot10^{-9}$	$2.2\cdot10^{-9}$
15^a	2.5±0.25	(0.25÷0.28)	0.27	$(1.4\div1.6)\cdot10^{-7}$	$1.5\cdot10^{-7}$
15^b	5±1.1	(1.8÷2.1)	1.9	$(5.0\div6.5)\cdot10^{-9}$	$5.9\cdot10^{-9}$
20^a	2.5±0.25	(0.19÷0.21)	0.2	$(2.2\div2.8)\cdot10^{-7}$	$2.4\cdot10^{-7}$
25^a	3±0.3	(0.15÷0.17)	0.16	$(3.2\div3.8)\cdot10^{-7}$	$3.6\cdot10^{-7}$

[a] Без прокачки. [b] С прокачкой 0.8 см/с.

Полученные оценки $L_0 = 2 \div 3$ мм практически совпадают с результатами, приведенными в работе [3] для близких к нашим значениям геометрических размеров ячейки и расстояния H между нагревателем и холодильником. Кроме того, значения C_n^2, вычисленные на основании формул (6) и (7), хорошо согласуются

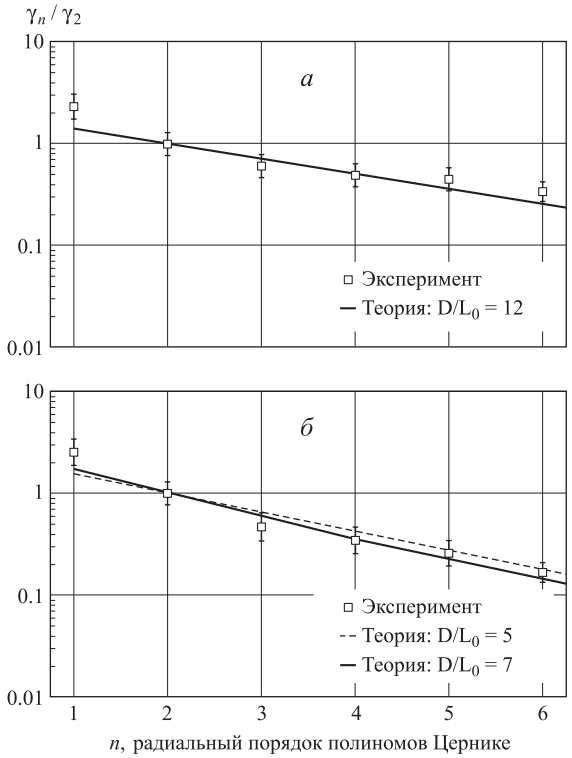

Рис. 3. Аппроксимация экспериментальных значений γ_n/γ_2 для $\Delta t = 10\,^\circ$C: *а* — без прокачки, *б* — с прокачкой

с оценками C_n^2, полученными в [5] из результатов для измерения дисперсии флуктуаций интенсивности в узком пучке.

Приведенные результаты показали, что прокачка жидкости внутри ячейки приводит к увеличению внешнего масштаба турбулентности с 2–3 мм (без прокачки) до 5–6 мм, а также к уменьшению интенсивности турбулентности — величины C_n^2 — более чем на порядок. Такое поведение величин L_0 и C_n^2, по-видимому, объясняется тем, что при прокачке параметры турбулентности в ячейке сильно зависят от геометрических размеров выходного сопла.

Выводы

Полученные экспериментальные результаты свидетельствуют, что метод оценки внешнего масштаба и структурной постоянной турбулентных флуктуаций, основанный на анализе статистики разложения фазы светового пучка в ряд по полиномам Цернике, позволяет получать значения L_0 и C_n^2, согласующиеся с их оценками, полученными другими методами. Данный метод отличается простотой и не требует большого объема вычислений, что позволяет использовать его для оценки параметров турбулентности в процессе измерения формы волнового фронта световых пучов, как в модельных, так и в натурных экспериментах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-02-92118-ГФЕН_а).

Список литературы

1. *Koryabin A.V., Vorontsov M.A., Beresnev L.A.* // Proc. SPIE. 2004. **5162**. P. 103.
2. *Deardorff J.W., Willis G.E.J.* // Fluid Mechanics. 1967. **28**, N 4. P. 675.
3. *Maccioni A., Dainty J.C.* // J. Mod. Optics. 1977. **44**, N 6. P. 1111.
4. *Garon A.M., Goldstein R.J.* // Phys. Fluids. 1973. **16**, N 11, P. 1818.
5. *Гурвич А.С., Каллистратова М.А., Мартвель Ф.Э.* // Известия вузов. Радиофизика. 1977. **XX**, № 7. С. 1020.
6. *Dainty J.C., Koryabin A.V., Kudryashov A.V.* // Appl. Optics, 1988. **37**, N 21. P. 4663.
7. *Корябин А.В., Шмальгаузен В.И.* // Оптика атмосферы и океана. 2006. **19**, № 10. С. 909.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., 1973.
9. *Bissonnette L.R.* // Appl. Opt. 1977. **16**. P. 2242.
10. *Noll R.J.* // J. Opt. Soc. Am. 1976. **66**, N 3. P. 207.
11. *Takato N., Yamagughi I.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. **12**. P. 958.
12. *Winker D.M.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1991. **8**. P. 1568.
13. *Воронцов М.А., Шмальгаузен В. И.* Принципы адаптивной оптики. М., 1985.
14. http://www.visionica.ru/shah.htm.

Express analysis of turbulence parameters

N. G. Iroshnikov [1], **A. V. Larichev** [1,3], **A. V. Koryabin** [2,4,a], **V. I. Shmalhausen** [2,4]

[1] *Department of Medical Physics;* [2] *Department of General Physics and Wave Processes, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[3] *Institute on Laser and Information Technologies of the Russian Academy of Sciences (ILIT RAS), Svyatoozerskaya str. 1, Shatura, Moscow Region 140700, Russia.*
[4] *International Laser Center, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *koryabin@ilc.edu.ru.*

The estimation technique for the outer scale L_0 and the index structure constant C_n^2 of atmospheric turbulence in the case of Shack–Hartmann measurements of phase fluctuations of a light wave propagated through atmosphere is described. The technique is based on the Zernike expansion of phase fluctuations at the optical aperture and analyses of this expansion coefficients statistics. Values of turbulence parameters in the water cell obtained with this technique are in a good agreement with the results reported by other authors.

Keywords: atmospheric turbulence, turbulence modelling, Zernike polinimials, radiation propagation.
PACS: 42.15.Dp, 42.25.Dd, 42.68.Bz, 47.27.E–.
Received 23 April 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2009).

Сведения об авторах

1. Ирошников Никита Георгиевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-48-37, e-mail: nikita@optics.ru.
2. Ларичев Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-48-37, e-mail: larichev@optics.ru.
3. Корябин Александр Васильевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел. (495) 939-48-37:, e-mail: koryabin@ilc.edu.ru.
4. Шмальгаузен Виктор Иванович — докт. физ.-мат. наук, профессор; профессор; тел.: (495) 939-33-06, e-mail: vschm@optics.ru.