

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Анализ и синтез фрактальных диаграмм направленности антенн

А. Н. Боголюбов, А. А. Кобликов^a, Н. Е. Шапкина*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^akoblikovaa@gmail.com*

Статья поступила 03.06.2009, подписана в печать 06.07.2009

Рассмотрена проблема синтеза фрактальных диаграмм направленности антенн (ДНА). Решена задача синтеза фрактальных ДНА для двух классов антенн (дискретных и линейных) в одномерном и двумерном случае. На основе теории фрактального синтеза созданы новые режимы с новыми свойствами во фрактальной электродинамике. Синтез фрактальных диаграмм направленности проведен с помощью функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: фрактальная электродинамика, фрактальная диаграмма направленности антенн, синтез диаграмм направленности антенн.

УДК: 621.396.67 + 537.8 + 53.072 + 515.1. PACS: 02.60.Cb, 41.20.Jb.

Введение

В работе рассматривается решение задачи синтеза фрактальных диаграмм направленности антенн (ДНА). Эта задача относится к фрактальной электродинамике, которая оформилась как научная дисциплина в 1990-е гг. и соединила теорию фракталов с теорией электромагнетизма [1, 2]. В основе теории фрактального синтеза заложена идея реализации характеристик излучения с повторяющейся структурой на различных масштабах, что отличает данный метод от традиционного, где синтезируются гладкие диаграммы направленности антенны.

Синтез фрактальных ДНА проводится с помощью функции Вейерштрасса $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} g(\eta^n x)$, непрерывной, не дифференцируемой и фрактальной на всех масштабах, где $D = -\ln N / \ln r$ — модифицированная фрактальная размерность $1 < D < 2$; N — число элементов в одной подрешетке; $r = r_1/r_2$, r_1 — среднее расстояние между элементами подрешетки (генератора), r_2 — среднее расстояние между элементами случайного возбудителя; параметр $\eta > 1$; g — ограниченная периодическая функция. Анализ синтезированных ДНА показывает, что при помощи трех переменных (распределения излучателей по пространству, амплитуды и фазы тока возбуждения решетки) можно управлять ДНА.

Синтез фрактальных ДНА дает возможность создания новых режимов во фрактальной электродинамике и получения принципиально новых свойств. Спектр применения фрактальных антенн весьма широк: телекоммуникации, нелинейная радиолокация, системы поиска, определение местоположения источников радиоизлучения и др. [3]. Например, размещение фрактальных элементов на корпусе объекта может существенно исказить радиолокационный портрет.

1. Симметричные антенные решетки (дискретный набор излучателей)

Рассмотрим симметричную антенную решетку из $2N$ элементов с указанным распределением тока возбуждения (рис. 1, а).

Множитель решетки для нее запишем в следующем виде:

$$f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N I_n \cos(kd_n \cos \theta + \alpha_n), \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; I_n , α_n — амплитуда и фаза тока возбуждения; d_n — расстояние между соседними излучателями; θ — угол наблюдения.

Предположим, что множитель решетки с бесконечным числом излучателей выражается через обобщенную функцию Вейерштрасса, которая обладает свойством самоподобия в бесконечном диапазоне масштабов. Заметим, что физически реализуемые решетки состоят из конечного числа элементов, поэтому получаем, что

$$f(u) = 2 \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)n} \cos(a\eta^n u + \alpha_n), \quad (2)$$

где a — некоторая постоянная.

Выражение (2) представляет собой множитель решетки из $2N$ излучателей с амплитудами и фазами:

$$I_n = \eta^{(D-2)n}, \quad kd_n = a\eta^n \quad \text{при} \quad u = \cos \theta. \quad (3)$$

Функция (2) есть диапазонно ограниченная функция Вейерштрасса, а результирующая ДНА является фракталом в конечном диапазоне масштабов с нижней границей $2\pi/(\alpha\eta^N)$, и при увеличении N диаграмма направленности становится более детализированной. Максимальное значение (2) определяется выбором фазы для тока возбуждения $\alpha_n = -a\eta^n u_0$ при $u_0 = \cos \theta_0$, а сам ряд представляет собой геометрическую прогрессию, что позволяет подсчитать нормализованный множитель решетки и нормализованную амплитуду

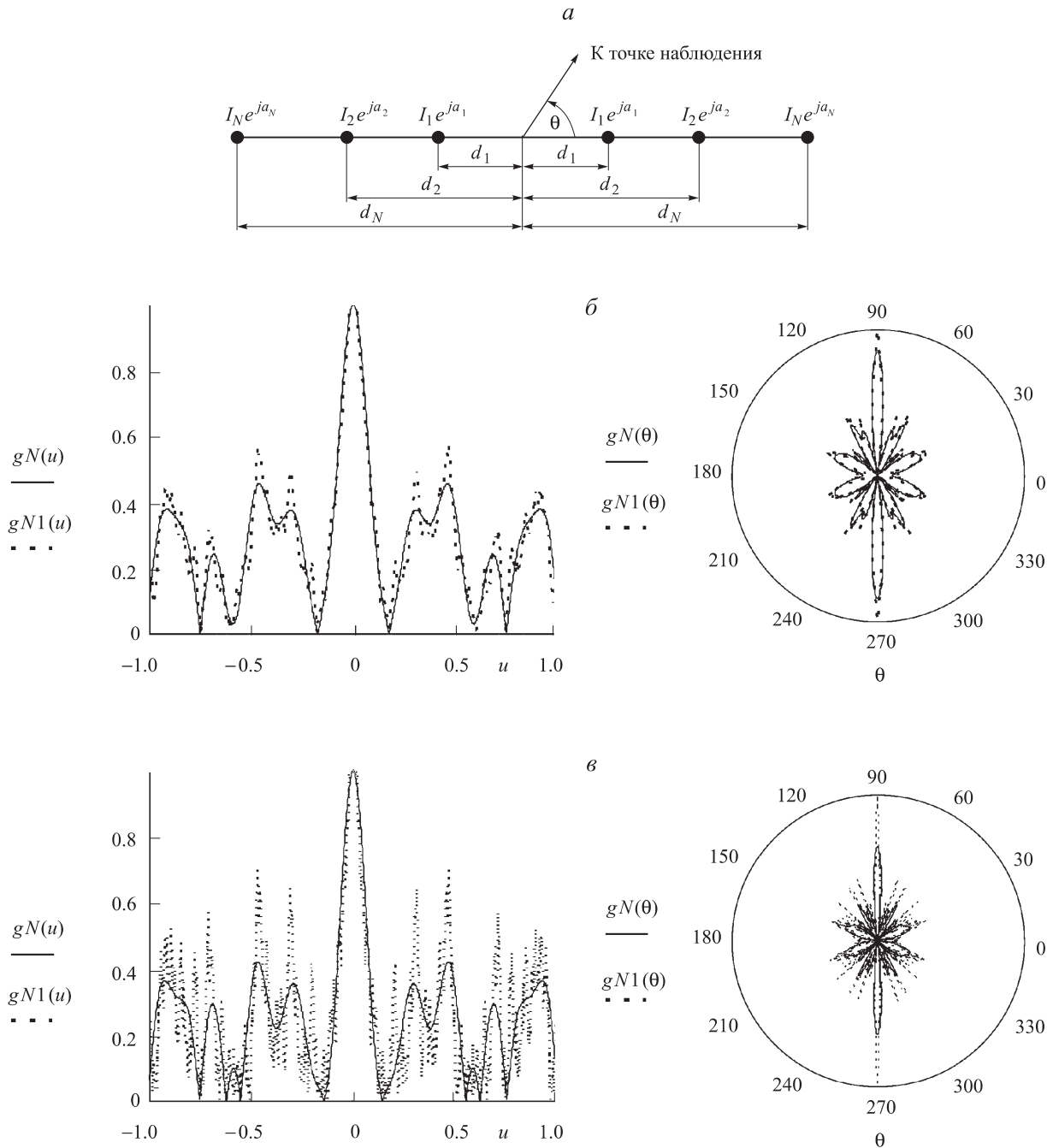


Рис. 1. а — Симметричная антенная решетка из $2N$ элементов с указанным распределением тока возбуждения; б, в — нормализованные множители для 10- и 100-элементной решетки Вейерштрасса при $\tau = 0.5\lambda$, $\eta = 1.52$ при разных фрактальных размерностях ($D = 1.1$, $D = 1.5$)

возбуждающего тока:

$$g_N(u) = (1 - \eta^{(D-2)}) (1 - \eta^{(D-2)N})^{-1} \sum_{n=1}^N i_n \cos(a\eta^n u + \alpha_n), \tag{4}$$

где $i_n = \eta^{(D-2)(n-1)}$.

Из (4) и (3), получаем, что фрактальная размерность диаграммы направленности может контролироваться распределением тока по решетке.

Расстояние между любыми двумя соседними излучателями решетки оценивается соотношением $d_{n+1} - d_n = ak^{-1}(\eta - 1)\eta^n$ при $n = 1, 2, \dots, N-1$, а так

как $\eta > 1$, то $\eta^n > \eta$ при $n > 1$. Получаем, что

$$d_{n+1} - d_n > d_2 - d_1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \tag{5}$$

Теперь введем параметр τ — ограничивающий фактор для минимального расстояния между двумя последовательными излучателями решетки. Существует два возможных случая:

$$\begin{aligned} \text{первый случай: } & d_2 - d_1 = \tau \text{ и } d_1 \geq \tau/2, \\ \text{второй случай: } & d_2 - d_1 \geq \tau \text{ и } d_1 = \tau/2. \end{aligned} \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует, что при выполнении (6) пространственный разнос между всеми другими парами последовательных излучателей решетки будет всегда удовлетворять критерию минимального расстояния τ .

Выражение для коэффициента a как функции τ и η получается из (3) и (6):

$$\begin{aligned} a &= k\tau(\eta(\eta-1))^{-1}, & 1 < \eta \leq 3, \\ a &= k\tau(2\eta)^{-1}, & \eta \geq 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр η управляет сходимостью выражения для коэффициента решетки Вейерштрасса. Чем ближе η к единице, тем больше излучателей требуется для данной решетки, а пространственный разнос между последовательными элементами решетки уменьшается. Также отметим, что амплитуда и фазы тока возбуждения, а также пространственные размещения излучателей могут быть определены итерационным алгоритмом:

$$\begin{aligned} I_n &= \eta^{(D-2)} I_{n-1}, & I_1 &= \eta^{(D-2)}, & \alpha_n &= \eta \alpha_{n-1}, & \alpha_1 &= -a\eta u_0, \\ d_n &= \eta d_{n-1}, & d_1 &= a\eta k^{-1}, & & & & \text{где } n = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

Например, рассматривается решетка Вейерштрасса с $\tau = \lambda/2$. Тогда из (7) при $a = 4$ следует, что $\eta = 1.52$. Эти значения используются в (8) для определения пространственного разноса излучателей решетки. На рис. 1, б, в показаны синтезированные множители решеток с 10 и 100 излучателями при фрактальном распределении тока возбуждения с $D = 1.1$ (б), $D = 1.5$ (в). Заметим, что с повышением D характеристики излучения приобретают все более сложный вид. Таким образом, фрактальная размерность D управляет распределением тока по решетке, а высокая степень спада амплитуды тока возбуждения необходима для синтеза диаграмм направленности с более низкой фрактальной размерностью.

Далее введем понятие коэффициента направленного действия решетки Вейерштрасса:

$$G(u_0) = \frac{2f_N^2(u_0)}{\int_{-1}^1 f_N^2(u) du},$$

где

$$f_N^2(u) = 4 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)(m+n)} \cos(a\eta^m u + \alpha_m) \cos(a\eta^n u + \alpha_n).$$

По мере уменьшения D главный лепесток диаграммы направленности расширяется, а соответствующие значения $G(u_0)$ уменьшаются.

Аналогичным образом рассмотрим симметричную антенную решетку из $2N \times 2M$ элементов с указанным распределением тока возбуждения (рис. 2, а). Для нее получаем следующие соотношения для множителя решетки:

$$f(u_1, u_2) = 4 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \eta^{(D-2)(p+q)} \cos[a_1 \eta^p u_1 + a_2 \eta^q u_2 + \alpha_{pq}]; \quad (9)$$

для нормализованной амплитуды возбуждающего тока

$$i_{pq} = \eta^{(D-2)(p+q-2)}; \quad (10)$$

для нормализованного множителя решетки

$$g_{NM}(u_1, u_2) = (1 - \eta^{N(D-2)})^{-1} (1 - \eta^{M(D-2)})^{-1} (1 - \eta^{(D-2)})^2 \times$$

$$\times \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M i_{pq} \cos[a_1 \eta^p u_1 + a_2 \eta^q u_2 + \alpha_{pq}]; \quad (11)$$

для амплитуды и фазы тока возбуждения и расстояния между соседними излучателями

$$I_{pq} = \eta^{(D-2)(p+q)}, \quad kd_{p,q}^{1,2} = a_{1,2} \eta^{p,q} \quad (12)$$

при $u_1 = \cos \theta \cos \psi$, $u_2 = \cos \theta \sin \psi$.

Все соотношения получены путем обобщения результатов для одномерного случая.

Исходя из формул (9)–(12) можно сделать ряд выводов: 1) выражение (9) есть диапазонно ограниченная функция Вейерштрасса, а результирующая ДНА является фракталом в конечном диапазоне масштабов с нижней границей $\max\{(2\pi/a_1 \eta^N); (2\pi/a_1 \eta^M)\}$; 2) ДНА становится более детализированной при увеличении N и M ; 3) фрактальная размерность диаграммы направленности может контролироваться распределением тока по решетке; 4) пространственный разнос между всеми парами последовательных излучателей решетки будет удовлетворять критерию минимального расстояния τ , а выражение для коэффициента a как функции τ и η получается путем замены a на $a_{1,2}$ в формуле (7); 5) параметр η управляет сходимостью выражения для коэффициента двумерной решетки Вейерштрасса аналогично одномерному случаю; 6) амплитуда I_{pq} и фазы α_{pq} тока возбуждения, а также пространственные размещения $d_{1,2}$ излучателей могут быть определены итерационным алгоритмом.

На рис. 2, б, в показаны синтезированные множители решеток с 10×10 и 100×100 излучателями при фрактальном распределении тока возбуждения с $D = 1.5$.

Коэффициент направленного действия двумерной решетки Вейерштрасса определим по формуле

$$G(u_1^0, u_2^0) = 2f_{NM}^2(u_1^0, u_2^0) \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{NM}^2(u_1, u_2) du_1 du_2 \right]^{-1},$$

тогда из (9) получаем, что

$$\begin{aligned} f_{NM}^2(u_1, u_2) &= 8 \sum_{p,p'=1}^N \sum_{q,q'=1}^M \eta^{(D-2)(p+p'+q+q')} \times \\ &\times (\cos(\alpha_p^1 + \alpha_{p'}^1) \cos(\alpha_q^2 - \alpha_{q'}^2) + \cos(\alpha_p^1 - \alpha_{p'}^1) \cos(\alpha_q^2 + \alpha_{q'}^2)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha_{p,q}^{1,2} \pm \alpha_{p',q'}^{1,2} = a_{1,2}(\eta^{p,q} \pm \eta^{p',q'})(u_{1,2} - u_{1,2}^0)$.

Интегрирование (13) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{NM}^2(u_1, u_2) du_1 du_2 &= \\ &= 8 \sum_{p,p'=1}^N \sum_{q,q'=1}^M \eta^{(D-2)(p+p'+q+q')} \Lambda_{pp'qq'}(a_{1,2}, \eta, u_{1,2}^0), \end{aligned}$$

что позволяет записать

$$G(u_1^0, u_2^0) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - \eta^{(D-2)})^2}{(1 - \eta^{(D-2)N})(1 - \eta^{(D-2)M})} \right]^2 \right\} \times$$

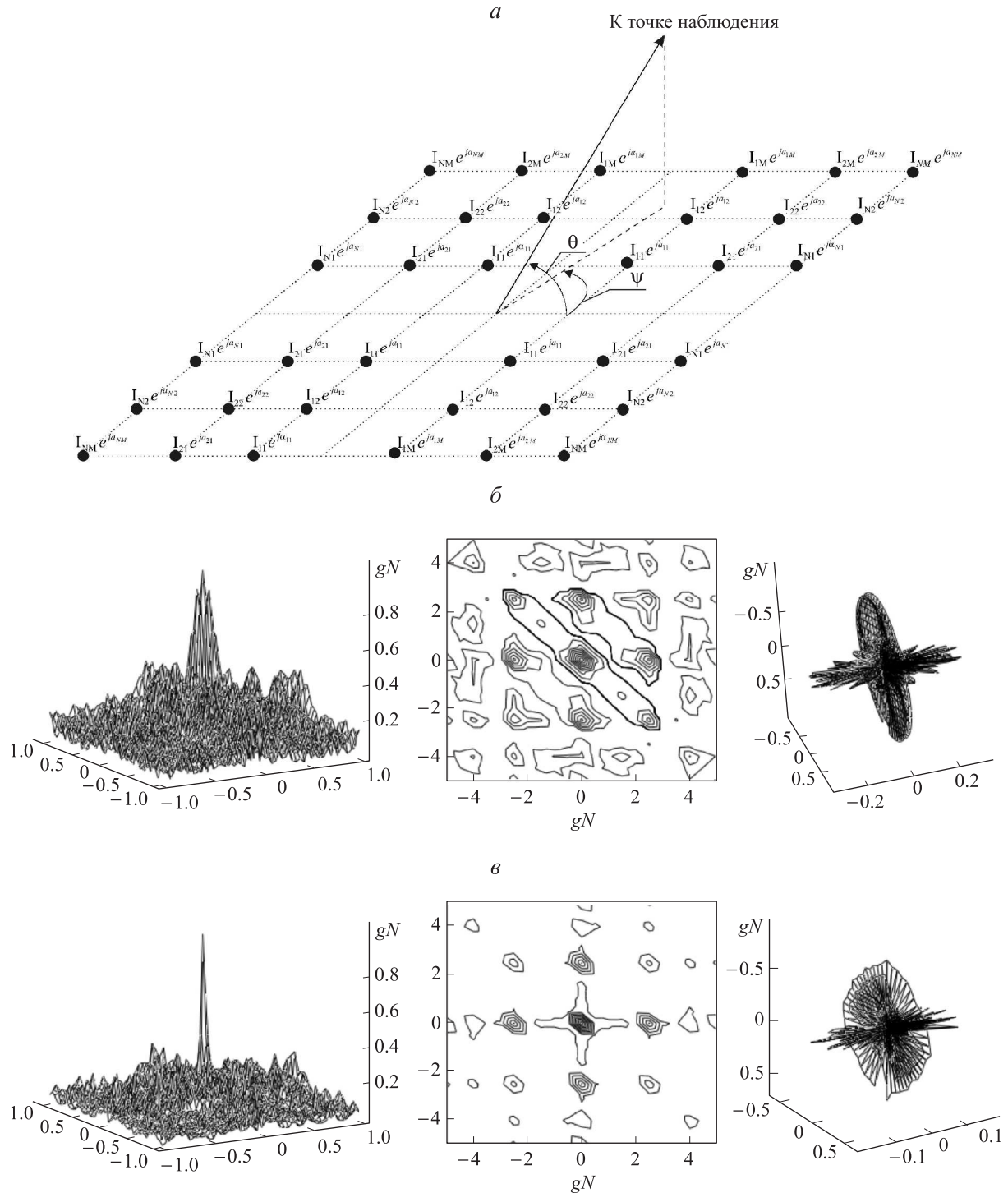


Рис. 2. а — Симметричная антенная решетка из $2N \times 2N$ элементов с указанным распределением тока возбуждения; б, в — нормализованные множители для решетки Вейерштрасса 10×10 и 100×100 элементов при $\tau = 0.5\lambda$, $\eta = 1.52$ при фрактальной размерности $D = 1.5$

$$\times \left\{ \sum_{p,p'=1}^N \sum_{q,q'=1}^M \eta^{(D-2)(p+p'+q+q'-4)} \Lambda_{pp'qq'}(a_{1,2}, \eta, u_{1,2}^0) \right\}^{-1},$$

где

$$\Lambda_{pp'qq'}(a_{1,2}, \eta, u_{1,2}^0) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\cos(\alpha_p^1 + \alpha_{p'}^1) \cos(\alpha_q^2 - \alpha_{q'}^2) + \cos(\alpha_p^1 - \alpha_{p'}^1) \cos(\alpha_q^2 + \alpha_{q'}^2)) du_1 du_2.$$

Частный случай при $D = 2$ соответствует решетке с однородным распределением тока возбуждения, и для него коэффициент направленного действия равен

$$G(u_1^0, u_2^0) = 2N^2 M^2 \left[\sum_{p,p'=1}^N \sum_{q,q'=1}^M \Lambda_{pp'qq'}(a_{1,2}, \eta, u_{1,2}^0) \right]^{-1}.$$

Анализируя выражение для коэффициента направленного действия как функции D , получаем, что по

мере уменьшения D главный лепесток диаграммы направленности расширяется, а соответствующие значения $G(u_1^0, u_2^0)$ уменьшаются.

2. Непрерывные излучающие системы

В этом разделе рассмотрим длинную линейную излучающую систему длиной L с непрерывным изменением тока $I(z)$ (рис. 3, *a*). Для линейного источника бесконечной длины характеристики излучения $F(u)$ и распределение тока $I(z)$ связаны парой преобразований Фурье:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(s) \exp(i2\pi us) ds,$$

$$I(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp(-i2\pi us) du, \quad (14)$$

где $s = z/\lambda$, $u = \cos \theta$.

Фрактальная функция строится с применением рекурсивных алгоритмов с подходящей генераторной функцией. Допустим, что ДНА линейного источника бесконечной длины может быть представлена диапазоно ограниченной обобщенной функцией Вейерштрасса в виде

$$F(u) = \sum_{n=0}^N \eta^{(D-2)n} g(\eta^n u) \quad (15)$$

с периодической и четной генераторной функцией $g(u)$, которая представима в виде $g(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\pi u)$

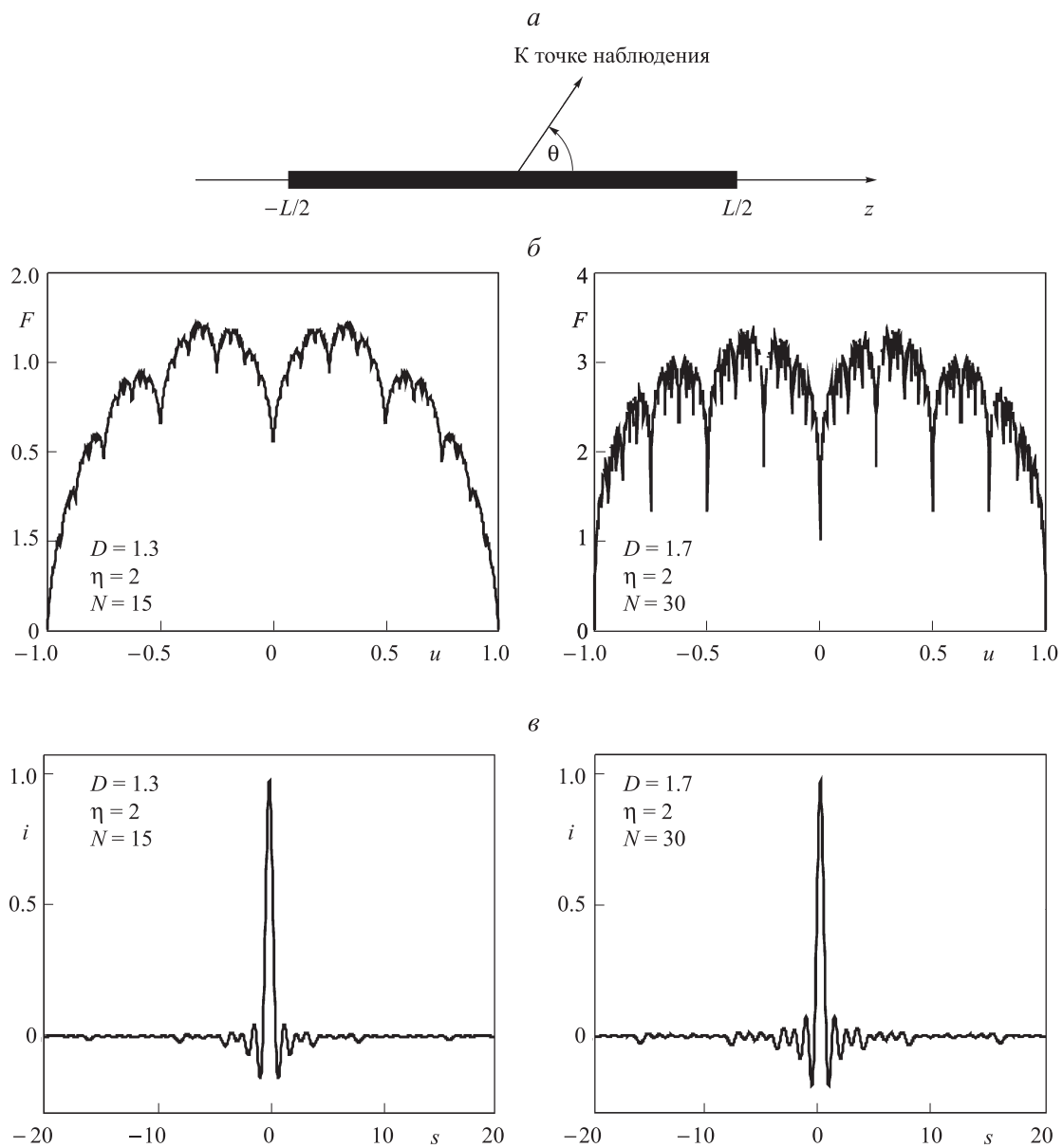


Рис. 3. *a* — Геометрия непрерывной линейной излучающей системы длиной L , расположенной вдоль оси z ; *б* — синтезированные диаграммы направленности с заданными значениями D ; *в* — нормированные распределения тока $i(s)$

с Фурье-коэффициентами ряда

$$a_m = 2 \int_0^1 g(u) \cos(m\pi u) du. \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим выражение для ДНА:

$$F(u) = \frac{a_0}{2} (\eta^{(D-2)N} - 1) (\eta^{(D-2)} - 1)^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_m \eta^{(D-2)n} \cos(m\pi \eta^n u).$$

Не теряя общности, произведем замену u на $(u+1)$. В результате имеем

$$F(u) = \frac{a_0}{2} \frac{\eta^{(D-2)N} - 1}{\eta^{(D-2)} - 1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \eta^{(D-2)n} \cos(m\pi \eta^n (u+1)) \right\}, \quad (17)$$

$$a_m = 2 \int_0^1 g(u-1) \cos(m\pi u) du,$$

где $\eta > 1$ и $1 < D < 2$.

Выражение (17) представляет разложение Фурье фрактальной диаграммы направленности $F(u)$ в базе диапазоно ограниченных косинусоидальных функций Вейерштрасса. Данное представление называется разложением Фурье-Вейерштрасса [4]. Распределение тока возбуждения линейного источника бесконечной длины, требуемое для получения заданной диаграммы направленности, получаем из (14) и (17):

$$I(s) = a_0 \frac{\eta^{(D-2)N} - 1}{\eta^{(D-2)} - 1} \text{sinc}(2\pi s) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_m \eta^{(D-2)n} \times \{ e^{im\pi \eta^n} \text{sinc}(2\pi s - m\pi \eta^n) + e^{-im\pi \eta^n} \text{sinc}(2\pi s + m\pi \eta^n) \}.$$

Для источника конечной длины имеем

$$\begin{aligned} \bar{I}(s) &= I(s), & |s| \leq L/2\lambda, \\ \bar{I}(s) &= 0, & |s| > L/2\lambda. \end{aligned} \quad (18)$$

Соответствующие выражения для синтезированных фрактальных ДНА $\bar{F}(u)$ линейной излучающей системы длиной L находятся с помощью (11) и (18). При этом $\lim_{L \rightarrow \infty} \bar{F}(u) = F(u)$.

Теперь рассмотрим процедуру синтеза линейного источника излучения с генераторной обобщенной функцией вида $g(\theta) = 1 - |\cos \theta|$, $0 \leq \theta \leq \pi$, которая преобразуется в треугольную функцию $g(u) = 1 - |u|$, $|u| \leq 1$. Коэффициенты Фурье a_m с использованием (17) записываются в виде уравнений: $a_0 = 1$, $a_{2m+1} = -(2/(m\pi))^2$, $a_{2m+2} = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$. После подстановки полученных выражений в (17) при $\eta = 2$ получаем ДНА линейной фрактальной излучающей системы с размерностью D , которая создана данным рекурсивным алгоритмом:

$$F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{2^{(D-2)N} + 2^{(D-2)} - 2}{2^{(D-2)} - 1} \right] - |u| - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2^{(D-2)n+1}}{\pi(2m-1)^2} \cos[(2m-1)\pi 2^n u],$$

$$F(\pm 1) = 0, \quad F(0) = 1. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что при $N = 1$ диаграмма редуцируется до $g(u) = 1 - |u|$. Для ДНА вида (19) нормализованное распределение тока возбуждения $i(s)$ равно

$$i(s) = \frac{I(s)}{I(0)} = \left[\frac{2^{(D-2)N} - 2^{(D-2)}}{2^{(D-2)N} - 1} \right] \text{sinc}(2\pi s) + \left[\frac{2^{(D-2)} - 1}{2^{(D-2)N} - 1} \right] \text{sinc}^2(\pi s) - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \left[\frac{2^{(D-2)} - 1}{2^{(D-2)N} - 1} \right] \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N-1} 2^{(D-2)n} (2m-1)^{-2} \times \{ \text{sinc}[2\pi s - (2m-1)2^n \pi] + \text{sinc}[2\pi s + (2m-1)2^n \pi] \}. \quad (20)$$

Заметим, что, за исключением краевого эффекта, функция sinc самоподобна с коэффициентом подобия, равным двум.

Распределение тока линейного источника (20) используется для синтеза ДНА с желаемой фрактальной размерностью, базирующейся на треугольной генераторной функции. Примеры нормализованных диаграмм направленности $F(u)$ и нормализованные распределения токов $i(s)$ линейных источников с заданными значениями D , η , N приведены на рис. 3, б, в. Отметим что при возрастании D возникает увеличение неоднородности диаграмм направленности. Для линейного источника конечной длины L распределение тока будет представлять собой конечную сумму согласно (18).

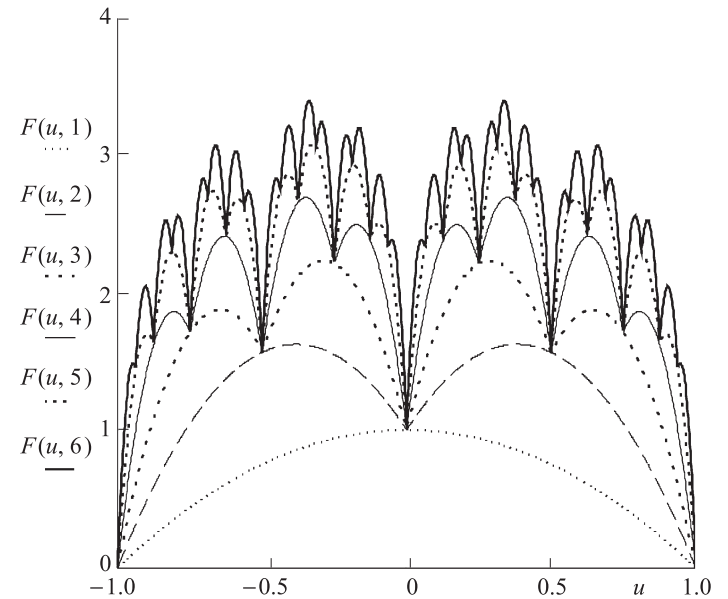


Рис. 4. Первые шесть стадий $N = 1-6$ в синтезе фрактальных диаграмм направленности при $D = 1.7$ и $\eta = 2$

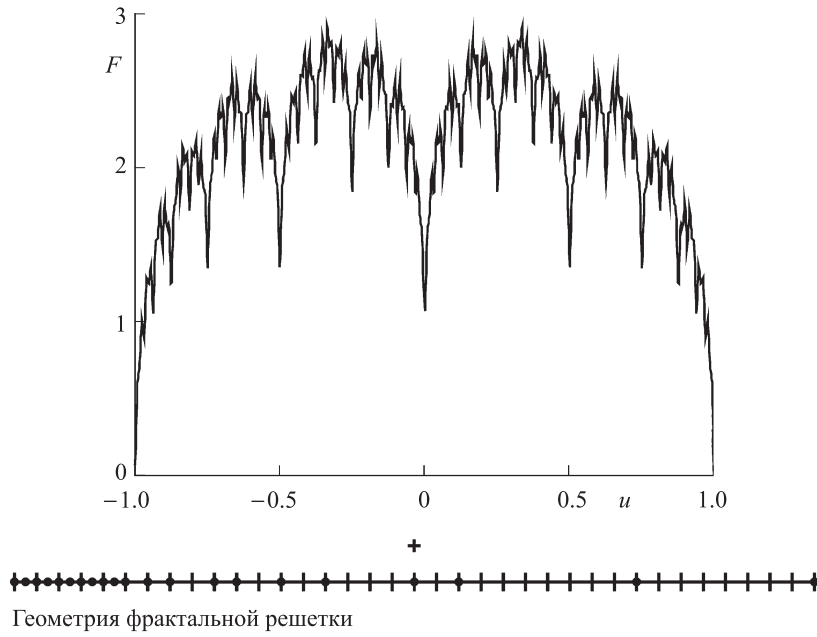


Рис. 5. Геометрия фрактальной решетки Фурье–Вейерштрасса и ее нормализованная синтезированная диаграмма направленности с $D = 1.7$, $\eta = 2$, $N = 4$, $M = 5$ и треугольной генераторной функцией

Рассмотрим $g(u) = \sin^2 \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, которая преобразуется к виду

$$g(u) = 1 - u^2, \quad |u| \leq 1. \quad (21)$$

Используя формулы (17) и (21), получим требуемые коэффициенты для преобразования Фурье–Вейерштрасса: $a_0 = 4/3$, $a_m = -(2/(\pi m))^2$, $m \neq 0$.

На рис. 4 показаны первые 6 стадий синтеза фрактальных диаграмм направленности на основе преобразования Фурье–Вейерштрасса для формы (21).

Переходя к диапазонно ограниченным решеткам Фурье–Вейерштрасса, запишем (17) в виде

$$F(u) = I_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} I_{mn} \cos(kd_{mn}u + \alpha_{mn}), \quad (22)$$

где $I_0 = (a_0/2)/(1 - \eta^{(D-2)N})(1 - \eta^{(D-2)})^{-1}$, $I_{mn} = (a_m/2)\eta^{(D-2)n}$, $kd_{mn} = \pi m \eta^n$, $\alpha_{mn} = \pi m \eta^n$.

Коэффициенты разложения a_m , соответствующие особенностям порождающих генераторных функций, могут быть получены из (17). Соотношение (22) представляет множитель дискретной решетки Фурье–Вейерштрасса с бесконечным числом элементов. Двойное суммирование в (22) можно интерпретировать как суперпозицию парциальных диаграмм направленности N решеток, состоящих из M излучателей. Представление для множителя решетки с конечным числом излучателей получается путем перевода внешней суммы к конечной сумме в (22) с переменной порядка суммирования.

Непосредственно из равенства $kd_{mn} = \pi m \eta^n$ следует, что расположение каждого из M излучателей подчиняется следующему уравнению: $\Delta_n = d_{m+1,n} - d_{m,n} = \eta^n \lambda/2$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, которое удовлетворяет рекуррентному соотношению $\Delta_{n+1} = \eta^n \Delta_n$, $\Delta_0 = \lambda/2$. Соответствующие рекуррентные соотношения для амплитуд токов возбуждения и фаз имеют вид $I_{m,n+1} =$

$\eta^{(D-2)} I_{mn}$, $\alpha_{m,n+1} = \eta \alpha_{mn}$, $I_{m,0} = a_m/2$, $\alpha_{m,0} = \pi m$. Амплитуда нормализованного тока возбуждения $i_0 = 1$, $i_{mn} = (a_m/a_0)\eta^{(D-2)n}(1 - \eta^{(D-2)})(1 - \eta^{(D-2)N})^{-1}$.

Например, при синтезе фрактальной решетки Фурье–Вейерштрасса с диаграммой направленности, основанной на треугольной генераторной функции с $\eta = 2$, амплитуды токов возбуждения, фазы и расстояния между соседними излучателями имеют следующий вид: $a_{mn} = \pi(2m-1)2^n$, $d_{mn} = \lambda(2m-1)2^{n-1}$, $I_0 = (1/2)(1 - 2^{(D-2)N})(1 - 2^{(D-2)})^{-1}$, $I_{mn} = (-2/\pi^2)(2^{(D-2)n})(2m-1)^{-2}$. На рис. 5 показана геометрия фрактальной решетки Фурье–Вейерштрасса и ее синтезированная ДНА при $\eta = 2$, $N = 4$, $M = 5$, $D = 1.7$.

На примере одномерного случая были рассмотрены основные тенденции. Результаты для двумерного случая получаются путем обобщения результатов одномерного.

Заключение

Проведенные исследования показали, что использование фрактальных антенн позволяет создавать новые режимы с принципиально новыми свойствами, улучшая эксплуатационные характеристики подобных устройств и открывая тем самым обширную область для применения такого рода антенн. В настоящее время именно математическое моделирование является одним из основных методов исследования подобных структур, позволяющих априори установить их оптимальные параметры.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук, главному научному сотруднику ИРЭ РАН, профессору А. А. Потапову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00408).

Список литературы

1. Jaggard D.L. // Symmetry in Electrodynamics / Ed. by C. Baum, H. N. Kritikos. London: Taylor & Francis, 1995.
2. Боголюбов А.Н., Кобликов А.А., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. // Девятая международная научно-техническая конференция «Проблемы техники и технологии телекоммуникаций». Казань, 2008. С. 381.
3. New fractal antennas for compact and versatile telecommunication services // Microwave. 2000. **43**, N 1. P. 196.
4. Werner D.H., Werner P.L. // Radio Sci. 1995. **30**, N 1. P. 29.

Analysis and synthesis of fractal antenna radiation pattern

A. N. Bogolyubov, A. A. Koblikov^a, N. E. Shapkina

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.

E-mail: ^akoblikovaa@gmail.com

The problem of fractal antenna radiation pattern synthesis is analyzed. The problem is solved for one-dimensional and two-dimensional cases. The theory of fractal synthesis is applied to create new modes with new properties in fractal electrodynamics. Fractal radiation pattern synthesis is provided using Weierstrass function.

Keywords: fractal electrodynamics, fractal antenna radiation pattern, synthesis of fractal antenna radiation pattern.

PACS: 02.60.Cb, 41.20.Jb.

Received 3 June 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Кобликов Артем Александрович — аспирант, e-mail: koblikovaa@gmail.com.
3. Шапкина Наталья Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, тел.: (495) 939-10-33, e-mail: neshapkina@mail.ru.