

Информационный анализ квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе

Д. Н. Янышев^a, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^ayanyshev@physics.msu.ru, ^bzadkov@phys.msu.ru

Статья поступила 12.07.2009, подписана в печать 28.08.2009

Концепция перепутывающего квантового измерения продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение эксперименте по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома [1]. Выполнен квантово-информационный анализ данного эксперимента. Продемонстрирован механизм передачи информации в схеме невозмущающего измерения в случае классического и квантового формализма и показано, что результаты в обоих случаях совпадают. Это является следствием копирования классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний в квантовом объекте.

Ключевые слова: квантовая теория измерений, перепутанные состояния, квантовое невозмущающее измерение.

УДК: 530.145, 525.1. PACS: 03.65.Ta, 42.50.Dv.

Введение

В связи с быстрым прогрессом в последние годы методов обработки, хранения и передачи квантовой информации [2] произошло существенное переосмысление целого ряда основ традиционной квантовой механики и квантовой физики, приведшее, в частности, к переосмыслению понятия квантового измерения, когда традиционное определение квантового измерения [3, 4] как установления однозначного соответствия между собственными состояниями измеряемой переменной квантового объекта и показаниями квазиклассического прибора не соответствует современному пониманию роли квантовых эффектов в физическом эксперименте. Наряду с проблемой одномоментного извлечения из квантовой системы информации непосредственно в классической форме в задачах, где используются специфические особенности квантовой информации, центральной является проблема ее преобразования из одной формы в другую, в то время как ее деквантование не является обязательным и, наоборот, во многих случаях практическая ценность преобразования связана именно с сохранением когерентных свойств квантовых состояний.

Одной из привлекательных с физической точки зрения является концепция т.н. *квантовых невозмущающих измерений* [5–7]. Как показано в [8, 9], само понятие невозмущающего квантового измерения, будучи введено в более общей форме *перепутывающего* измерения, на самом деле может рассматриваться безотносительно к степени потери квантовой когерентности, т.е. степени деквантования показаний прибора (и одновременно объекта) в реализуемом в результате измерения отображении $|k\rangle_A \rightarrow |k\rangle_A |k\rangle_B$ измеряемых квантовых состояний объекта $|k\rangle_A$ в состояния системы объект–прибор $|k\rangle_A |k\rangle_B$. Даже в случае полностью когерентного — чисто квантового представления результирующей информации — наиболее фундаментальное качество классической информации, связанной с индексами k в этом измерении, тем не менее адекват-

но представлено. Оно отображается принадлежностью информационного индекса k сразу к двум различным физическим системам A и B , т.е. фактом копирования и размножения классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний $|k\rangle_A$ в начальном квантовом ансамбле объекта.

Описанная выше концепция квантового измерения может быть продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение примере невозмущающего квантового измерения наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома, который был реализован в эксперименте [1] (рис. 1). В нем пробный атом (A) выполняет полностью когерентное перепутывающее измерение начального состояния числа квантов резонаторной моды (C). Это состояние далее деквантуется в результате излучения атомом фотона, фиксируемого затем фотодетектором (D). Состояние последнего является результатом измерения в традиционной полностью деквантованной форме. Перепутывающее же измерение наиболее общего вида соответствует промежуточному во времени состоянию системы атом–фотон–детектор, когда излученный квант еще полностью не поглотился и соответствующая квантовая переменная этой составной системы, переносящая информацию об измеренном числе квантов резонатора, реализует перепутанное измерение с промежуточной степенью когерентности.

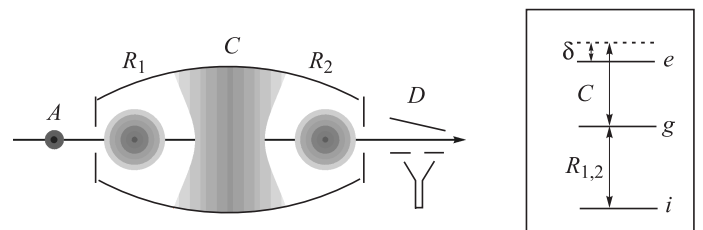


Рис. 1. Схема эксперимента по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона (C) в резонаторе с помощью пробного атома (A), пролетающего через резонатор

Учитывая важность данного эксперимента и его тесную связь с проблематикой обработки квантовой информации, в настоящей работе выполнен информационный анализ квантовых каналов связи, соответствующих данному эксперименту, а именно рассчитана классическая информация Шеннона, применимая к классическому каналу *число квантов резонатора — отсчеты фотодетектора* и квантовая когерентная информация, применимая к квантовому каналу *квантовые состояния резонатора — квантовые состояния атома*.

1. Модель квантового невозмущающего измерения

Для изучения процесса квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе нами была исследована принципиальная схема эксперимента [1]. В ней в качестве прибора выступает пробный атом (A), который рассматривается в простейшей трехуровневой модели. В эксперименте пробный атом пролетает через резонатор C , частота моды которого квазирезонансна переходу $e \leftrightarrow g$ атома. При этом в точках R_1 и R_2 атом подвергается действию вспомогательных импульсов излучения с частотой, квазирезонансной частоте перехода атома ω_{ig} . Процесс измерения состоит из четырех этапов: подготовки атома в определенном состоянии (взаимодействие атома с полем вспомогательного импульса излучения), далее с полем резонатора, измерения состояния после взаимодействия со вторым вспомогательным импульсом и детектирования. Дадим математическое описание этих процессов.

Прежде всего определим структуру пространства состояний $H_A \otimes H_C$ системы атом (A)–резонатор (C) [10]. Для этого определим следующий базис:

$$\begin{pmatrix} |1\rangle_a |0\rangle_c \\ |1\rangle_a |1\rangle_c \\ |2\rangle_a |0\rangle_c \\ |2\rangle_a |1\rangle_c \\ |3\rangle_a |0\rangle_c \\ |3\rangle_a |1\rangle_c \end{pmatrix} \quad (1)$$

по трем возможным состояниям атома (индексы a) и двум состояниям резонатора (есть фотон, или нет в резонаторе; индексы c). В случае если атом находился в нижнем состоянии $|1\rangle_a$ и в резонаторе есть один фотон, т.е. состояние резонатора $|1\rangle_c$, при облучении атома первым вспомогательным ϕ_1 -импульсом излучения получим следующее состояние системы:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i \sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для первого этапа — подготовки атомов в состоянии, необходимом для проведения процесса измерения — используется вспомогательный импульс излучения (R_1), частота которого настроена на частоту перехода $i \leftrightarrow g$ атома. Если время взаимодействия соот-

ветствует $\pi/2$ -импульсу, то атом перейдет в состояние $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. В матричном виде это можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_1 \cos(\phi_1/2) - ic_3 \sin(\phi_1/2) \\ c_2 \cos(\phi_1/2) - ic_4 \sin(\phi_1/2) \\ c_3 \cos(\phi_1/2) - ic_1 \sin(\phi_1/2) \\ c_4 \cos(\phi_1/2) - ic_2 \sin(\phi_1/2) \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $t_1 = \phi_1/\omega_{ig}$ — время взаимодействия атома с полем первого вспомогательного импульса излучения (R_1), а начальное состояние системы есть вектор $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ в базисе (1). Если в резонаторе нет фотона, что соответствует состоянию резонатора $|0\rangle_c$, получим следующее состояние системы:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i \sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Второй этап — взаимодействие пробного атома с полем резонатора. Частота фотона в резонаторе соответствует частоте атомного перехода $g \leftrightarrow e$, а δ будем здесь полагать равной нулю. При этом состояние системы будет иметь вид

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i \cos(\phi_2/2) \sin(\phi_1/2) \\ -\sin(\phi_2/2) \sin(\phi_1/2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $t_2 = \phi_2/\omega_{eg}$ — время взаимодействия атома с полем резонатора, а $\delta = 0$. Для случая, когда $\phi_2 = 2\pi$, получим

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ i \sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Если частота фотона в резонаторе отстроена на величину δ от частоты перехода $g \leftrightarrow e$ пробного атома, получим более сложное состояние системы, описывае-

мое следующим образом:

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i \sin(\phi_1/2) \left(-\frac{e^{(1/2)(2i\pi\delta - \kappa)t_2}(-2i\pi\delta - \kappa)}{2\kappa} + \frac{e^{(1/2)(2i\pi\delta + \kappa)t_2}(-2i\pi\delta + \kappa)}{2\kappa} \right) \\ -i \sin(\phi_1/2) \left(\frac{ie^{(1/2)(2i\pi\delta - \kappa)t_2}\phi_2}{2\kappa t_2} - \frac{ie^{(1/2)(2i\pi\delta + \kappa)t_2}\phi_2}{2\kappa t_2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\kappa = \sqrt{-4\pi^2\delta^2 - \phi_2^2/t_2^2}$. Если фотон в резонаторе отсутствует, то, естественно, состояние системы не изменится и останется таким же, как и в (4).

Третий этап в эксперименте аналогичен первому этапу, т.е. пробный атом подвергается воздействию поля второго вспомогательного импульса излучения (R_2) с частотой, резонансной частоте атомного перехода $i \leftrightarrow g$. Если время взаимодействия атома с полем $t_1 = \phi_1/\omega_{ig}$ и в резонаторе есть фотон, то атом перейдет в состояние

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2)^2 - \cos(\phi_2/2) \sin(\phi_1/2)^2 \\ 0 \\ -i \cos(\phi_1/2) \sin(\phi_1/2) - \\ -i \cos(\phi_1/2) \cos(\phi_2/2) \sin(\phi_1/2) \\ - \sin(\phi_2/2) \sin(\phi_1/2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если в резонаторе не было фотона, состояние системы будет иметь вид

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1/2)^2 - \sin(\phi_1/2)^2 \\ 0 \\ -i \cos(\phi_1/2) \sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, если $\phi_1 = \pi/2$ и $\phi_2 = 2\pi$, а $\delta = 0$, получим при наличии или отсутствии единичного фотона в резонаторе состояние системы, равное

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

соответственно. Из (10) следует, что при $\delta = 0$ и при выполнении условий $\phi_1 = \pi/2$ и $\phi_2 = 2\pi$ атом пе-

реводится в состояние i или g — в зависимости от того, есть фотон в резонаторе или нет. Причем после такого измерения фотон остается в резонаторе, если присутствовал до взаимодействия, или отсутствует в противоположном случае, т.е. состояние пробного атома после измерения определяется результатом квантового невозмущающего измерения наличия фотона в резонаторе.

Последний, **четвертый этап** соответствует классическому деквантованию квантовой информации при ее измерении классическим детектором (D), что детально описано в работе [1].

2. Классический информационный анализ

2.1. Расчет условной вероятности события измерения

В качестве критерия оценки объема извлекаемой в нашем эксперименте информации для единичного акта измерения наличия/отсутствия фотона в резонаторе с помощью пробного атома будем использовать количество информации, задаваемое формулой Шеннона, которая определяется как информационная энтропия, служащая мерой неопределенности сообщений данного источника (сообщения описываются множеством величин x_1, x_2, \dots, x_n и соответствующих вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n появления величин x_1, x_2, \dots, x_n в сообщении). Для определенного (дискретного) статистического распределения вероятностей p_k *информационной энтропией* или *информацией Шеннона* (классической информацией) называют величину

$$I_{sh} = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \quad (11)$$

при условии $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. В нашем случае мы имеем условную вероятность события измерения, которую можно представить следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_c |\psi_3[4]|^2 & (1 - p_c) |\psi_4[3]|^2 \\ p_c (1 - |\psi_3[4]|^2) & (1 - p_c) (1 - |\psi_4[3]|^2) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где p_c — вероятность наличия фотона в резонаторе. Тогда информация Шеннона будет иметь вид

$$I_{sh} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \log_2 \left\{ \frac{p_{ij}}{\sum_{l=1}^2 p_{lj} \sum_{k=1}^2 p_{ik}} \right\} p_{ij}. \quad (13)$$

На рис. 2, а представлена зависимость классической информации от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $g \rightarrow e$. Из графика видно, что максимум достигается при нулевой отстройке и равен 1 биту. Знак частотной отстройки не влияет на результат, поэтому на рисунке приведена только положительная часть зависимости.

При изменении времени пролета атома через резонатор получается зависимость I_{sh} от безразмерного времени пролета атома через резонатор, показанная на рис. 2, б. Из графика видно, что максимум достигается при времени пролета, соответствующем 2π Раби-импульсу и равен 1 биту.

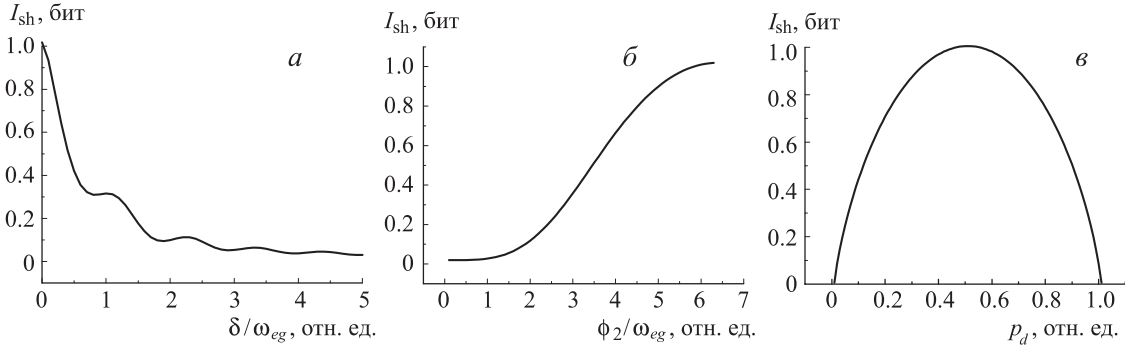


Рис. 2. Зависимость количества классической информации от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $e \rightarrow g$ (а), безразмерного времени пролета атома через резонатор (б) и от квантовой эффективности p_d детектора (в)

2.2. Учет квантовой эффективности детектора

Детектор может определять состояние атома g с некоторой вероятностью p_d . Для расчета количества информации, передаваемой детектором, составим матрицу условной вероятности определения состояния атома

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} (1 - p_d)|\psi_3[2]|^2 & p_d|\psi_3[4]|^2 & (1 - p_d)|\psi_3[6]|^2 \\ (1 - p_d)|\psi_4[1]|^2 & p_d|\psi_4[3]|^2 & (1 - p_d)|\psi_4[5]|^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Используя формулу Шеннона (13), для всех состояний из матрицы условной вероятности получим зависимость количества информации от квантовой эффективности p_d детектора, представленную на рис. 2, в.

3. Квантовый информационный анализ

3.1. Расчет когерентной информации в системе резонатор–атом с учетом наличия холостого атомного уровня

Преобразование в полной системе $H_A \otimes H_C$ с размерностями пространств $\dim H_A = 3$, $\dim H_C = 2$ в рассматриваемой модели является унитарным, так что преобразованное состояние является чистым и его волновая функция имеет вид

$$\Psi_t = U_{CA}(t)\Psi_0, \quad \Psi_0 = \psi_C \otimes |0\rangle_A, \quad (15)$$

где согласно стандартному предположению о структуре измерительного устройства (в данном случае пробного

атома) его начальное состояние предполагается пред-установленным.

Для информационной характеристики когерентной информации, содержащейся на выходе системы, необходимо учесть, что только два уровня $i_A = 1, 2$ атома используются для дальнейшей обработки измеренной квантовой информации. Последняя на выходе атома представлена в форме квантовой перепутанности с измеряемым объектом — атомом. Это означает, что информация, связанная с неинформативным уровнем $i_A = 3$ может быть отображена лишь в некогерентном виде, отображаемом операцией проектирования [11] на выходе атома на соответствующие двумерное и одномерное подпространства $\mathcal{P} = \hat{P}_{1+2} \odot \hat{P}_{1+2} + \hat{P}_3 \odot \hat{P}_3$.

Для функционала когерентной информации $I_c[\hat{\rho}_{CA}]$ [11], где $\hat{\rho}_{CA} = \mathcal{P}\Psi_t\Psi_t^+$ с учетом ортогональности слагаемых проектирования в \mathcal{P} имеет место очевидное соотношение

$$I_c = I_c[\hat{P}_{1+2}\Psi_t\Psi_t^+\hat{P}_{1+2}] + I_c[\hat{P}_3\Psi_t\Psi_t^+\hat{P}_3].$$

В нем второе слагаемое обращается в нуль, поскольку для него с учетом выражения $I_c = S[\hat{\rho}_A] - S[\hat{\rho}_{CA}]$ оба слагаемых данного выражения совпадают вследствие одномерности проектора. В результате в расчете остается только проекция волновой функции на двумерное подпространство информативных атомных состояний $\Psi_t^P = \hat{P}_{1+2}\Psi_t$, и выражение для когерентной информации приобретает простой вид

$$I_c = S[\text{Tr}_C \Psi_t^P \Psi_t^{P+}] - S[\Psi_t^P \Psi_t^{P+}]. \quad (16)$$

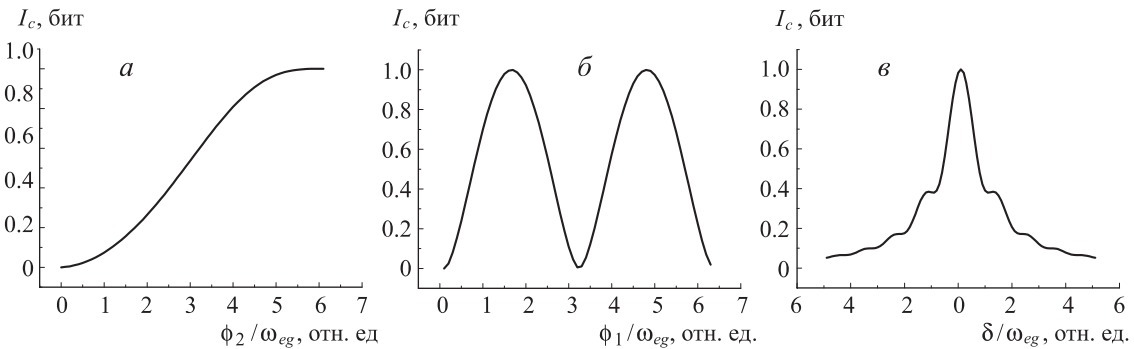


Рис. 3. Зависимость количества когерентной информации от безразмерного времени пролета атома через резонатор (а), безразмерного времени пролета атома через поле первого вспомогательного импульса (R_1) (б) и от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $e \leftrightarrow g$ (в)

Данное выражение модифицирует выражение для перепутанности с резонатором трехуровневого атома и совпадает с ним для случая, когда выходное состояние Ψ_f не содержит вклада уровня $|3\rangle_A$. При этом в общем случае последнее слагаемое не обращается в нуль из-за нарушения нормировки волновой функции Ψ_f^P .

3.2. Результаты расчета когерентной информации

С учетом выражения (16) мы можем построить зависимость когерентной информации от безразмерного времени пролета атома через резонатор, подобно тому как мы это делали в разделе 2.1. Данная зависимость представлена на рис. 3,а. Из графика видно, что максимум достигается при времени пролета, соответствующем 2ϕ -импульсу, и равен 1 биту.

Используя результаты проведенных расчетов, мы можем проследить за зависимостью когерентной информации I_c от безразмерного времени пролета атома через поле первого вспомогательного импульса излучения (R_1) (рис. 3,б), откуда видно, что максимум достигается в точках $\pi/2$ и $3\pi/2$, что соответствует $\phi/2$ -импульсу.

При отстройке частоты моды резонатора от резонансной частоты перехода пробного атома $e \leftrightarrow g$ происходит уменьшение количества передаваемой когерентной информации при увеличении отстройки (рис. 3,в).

Заключение

Концепция предложенного нами ранее перепутывающего квантового измерения продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение эксперименте по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома [1]. Выполнен квантово-информационный анализ данного

эксперимента. Продемонстрирован механизм передачи информации в схеме невозмущающего измерения в случае классического и квантового формализма и показано, что результаты в обоих случаях совпадают. Это является следствием копирования классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний в квантовом объекте.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (Роснаука) (госконтракт 02.740.11.0223).

Список литературы

1. *Nogues G., Rauschenbeutel A., Osnaghi S. et al. // Nature. 1999. 400. P. 239.*
2. *Боумейстер Д., Экерт А., Цайлинггер А.* Физика квантовой информации: Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления. М., 2002.
3. *Neumann J. von.* Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton, 1955.
4. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М., 1989.
5. *Quantum Theory and Measurement / Ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek.* Princeton, 1983.
6. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya. // Rev. Mod. Phys. 1996. 68, N 1. P. 1.*
7. *Grangier P., Levenson J.A., Poizat J.-P. // Nature. 1998. 396. P. 537.*
8. *Grishanin B.A., Zadkov V.N. // Phys. Rev. A. 2003. 68. P. 022309.*
9. *Grishanin B.A., Zadkov V.N. // Laser Phys. Lett. 2005. 2, N 2. P. 106.*
10. *Cohen-Tanoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G.* Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics. N. Y.: Wiley-Interscience, 1989.
11. *Grishanin B.A., Zadkov V.N. // Phys. Rev. A. 2000. 62. P. 032303.*

Information analysis of quantum non-demolition measurement of a photon in resonator

D. N. Yanyshev^a, **B. A. Grishanin**, V. N. Zadkov^b

Department of General Physics and Wave Processes, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^ayanyshev@physics.msu.ru, ^bzadkov@phys.msu.ru

A concept of quantum entangled measurement is demonstrated on example of fundamental value of the experiment on quantum non-demolition measurement of a photon in the resonator with the help of a probe atom [1]. The quantum information analysis of this experiment is presented and the information transmission mechanism in the non-demolition measurement scheme is investigated in both classical and quantum formalism. It is shown that the results in both cases are the same, which is due to the copying of classical part of the initial quantum information that is related to the set of quantum object states.

Keywords: quantum theory of measurements, entangled states, quantum non-demolition measurement.

PACS: 03.65.Ta, 42.50.Dv.

Received 12 July 2009.

English version: Moscow University Physics Bulletin 6(2009).

Сведения об авторах

1. Янышев Денис Николаевич — мл. науч. сотр.; тел.: (495) 939-39-79, e-mail: yanyshev@physics.msu.ru.

2. Гришанин Борис Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доцент.

3. Задков Виктор Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, зам. декана; тел.: (495) 939-23-71, e-mail: zadkov@phys.msu.ru.