Исследование распространения лазерного импульса во вращающейся системе отсчета

М. М. Денисов[1], А. А. Зубрило[2,a]

[1] *МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского. Россия, 121552, Москва, ул. Оршанская, д. 3.*

[2] *Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ). Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: [a] zbr@srd.sinp.msu.ru

Статья поступила 01.04.2009, подписана в печать 22.07.2009

Проведено вычисление кривизны и кручения лазерного луча во вращающейся системе отсчета. Показано, что длина луча, заключенная между некоторыми двумя точками вращающейся системы отсчета, отличается от геометрического расстояния на величину, которую необходимо учитывать при лазерной локации высокоапогейных космических аппаратов.

Ключевые слова: математическая модель, лазерный луч, вращающаяся система отсчета.

УДК: 51-71. PACS: 02.60.Cb, 42.15.Dp.

Введение

При проведении лазерной локации космических аппаратов и осуществлении сеансов лазерной связи с ними неявно предполагается, что лазерная станция, покоящаяся на поверхности вращающейся Земли, является инерциальной системой отсчета. Поэтому световые лучи, входящие в телескоп и выходящие из него, считаются прямыми линиями, и распространение световых импульсов по этим лучам предполагается равномерным.

Однако лазерная станция находится в слабонеинерциальной системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, и ее лучи согласно общей теории относительности Эйнштейна [1] под действием сил инерции вращающейся системы отсчета должны искривляться, а движение световых импульсов по этим лучам должно быть неравномерным.

В последнее время в научной литературе эта проблема стала активно обсуждаться в контексте исследования влияния вращения и гравимагнетизма на данные, получаемые при лазерной локации Луны, космических аппаратов и при наблюдении электромагнитного излучения двойных пульсарных систем. Впервые эти вопросы были поставлены Нордтведтом (см., напр., [2]) и продолжены в работах Копейкина [3] с коллегами [4].

И хотя все эти релятивистские эффекты малы, с определенного уровня точности измерений их необходимо учитывать [5]. Поэтому без математической модели распространения лазерного импульса, учитывающей уравнения общей теории относительности, осуществлять прецизионную лазерную локацию космических аппаратов невозможно [6].

Более того, влияние неинерциального движения лазерных станций уже иногда проявляется при проведении локации космических аппаратов. Так, например, на Крымской лазерной станции, использующей маломощный лазер с относительно узким лазерным пучком (как известно, лазерный пучок не является цилиндром, а представляет собой расширяющийся конус), был замечен довольно странный эффект [7]: оператору было очень трудно попасть электромагнитным импульсом в движущийся космический аппарат. Обычно космический аппарат на околоземной орбите достаточно хорошо виден в телескоп лазерной станции, и оператор, вводя упреждение вдоль вектора его скорости, должен был попасть лазерным импульсом в отражатели, установленные на его внешних поверхностях.

Однако было замечено, что если лазерный импульс направить в расчетное место его встречи с космическим аппаратом, считая лазерный луч прямой линией, то этот импульс не попадет на отражатели. Если же ось лазерного пучка немного доворачивать и направлять электромагнитный импульс не в расчетное место встречи, а сканировать в его окрестности, то при некотором небольшом угловом отклонении (составляющем несколько угловых секунд) от расчетного места лазерный импульс попадает на ретрорефлекторы космического аппарата и в телескопе лазерной станции появляется отраженный электромагнитный импульс. После этого дальнейшее сопровождение космического аппарата лазерным пучком переключают на компьютер, который автоматически вводит найденную экспериментально дополнительную угловую поправку, и процесс локации проходит, как правило, без вмешательства оператора.

В качестве первой причины этого небольшого рассогласования между расчетным угловым направлением на место встречи лазерного импульса с космическим аппаратом и фактическим угловым направлением на это место было выдвинуто предположение о несовпадении оптической оси телескопа с осью лазерного пучка на лазерной станции. Однако дополнительные исследования юстировки показали [7], что эти оси с требуемой точностью совпадают.

На мощных лазерных станциях [8], использующих широкие лазерные пучки, этот эффект не наблюдался, так как электромагнитный импульс в окрестности космического аппарата имел большие поперечные размеры и отражатели, установленные на космическом аппарате, попадали на периферию этого пучка.

Исследуя этот вопрос, мы показали [9], что причиной такого рассогласования является недостаточно точная математическая модель распространения лазерного импульса, использовавшаяся для расчетов угловых координат места встречи лазерного импульса и космического аппарата и не учитывающая эффектов общей теории относительности. Целью настоящей работы является исследование распространения лазерного импульса во вращающейся системе отсчета методами дифференциальной геометрии и выяснение влияния эйнштейновского искривления луча на точность измерения расстояния при лазерной локации космических аппаратов.

1. Уравнение семейства лучей во вращающейся системе отсчета

Рассмотрим систему отсчета, вращающуюся вокруг оси z с угловой частотой Ω. Пусть лазерная станция покоится в этой системе отсчета на гринвичском меридиане, т. е. в точке A со сферическими координатами $\boldsymbol{R}_A = \{R_A, \theta_A, \varphi_A{=}0\}$.

Во вращающейся системе отсчета лучи, по которым распространяются лазерные импульсы, с точки зрения общей теории относительности Эйнштейна являются пространственными кривыми, которые можно определить, решая уравнение геодезических

$$\frac{dK^n}{d\sigma} + \Gamma^n_{pm} K^p K^m = 0, \tag{1}$$

где σ — некоторый аффинный параметр, $K^i = dx^i/d\sigma$ — четырехвектор, касательный к изотропной геодезической, удовлетворяющий соотношению

$$g_{nm} K^n K^m = 0. \tag{2}$$

Используя выражения

$$g_{00} = 1 - \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}, \quad g_{01} = \frac{\Omega y}{c}, \quad g_{02} = -\frac{\Omega x}{c},$$
$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$$

для метрического тензора пространства-времени во вращающейся системе отсчета [1] и переходя в уравнениях (1) от дифференцирования по аффинному параметру σ к дифференцированию по времени t, получим уравнения

$$\ddot{x} - \frac{\Omega^2}{c^2} x - \frac{2\Omega}{c}\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} - \frac{\Omega^2}{c^2} y + \frac{2\Omega}{c}\dot{x} = 0, \quad \ddot{z} = 0,$$

где точка обозначает производную по $x^0 = ct$.

Решение этих уравнений, удовлетворяющих условию (2), для семейства лучей, выходящих из точки A, где находится лазерная станция, можно записать в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= R_A \sin\theta_A \cos\Omega t + ct\sin\theta\cos(\Omega t - \varphi), \\ y &= -R_A \sin\theta_A \sin\Omega t - ct\sin\theta\sin(\Omega t - \varphi), \\ z &= R_A\cos\theta_A + ct\cos\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

где θ, φ — постоянные интегрирования.

2. Исследование кривизны и кручения луча во вращающейся системе отсчета

Исследуем геометрические свойства этих лучей. Вычислим сначала их кривизну K и кручение χ. Из дифференциальной геометрии следует, что

$$K = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\ \boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}, \quad \chi = \frac{(\boldsymbol{r}'(t)[\boldsymbol{r}''(t)\ \boldsymbol{r}'''(t)])}{[\boldsymbol{r}'(t)\ \boldsymbol{r}''(t)]^2}, \tag{4}$$

где штрих означает производную по параметру t.

Подставляя соотношения (3) в первое из выражений (4), вычислим кривизну луча:

$$\begin{aligned} K = \Omega\Big\{&\Omega^4c^4t^4\sin^4\theta + 4\Omega^4c^3t^3R_A\sin^3\theta\sin\theta_A\cos\varphi + \\ &+ c^2t^2\sin^2\theta\Big[2\Omega^4R_A^2\sin^2\theta_A\big(1+2\cos^2\varphi\big) - \\ &- 6c\Omega^3R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi + \Omega^2c^2 + 3c^2\Omega^2\sin^2\theta\Big] + \\ &+ 2ct\Omega^2R_A\sin\theta_A\sin\theta\cos\varphi\Big[c^2(1+3\sin^2\theta) + \\ &+ 2\Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A - 6c\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi\Big] + 4c^4\sin^2\theta - \\ &- 4c^3\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi(1+2\sin^2\theta) - \\ &- 6c\Omega^3R_A^3\sin\theta\sin^3\theta_A\sin\varphi + \Omega^4R_A^4\sin^4\theta_A + \\ &+ c^2\Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A\big[1+3\sin^2\theta(1+3\sin^2\varphi)\big]\Big\}^{1/2} \times \\ &\times\Big\{\Omega^2c^2t^2\sin^2\theta + 2\Omega^2ctR_A\sin\theta\sin\theta_A\cos\varphi + \\ &+ \Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A - 2c\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi + c^2\Big\}^{-3/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Совершенно аналогично из второго выражения (4) можно получить кручение луча:

$$\begin{aligned} \chi = -c\Omega\cos\theta\Big\{&\Omega^2c^2t^2\sin^2\theta + 2\Omega^2ctR_A\sin\theta\sin\theta_A\cos\varphi + \\ &+ 6c^2\sin^2\theta + \Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A - 5c\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi\Big\} \times \\ &\times\Big\{\Omega^4c^4t^4\sin^4\theta + 4\Omega^4c^3t^3R_A\sin^3\theta\sin\theta_A\cos\varphi + \\ &+ c^2t^2\sin^2\theta\Big[2\Omega^4R_A^2\sin^2\theta_A\big(1+2\cos^2\varphi\big) - \\ &- 6c\Omega^3R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi + \Omega^2c^2 + 3c^2\Omega^2\sin^2\theta\Big] + \\ &+ 2ct\Omega^2R_A\sin\theta_A\sin\theta\cos\varphi\Big[c^2(1+3\sin^2\theta) + \\ &+ 2\Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A - 6c\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi\Big] + 4c^4\sin^2\theta - \\ &- 4c^3\Omega R_A\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi(1+2\sin^2\theta) - \\ &- 6c\Omega^3R_A^3\sin\theta\sin^3\theta_A\sin\varphi + \Omega^4R_A^4\sin^4\theta_A + \\ &+ c^2\Omega^2R_A^2\sin^2\theta_A\big[1+3\sin^2\theta(1+3\sin^2\varphi)\big]\Big\}^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из этих выражений следует, что $\chi = 0$ при $\theta = \pi/2$, а $K \neq 0$. Это означает, что в плоскостях, параллельных плоскости экватора, кручение равно нулю и лазерные лучи представляют собой плоские кривые. Кроме того, из выражений (3) следует, что лазерный луч, выходящий из полюсов ($\sin\theta_A = 0$) вдоль оси вращения Земли ($\sin\theta = 0$), представляет собой прямую линию. Во всех остальных случаях лазерный луч является пространственной кривой, имеющей отличные от нуля кривизну и кручение.

Рассмотрим асимптотику выражений (5)–(6) в ближайшей окрестности Земли (при $ct\sin\theta \ll 1$) и на большом удалении от нее (при $\Omega t\sin\theta \gg 1$). Так как для Земли $\Omega R_A \ll c$, то в первом случае имеем

$$K = \frac{2\Omega}{c}\Big\{\sin^2\theta - \frac{\Omega R_A}{c}\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi(1+2\sin^2\theta) +$$

$$+\frac{\Omega^2R_A^2}{4c^2}\sin^2\theta_A\left[1+3\sin^2\theta(1+3\sin^2\varphi)\right]\Bigg\}^{1/2}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{2\Omega R_A}{c}\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi+\frac{\Omega^2R_A^2}{c^2}\sin^2\theta_A\right\}^{-3/2},$$

$$\chi=-\frac{\Omega\cos\theta}{4c}\times$$
$$\times\left\{6\sin^2\theta-\frac{5\Omega R_A}{c}\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi+\frac{\Omega^2R_A^2}{c^2}\sin^2\theta_A\right\}\times$$
$$\times\Bigg\{\sin^2\theta-\frac{\Omega R_A}{c}\sin\theta\sin\theta_A\sin\varphi(1+2\sin^2\theta)+$$
$$+\frac{\Omega^2R_A^2}{4c^2}\sin^2\theta_A\left[1+3\sin^2\theta(1+3\sin^2\varphi)\right]\Bigg\}^{-1}.$$

Из этих выражений следует, что в окрестности Земли при заданном значении угла θ_A кривизна и кручение лазерного луча существенно зависят от угла θ. В частности, при $\theta=\pi/2$ асимптотически главная часть кривизны луча $K=2\Omega/c$ пропорциональна первой степени частоты Ω, в то время как при $\theta=0$ она квадратично зависит от Ω: $K=\Omega^2R_A\sin\theta_A/c^2$.

При $\Omega t\sin\theta\gg 1$ выражения (5) и (6) дают

$$K=\frac{1}{ct\sin\theta},\quad \chi=-\frac{\cos\theta}{\Omega c^2t^2\sin^2\theta}.$$

Таким образом, по мере удаления от Земли кривизна и кручение лазерного луча стремятся к нулю.

3. Вычисление разности между длиной луча и геометрическим расстоянием

Вычислим теперь длину луча, соединяющего лазерную станцию (точка $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_A$) с некоторой точкой $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_B=\{x_B,y_B,z_B\}$ во вращающейся системе отсчета:

$$L=\int\limits_0^{t^*}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt, \tag{7}$$

где t^* — время, необходимое лазерному импульсу для распространения по лучу из точки $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_A$ в точку $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_B$.

Момент времени t^* можно определить, если подставить в выражения (3) $x=x_B$, $y=y_B$, $z=z_B$, $t=t^*$. Комбинируя полученные выражения, несложно установить, что

$$\begin{aligned}&ct^*\sin\theta\cos\varphi=x_B\cos\Omega t^*-y_B\sin\Omega t^*-R_A\sin\theta_A,\\&ct^*\sin\theta\sin\varphi=x_B\sin\Omega t^*+y_B\cos\Omega t^*,\\&ct^*\cos\theta=z_B-R_A\cos\theta.\end{aligned}\tag{8}$$

Возводя правые и левые части этих равенств в квадраты и складывая их, приходим к трансцендентному уравнению относительно t^*:

$$c^2t^{*2}=R_{AB}^2+2y_BR_A\sin\theta_A\sin\Omega t^*+ +2x_BR_A\sin\theta_A[1-\cos\Omega t^*], \tag{9}$$

где $R_{AB}^2=(x_B-R_A\sin\theta_A)^2+y_B^2+(z_B-R_A\cos\theta_A)^2$.

В общем случае это уравнение при заданных значениях Ω, R_A, x_B, y_B и z_B может быть решено только численно. Поэтому и длину луча в общем случае можно определить только численно. Однако если точка A расположена в ближайщей окрестности Земли, то $\Omega t^*\ll 1$ и уравнение (9) может быть решено приближенно:

$$ct^*\approx\frac{\Omega R_Ay_B}{c}\sin\theta_A+ +R_{AB}\left[1+\frac{\Omega^2R_Ax_B}{2c^2}\sin\theta_A+\frac{\Omega^2R_A^2y_B^2}{2c^2R_{AB}^2}\sin^2\theta_A\right]. \tag{10}$$

В этом приближении выражение (7) дает

$$\begin{aligned}L=ct^*\Bigg\{1&-\frac{\Omega R_A}{c}\sin\theta_A\sin\theta\sin\varphi+\\&+\frac{\Omega^2R_A^2}{2c^2}\sin^2\theta_A\left[1-\sin^2\theta\sin^2\varphi\right]+\\&+\frac{\Omega^2R_At^*}{2c}\sin\theta_A\sin\theta\cos\varphi+\\&+\frac{\Omega^2t^{*2}}{6}\sin^2\theta+O\left(\Omega^3t^{*3}\right)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{11}$$

Разлагая соотношения (8) по малому параметру Ωt^* с квадратичной точностью и выражая из них $\sin\theta\cos\varphi$ и $\sin\theta\sin\varphi$, а также учитывая (10), формулу (11) приведем к виду

$$L=R_{AB}+\frac{\Omega^2R_{AB}}{6c^2}\left[(x_B-R_A\sin\theta_A)^2+y_B^2\right].$$

Таким образом, длина луча L, соединяющего лазерную станцию с космическим аппаратом, находящимся в окрестности Земли в точке $\boldsymbol{R}_B$, отличается от геометрического расстояния R_{AB} на величину

$$\Delta L=\frac{\Omega^2R_{AB}}{6c^2}\left[(x_B-R_A\sin\theta_A)^2+y_B^2\right].$$

Заключение

Оценим величину разности ΔL между длиной луча, соединяющего лазерную станцию с космическим аппаратом, и геометрическим расстоянием при лазерной локации околоземных космических аппаратов.

Для низкоорбитальных космических аппаратов ($R_{AB}\sim 10^4$ км) величина разности $\Delta L\sim 10^{-4}$ см, в то время как для высокоапогейных космических аппаратов серии «Спектр» ($R_{AB}\sim 4\cdot 10^5$ км) величина разности $\Delta L\sim 5$ см. Поэтому для обеспечения точности измерения расстояния $\delta L\sim 1$ см при лазерной локации Луны и космических аппаратов серии «Спектр» эффект неинерциального движения лазерной станции необходимо учитывать.

Таким образом, проведенное исследование показало, что лучи лазерных станций можно считать прямыми линиями только при локации низкоорбитальных космических аппаратов; при локации высокоорбитальных космических аппаратов необходимо учитывать наличие у лучей кривизны и кручения, которые искажают результаты измерения расстояния между лазерной станцией и космическим аппаратом.

Список литературы

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теория поля. М., 1988.
2. *Nordtvedt K.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **61**. P. 2647.
3. *Kopeikin S.M.* // Phys. Rev. Lett. 2007. **98**. P. 229001.

4. *Soffel M., Klioner S., Müller J., Biskupek L.* // Phys. Rev. D. 2008. **78**. P. 024033.
5. *Денисов М.М., Зубрило А.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2007. № 2. С. 64.
6. *Денисов М.М., Зубрило А.А.* Основы математической модели слабонеинерциальной системы отсчета. Препринт НИИЯФ МГУ № 2005-6/772. 2005.
7. *Игнатенко Ю.В., Тряпицын В.Н., Игнатенко И.Ю.* // Тез. докл. Третьей Украинской конференции по перспективным космическим исследованиям. Кацивели, 2003. С. 172.
8. Глонасс — принципы построения и функционирования / Под ред. А. И. Петрова, В. Н. Харисова. 3-е изд., перераб. М., 2005.
9. *Денисов М.М.* // Математическое моделирование. 2008. **20**, № 6. С. 57.

Investigation of propagation of the laser impulse in the rotating frame of reference

M. M. Denisov[1], **A. A. Zubrilo**[2,a]

[1] *Moscow State Aviation Technology Institute — Russian State Technological University. Orshanskaya, 3, Moscow, 121552, Russia.*
[2] *D. V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics (MSU SINP), M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.*
E-mail: [a] *zbr@srd.sinp.msu.ru*

The calculation of curvature and torsion of a laser ray in the rotating frame of reference are carried out. It is shown that the length of the ray between some two points of rotating frame of reference is differ from geometrical distance on the value, which must be taken into account in laser rangin high apogee spacecrafts.

Keywords: mathematical model, laser ray, rotating frame of reference.
PACS: 02.60.Cb, 42.15.Dp.
Received 1 April 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторах

1. Денисов Михаил Михайлович — канд. техн. наук, доцент; тел.: (495) 939-18-64.
2. Зубрило Александр Андреевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-18-64, e-mail: zbr@srd.sinp.msu.ru.