Оптимальное комплексирование резонансных гравитационных антенн

А. В. Гусев[a], В. Н. Руденко[b]

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ). Россия, 119991, Москва, Университетский просп., д. 13.
E-mail: [a]avg@sai.msu.ru, [b]rvn@sai.msu.ru

Статья поступила 22.05.2009, подписана в печать 06.07.2009

Разработана новая по отношению к схеме совпадений методика комплексирования (объединения) резонансных гравитационных антенн, основанная на совместной системе обнаружения и оценивания параметров векторного гравитационного сигнала при наличии импульсных псевдогравитационных помех. Биения между компонентами гравитационных и псевдогравитационных сигналов учитываются минимаксным правилом обнаружения.

Ключевые слова: резонансные гравитационные антенны, векторный сигнал, импульсные шумы, оптимальное комплексирование.

УДК: 519.246; 524. PACS: 95.30.Sf, 95.85.Sz, 07.05.Kf.

Введение

Глобальный характер гравитационного излучения на практике учитывается путем комплексирования (объединения) резонансных гравитационных антенн по схеме совпадений [1, 2]. Принцип действия селекции гравитационных импульсов по такой схеме состоит в следующем. Пусть состояние случайного векторного процесса на выходе двух резонансных гравитационных антенн определяется параметром $\lambda = (0, 1)$: $\lambda = 1$ для гравитационных и $\lambda = 0$ для псевдогравитационных сигналов. Тогда непараметрический алгоритм распознавания (разрешения, различения) гравитационных сигналов по схеме совпадений определяется следующим выражением:

$$\lambda = 1: \ |\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2| \leqslant \Delta_a, \quad |\widehat{\tau}_1 - \widehat{\tau}_2| \leqslant \Delta_\tau, \tag{1}$$

где $(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2)$ и $(\widehat{\tau}_1, \widehat{\tau}_2)$ — оценки неизвестных амплитуд a_1, a_2 и моментов возникновения τ_1, τ_2 импульсных сигналов в отдельных каналах антенной решетки, $\Delta_{a,\tau}$ — характеристики схемы совпадений. В противоположной ситуации принимается решение «сигнала нет», $\lambda = 0$.

Статистический анализ выходных сигналов гравитационных антенн по схеме совпадений можно рассматривать как комплексную систему *вторичной* обработки информации (КСВОИ [3, 4]) при объединении гравитационных антенн по «выходу». Оценка параметра состояния λ при КСВОИ осуществляется на основе результатов, полученных в процессе обнаружения и оценивания параметров скалярных импульсных сигналов в отдельных каналах антенной решетки. Глобальный характер гравитационного излучения учитывается только на стадии распознавания ($\lambda = 0 \cup 1$) гравитационного сигнала по схеме (1).

Оптимальная комплексная система обработки информации (КСОИ [4]) предполагает объединение гравитационных антенн по «входу». Такое комплексирование для резонансных гравитационных антенн с перекрывающимися диаграммами направленности осуществляется на основе оптимальной системы обнаружения и оценки параметров *векторного* квазидетерминированного сигнала.

Предлагаемая работа посвящена анализу оптимальной КСОИ в статистической задаче обнаружения гравитационных сигналов. Аддитивная помеха в небайесовской постановке представляет суперпозицию гауссовых шумов и редких псевдогравитационных сигналов. Неизвестные параметры псевдогравитационных сигналов — амплитуды и моменты возникновения — на выходах отдельных каналов рассматриваются как функционально независимые величины (аналог статистической независимости в байесовской постановке). Впервые подобная модель хаотических импульсных помех с высокой средней скважностью была использована в [5] при анализе оптимальной КСОИ в задаче распознавания гравитационных сигналов.

КСОИ: распознавание и обнаружение векторного гравитационного сигнала

Пусть $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^{\mathrm{T}}$ — случайный векторный процесс на выходе антенной решетки, образованной двумя резонансными гравитационными антеннами с перекрывающимися диаграммами направленности. Тогда при распознавании гравитационного сигнала, учитывая глобальный характер гравитационного излучения, имеем

$$\boldsymbol{x}(t) = \lambda \boldsymbol{s}(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{n}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t)\ s_2(t)]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t)\ u_2(t)]^{\mathrm{T}}$ — векторные гравитационный и псевдогравитационный сигналы, $\boldsymbol{n}(t) = [n_1(t)\ n_2(t)]^{\mathrm{T}}$ — аддитивный гауссов шум. В теории резонансных гравитационных антенн

$$s_i(t) = a g_{1,2}(t-\tau), \quad u_i(t) = a_i g_{1,2}(t-\tau_i), \quad i = 1, 2,$$

где $a, a_i \subseteq (-\infty, \infty)$ и $\tau, \tau_i \subseteq (0, T)$ — неизвестные амплитуды и моменты возникновения, $g_{1,2}(t)$ — импульсная характеристика линейного тракта отдельного канала. Неизвестные параметры a_1, a_2 и моменты возникновения τ_1, τ_2 псевдогравитационных сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в небайесовской постановке рассматриваются как неизвестные функционально независимые величины [5] (аналог статистической независимости при байесовском подходе).

Решающее правило при непараметрической модели априорной неопределенности определяется следующим выражением [2, 3]:

$$\lambda = 1\colon\ \widehat{z} = \widehat{z}_1 - \widehat{z}_2 \geqslant \ln C, \tag{3}$$

где C — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества; $\widehat{z}_1 = z_1(\boldsymbol{x}; \widehat{a}, \widehat{\tau}; \widehat{a}_1, \widehat{\tau}_1; \widehat{a}_2, \widehat{\tau}_2)$, $z_0(\boldsymbol{x}; a_1, \tau_1; a_2, \tau_2)$ — логарифм условного отношения правдоподобия случайного векторного процесса $\boldsymbol{x}(t)$ в состоянии $\lambda = (0, 1)$; $\widehat{a}, \widehat{\tau}$ и $\widehat{a}_{1,2}, \widehat{\tau}_{1,2}$ — максимально-правдоподобные оценки неизвестных параметров a, τ и $a_{1,2}$, $\tau_{1,2}$.

Первичная обработка выходных сигналов $x_i(t)$ резонансных гравитационных антенн осуществляется по схеме ОФ–СФ, где ОФ и СФ — обеляющий и согласованный фильтры. При фильтровом варианте гауссова приемника имеем [5]

$$\widehat{a} = \frac{H_0}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \quad \widehat{\tau} = t_{H_0}, \quad \widehat{a}_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{\sigma_{1,2}^2}, \quad \widehat{\tau}_{1,2} = t_{H_{1,2}}, \tag{4}$$

где H_i, t_{H_i} — величина и положение абсолютного максимума (наибольшего значения) случайного процесса $y_i^2(t)$; $i = 0, 1, 2$, $y_{1,2}(t)$ и $\sigma_{1,2}^2$ — случайные процессы и дисперсии гауссовых шумов на выходах оптимальных систем ОФ–СФ,

$$y_0(t) = y_1(t) + y_2(t). \tag{5}$$

Из (3), (4) при $C = 1$ находим оптимальное по критерию идеального наблюдателя решающее правило при распознавании гравитационного сигнала [5]

$$\lambda = 1\colon\ \frac{H_0}{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)} \geqslant \frac{H_1}{\sigma_1^2} + \frac{H_2}{\sigma_2^2}$$

или в эквивалентной форме

$$\lambda = 1\colon\ \frac{1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \sum_{i=1}^{2} \sigma_i^2 (\widehat{a}^2 - \widehat{a}_i^2) \geqslant 0. \tag{6}$$

Следовательно, при оптимальной КСОИ (6) по отношению к схеме совпадений (1) используется дополнительная информация о поведении случайного процесса $y_0(t)$ (5).

В статистической задаче обнаружения векторный случайный процесс $\boldsymbol{x}(t)$ на выходе антенной решетки определяется следующим выражением [3]:

$$\boldsymbol{x}(t) = \lambda \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{n}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

или в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}(t) = \lambda \boldsymbol{v}(t) + (1 - \lambda) \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{n}(t), \\ \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{u}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{7}$$

Из (2), (7) следует, что в небайесовской постановке обнаружение полезного сигнала $\boldsymbol{s}(t)$ может рассматриваться как статистическая задача распознавания квазидетерминированных векторных сигналов $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{u}(t)$, где $\boldsymbol{v}(t) = [s_1(t) + u_1(t)\ \ s_2(t) + u_2(t)]^{\mathrm{T}}$. Взаимное наложение (перекрытие) импульсных сигналов $s_i(t)$ и $u_i(t)$ приводит к появлению биений в отдельном канале, $i = 1, 2$.

Оценка неизвестных параметров в состоянии «сигнал есть»

Выражение (4) определяет максимально-правдоподобные оценки неизвестных параметров a, τ и a_i, τ_i при распознавании гравитационного сигнала. В статистической задаче обнаружения оценка этих параметров в состоянии «сигнал есть» $\lambda = 1$ значительно усложняется. Действительно, при фильтровом варианте гауссова приемника имеем

$$\begin{gathered} z_1 \simeq a y_0(\tau) + \sum_{i=1}^{2} a_i y_i(\tau_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sigma_i^2 A_i^2(\cdot), \\ A_i^2(\cdot) = a^2 + a_i^2 + 2 a a_i r_i(\delta t_i), \\ z_0 = z_1 \quad \text{при} \quad a = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $r_i(\cdot)$ — коэффициент корреляции аддитивной гауссовой помехи на выходе оптимальной системы ОФ–СФ, $\delta t_i = \tau - \tau_i$, $i = 1, 2$.

Максимально-правдоподобные оценки $\widehat{a}$ и $\widehat{a}_i$ неизвестных параметров a и a_i в (8) определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial a}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial z_1}{\partial a_i}\right)_0 = 0, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

где $(\,)_0 = (\,)_{a = \widehat{a},\ a_i = \widehat{a}_i}$.

Из (8) и (9) при $a = \widehat{a}$ и $a_{1,2} = \widehat{a}_{1,2}$ находим

$$z_1 \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[y_0(\tau) - \sum\limits_{i=1}^{2} y_i(\tau_i)\, r_i(\delta t_i)\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{2} \sigma_i^2 \left[1 - r_i^2(\delta t_i)\right]} + \sum_{i=1}^{2} \frac{y_i^2(\tau_i)}{\sigma_i^2} \right\}. \tag{10}$$

Пусть τ_i^* — время корреляции гауссовых шумов на выходах оптимальной системы ОФ–СФ: $r_i(\tau \geqslant \tau_i^*) \leqslant 0.05$, $i = 1, 2$. Тогда при отсутствии на интервале наблюдения $(0, T)$ биений в i-м канале антенной решетки имеем

$$s_i \times u_i = 0\colon\ r_i(\delta t_i) \simeq 0 \quad \text{или} \quad |\tau - \tau_i| \geqslant \tau_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Ситуация I: нет биений в обоих каналах. Из основной формулы (10) при отсутствии биений в обоих каналах антенной решетки, $r_{1,2}(\delta t_{1,2}) \simeq 0$, имеем: $a = \widehat{a}$, $a_{1,2} = \widehat{a}_{1,2}$ и $r_{1,2}(\cdot) \simeq 0$,

$$z_{1,\mathrm{I}} \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{y_0^2(\tau)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} + \frac{y_1^2(\tau_1)}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2(\tau_2)}{\sigma_2^2} \right\}.$$

Оптимизация этого выражения по неизвестным параметрам τ и τ_1, τ_2 дает

$$\widehat{\tau} = t_{H,0}, \quad \widehat{\tau}_1 = t_{H,1}, quad \widehat{\tau}_2 = t_{H,2} \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\widehat{z}_{1,\mathrm{I}} \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{H_0}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} + \frac{H_1}{\sigma_1^2} + \frac{H_2}{\sigma_2^2} \right\}. \tag{12}$$

Ситуация II: биения в одном из каналов. При наличии биений в i-м канале, $i = 1 \cup 2$, имеем: $r_i(\delta t_i) \neq 0$, $r_k(\delta t_k) \simeq 0$, $k \neq i$. В такой постановке при $a = \widehat{a}$, $a_{1,2} = \widehat{a}_{1,2}$ имеем

$$z_{1,\mathrm{II}} \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[y_0(\tau) - y_i(\tau_i) r_i(\delta t_i)\right]^2}{\sigma_i^2 \left[1 - r_i^2(\delta t_i)\right] + \sigma_k^2} + \sum_{i=1}^{2} \frac{y_i^2(\tau_i)}{\sigma_i^2} \right\}. \tag{13}$$

В ситуации II влияние биений на оценку параметров гравитационного сигнала оказывается максимальным при $r_i(\delta t_i) \simeq 1$, $\tau \simeq \tau_i$. При $\delta t_i = 0$, учитывая (13), находим нижнюю границу логарифма отношения правдоподобия $\widehat{z}_{1,\mathrm{II}}$:

$$\min_{r_i(\cdot)\subseteq(0,1)} \widehat{z}_{1,\mathrm{II}} = \widehat{z}^*_{1,\mathrm{II}} \simeq \frac{1}{2}\left(H_{\chi^2} + \frac{H_k}{\sigma_k^2}\right), \quad k \neq i,$$

где H_{χ^2} — абсолютный максимум случайного процесса

$$\chi^2(t) = \frac{y_1^2(t)}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2(t)}{\sigma_2^2}, \quad t \subseteq (0, T).$$

КСОИ в задаче обнаружения гравитационных сигналов

Достаточные статистики в состоянии $\lambda = 0$ при обнаружении и распознавании гравитационных сигналов совпадают. Поэтому в небайесовской постановке имеем [5]

$$\widehat{z}_0 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{\sigma_1^2} + \frac{H_1}{\sigma_1^2}\right). \qquad (14)$$

Решающее правило (3) и достаточные статистики $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_0$ (12), (14) определяют оптимальную структуру КСОИ при обнаружении гравитационного сигнала в типичной для реального эксперимента ситуации I «биений нет»:

$$\widehat{z}_{\mathrm{I}} = \widehat{z}_{1,\mathrm{I}} - \widehat{z}_0 \simeq \frac{H_0}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, при условии

$$|t_{H,0} - t_{H,i}| \geqslant \tau_i^*, \quad i = 1, 2, \qquad (15)$$

оптимальная КСОИ осуществляется по гауссовой (оптимальной при гауссовых шумах) схеме, $H_0 = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} y_0^2(t)$.

При наличии биений условие (15) нарушается. В ситуации II «биения в i-м канале» $i = 1 \cup 2$ *минимаксное* правило обнаружения определяется следующим выражением:

$$\lambda = 1\colon \widehat{z}^*_{\mathrm{II}} = \widehat{z}^*_{1,\mathrm{II}} - \widehat{z}_0 \simeq \frac{y_k^2(t_{H,\xi})}{2\sigma_k^2} \geqslant \ln C, \quad k \neq i. \qquad (16)$$

Основные результаты и выводы

Оптимальная по критерию максимального правдоподобия КСОИ при обнаружении гравитационного сигнала в ситуации I «биений нет» осуществляется по гауссовому (оптимальному при гауссовых шумах) алгоритму. Применение гауссовой схемы предполагает, что выполняется основное условие (15):

$$|t_{H,0} - t_{H,i}| \geqslant \tau_i^*, \quad i = 1, 2,$$

где (см. выше) $t_{H,0}$ и $t_{H,1}, t_{H,2}$ — положения абсолютных максимумов случайных процессов $y_0^2(t)$ и $y_1^2(t), y_2^2(t)$, $\tau_{1,2}^*$ — времена корреляции гауссовых шумов на выходе оптимальной системы ОФ–СФ в отдельных каналах.

В противоположной ситуации, для которой условие (15) не выполняется, необходимо учитывать появление биений между компонентами гравитационных и псевдогравитационных сигналов. Вероятность биений в обоих каналах оказывается достаточно малой. Поэтому наибольший интерес на практике представляет наличие биений в одном из каналов:

$$|t_{H,0} - t_{H,i}| \leqslant \tau_i^*, \quad i = 1 \cup 2,$$
$$|t_{H,0} - t_{H,k}| \leqslant \tau_k^*, \quad k = 1, 2, \quad k \neq i.$$

Минимаксное правило обнаружения (16) соответствует наименее благоприятной ситуации: $r_i(\delta t_i) \simeq 1$. Основным недостатком минимаксного подхода является то, что такая ситуация может значительно отличаться от реальной. Поэтому, учитывая экстремальные свойства оценок максимального правдоподобия, на практике целесообразно воспользоваться квазиоптимальной КСОИ, схема которой определяется выражениями (10), (11).

Список литературы

1. *Papa M.A.* // arXiv:0802.0936vI [gr-qc]. 7 Feb. 2008.
2. *Astone P., Babusci D., Baggio L.* et al. // Phys. Rev. D. 2007. **76**. P. 102001.
3. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием. М., 1983.
4. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
5. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 1. С. 70.

Optimal interconnecting of resonant gravitational antennas

A. V. Gusev[a], **V. N. Rudenko**[b]

P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: [a] avg@sai.msu.ru; [b] rvn@sai.msu.ru

The new scheme for the resonant gravitational antennas interconnecting is considered. This algorithm is based on the theory of combined detection and estimation of a vector gravitational signal at the pseudogravitational impulse background. The used minimax approach gives takes into account beats between gravitational and pseudo-gravitational signals.

Keywords: resonant gravitational antennas, vector signal, impulse noises, optimal interconnecting.
PACS: 95.30.Sf, 95.85.Sz, 07.05.Kf.
Received 22 May 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторах

1. Гусев Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-53-27, e-mail: avg@sai.msu.ru.
2. Руденко Валентин Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; зав. отделением; тел.: (495) 939-16-34, e-mail: rvn@sai.msu.ru.