ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Взаимодействие волн Кельвина и инерционных колебаний с литосферой в области океанского шельфа

С. А. Арсеньев[a], Н. К. Шелковников[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] arrsenyev@yandex.ru, [b] shelkovnikov@phys.msu.ru

Статья поступила 23.12.2009, подписана в печать 07.10.2009

Построена теория взаимодействия волн Кельвина с литосферой на наклонном шельфе.

Ключевые слова: шельф, волны Кельвина, инерционные колебания, приливы, микросейсмы, литосфера, деформации дна океана, сейсмическая томография.

УДК: 532.59 + 532.52 + 532.55. PACS: 91.10.Tq; 91.10.Vr; 91.30.Bi; 91.50.Bd.

Введение

Данные наблюдений, полученные в последнее время с помощью лазерных, кварцевых и других типов сейсмографов, показывают, что в спектрах мощности сейсмических колебаний присутствуют значимые спектральные пики, соответствующие суточным и полусуточным приливам [1–5]. Например, лазерные сейсмографы, установленные на берегу Японского моря [6], измеряют амплитуды смещений 7.0 мкм для суточного прилива и 8.7 мкм для полусуточного, что при базисе сейсмографа 52.5 м соответствует относительным деформациям $1.4 \cdot 10^{-7}$ и $1.7 \cdot 10^{-7}$ соответственно. Аналогичные измерения исследователей из США [4] дают значения амплитуд деформаций для суточной O_1 и полусуточной M_2 составляющих прилива: $1.2 \cdot 10^{-7}$ и $1.7 \cdot 10^{-7}$. В России, на станции Протвино в Московской области, амплитуды деформаций поверхности Земли составляют $9.4 \cdot 10^{-9}$ для полусуточной составляющей лунного прилива M_2 и $4.7 \cdot 10^{-9}$ для суточного лунного прилива O_1 [1]. Большие амплитуды приливных деформаций литосферы на океанском побережье объясняются, очевидно, силовым воздействием океанских приливов, нагружающих шельф. И действительно, имеется четкая корреляция между деформациями поверхности Земли и уровнем воды на шельфе [2]. В Англии в 80 км от побережья Северного моря амплитуда суточных и полусуточных составляющих сейсмических колебаний и их гармоник увеличивается на 20% за счет приливных колебаний уровня воды на шельфе [5]. У берега Японского моря этот эффект еще сильнее [2, 3]. Наряду с приливными волнами в спектрах сейсмических колебаний в этом районе обнаруживаются и инерционные колебания, возбуждаемые в океане резкими изменениями скорости и направления ветра [7].

Для корректной интерпретации наблюдений и инженерных расчетов необходима теоретическая модель взаимодействия литосферы с океаном в области шельфа. Задача построения такой модели решается в настоящей работе. Ранее установлено, что большая часть энергии приливных волн, бегущих по шельфу вдоль континентов, приходится на долю баротропных волн Кельвина [11, с. 308, 309]. Поэтому в настоящей работе мы сосредоточим внимание именно на этих волнах, открытых лордом Кельвином (Томпсоном) в 1879 г. [10]. Волны Кельвина могут иметь любую частоту, в том числе и частоту $\omega = f$, соответствующую инерционным колебаниям. Таким образом, полученные далее соотношения пригодны и для расчетов реакции литосферы на инерционные колебания в океане.

1. Волны Кельвина на наклонном шельфе

Направим ось y на север, ось x — на восток, а ось z — вертикально вниз. Начало координат $z = 0$ расположим на невозмущенной поверхности океана у берега, буквой ζ обозначим динамическое возмущение этой поверхности. Обозначим также буквой L ширину шельфа. Глубина шельфа возрастает при удалении от берега в сторону океана. Разумной аппроксимацией является линейный закон $H = D + my$, где D — глубина вблизи берега $(y = 0)$, $m = \partial H/\partial y = (H_m - D)/L$ — уклон шельфа и H_m — максимальная глубина шельфа на внешнем, океанском крае $(y = L)$. Считаем, что волновые движения носят характер захваченных шельфом длинных волн, т. е.

$$S_y = \int_0^H v\,dz = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, L, \tag{1}$$

где S_y — поперечная составляющая полного потока и v — поперечная (вдоль оси y) составляющая скорости течения. Рассмотрим уравнения теории мелкой воды, описывающие длинные волны в океане $(\lambda \gg H)$ [9, 11],

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} - f S_y = gH\frac{\partial \varsigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_y}{\partial t} + f S_x = gH\frac{\partial \varsigma}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y}. \tag{3}$$

Здесь $S_x = \int_0^H u\,dz$ — вдольбереговая составляющая полного потока, u — вдольбереговая (вдоль оси x) составляющая скорости течения и g — ускорение силы

тяжести. Комбинируя уравнения (2) и (3), находим уравнение для возмущения уровня ζ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\varsigma-\nabla(c_0^2\nabla\varsigma)\right]-gfJ(H,\varsigma)=0, \quad (4)$$

где $c_0=(gH)^{1/2}$ — лагранжева скорость длинных волн, ∇ — оператор набла и $J(H,\zeta)=(\partial H/\partial x)(\partial\zeta/\partial y)-(\partial H/\partial y)(\partial\zeta/\partial x)$ — дифференциальный оператор Якоби.

Величина $f=2\varpi_E\sin\psi$ в уравнениях (2) представляет собой первый параметр Кориолиса (ϖ_E — угловая скорость вращения Земли и ψ — широта). При изучении крупномасштабных движений океана и атмосферы с размерами, сравнимыми с радиусом Земли R, величину f обычно считают зависящей от широты, вводя приближение β-плоскости: $\beta=df/dy=(2\varpi_E\cos\psi)/R$ [11]. Это дает возможность исследовать движения в локальной декартовой системе координат, учитывая сферичность Земли условием $\beta\neq 0$. Учет β-эффекта позволяет легко получить, например, планетарные волны на вращающейся сфере или математически описать западную интенсификацию глобальных океанских течений (формирование Гольфстрима или Куросио). В настоящей работе величина f считается постоянной, так как суточные, полусуточные и смешанные приливы, изучаемые здесь, имеют длины волн λ порядка нескольких сотен километров и менее ($\lambda\ll R$). На данных масштабах от β-эффекта можно ожидать лишь возникновения слабого изменения скорости и формы волны, которые здесь несущественны.

Решив уравнение (4) и определив уровень ζ, мы можем с помощью уравнения гидростатики $g\rho=\partial p/\partial z$, которое справедливо для длинных ($\lambda\gg H$) волн, найти и давление в этих волнах

$$p=p^a+g\rho(z-\varsigma). \quad (5)$$

Кроме того, знание уровня ζ позволяет нам определить и полные потоки. Из уравнений (2), (3) находим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)S_x&=gH\left(\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t\partial x}+f\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\right),\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)S_y&=gH\left(\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t\partial y}-f\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\right).\end{aligned} \quad (6)$$

Знание полных потоков позволяет определить и средние (по глубине) скорости течения $\overline{u}=S_x/H$, $\overline{v}=S_y/H$. При отсутствии трения в уравнениях (2) средние $\overline{u}$, $\overline{v}$ и текущие u, v скорости течений совпадают.

Уравнение (4) необходимо решать с граничными условиями

$$\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t\partial y}-f\frac{\partial\varsigma}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad y=0,L, \quad (7)$$

которые следуют из (6) и (1). Решение (4) ищем в виде волны

$$\varsigma=\mathrm{Re}[a(y)]\exp[i(kx-\omega t+\varphi)], \quad (8)$$

где Re — действительная часть комплексного числа. Подставляя (8) в (4), получим уравнение для амплитуды волны

$$\left[1+s\left(\frac{y}{L}\right)\right]\frac{d^2y}{dy^2}+\frac{m}{D}\frac{da}{dy}+ +a\left\{\frac{(\omega^2-f^2)}{gD}-k^2\left[1+s\left(\frac{y}{L}\right)\right]+\frac{fmk}{\omega D}\right\}=0. \quad (9)$$

Здесь $s=mL/D$. Уравнение (9) известно в математической физике как уравнение конфлюэнтных гипергеометрических функций. Граничные условия (7) после подстановки (8) принимают вид

$$\frac{\partial a}{\partial y}+f\frac{ka}{\omega}=0 \quad \text{при} \quad y=0,L, \quad (10)$$

Будем считать, что выполнено условие $s\ll 1$. Тогда уравнение (9) можно с хорошей точностью аппроксимировать уравнением

$$\frac{d^2a}{dy^2}+\frac{m}{D}\frac{da}{dy}+a\left[\frac{(\omega^2-f^2)}{q^2}-k^2+\frac{fmk}{\omega D}\right]=0, \quad (11)$$

где $q=(gD)^{1/2}$ — скорость волн у береговой границы шельфа. Отметим, что мы пренебрегаем уклоном дна m только в тех членах (9), где он сравнивается с величинами, имеющими порядок единицы. Вторым слагаемым в (9) пренебрегать нельзя, так как он содержит производную. Нельзя отбрасывать и последний член в (9), так как в него входит частота ω.

Решение уравнения (11) легко находится:

$$a=\exp\left[-\frac{m}{2}\left(\frac{y}{D}\right)\right][c_1\cos(\delta y)+c_2\sin(\delta y)]. \quad (12)$$

Здесь величина δ определяется соотношением

$$\delta=\left[\frac{(\omega^2-f^2)}{q^2}-\left(k^2+\frac{m^2}{4D^2}\right)+\frac{fmk}{\omega D}\right]^{1/2}. \quad (13)$$

Для определения постоянных интегрирования c_1 и c_2 подставим (12) в условия (10). Образующаяся система двух уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель и соответствующий детерминант равны нулю. Данное условие приводит к дисперсионному соотношению

$$(\omega^2-f^2)(\omega^2-q^2k^2)\sin(\delta L)=0, \quad (14)$$

которое удовлетворяется для четырех типов волн, описываемых уравнениями теории мелкой воды (2). Это волны Кельвина, для которых $\omega=qk$, инерционные колебания с частотами $\omega=f$, топографические, планетарные волны (шельфовые волны) и волны Пуанкаре с $\sin\delta L=0$. Для волн Кельвина величина δ в (13) оказывается комплексной:

$$\delta=\frac{i}{\mathrm{Ro}}\left(1-\frac{\Pi}{2}\right), \quad (15)$$

где $\mathrm{Ro}=q/f$ — радиус деформации Россби и $\Pi=m\,\mathrm{Ro}/D$ — параметр влияния уклона дна. Легко показать, что в данном случае $c_1=\zeta_0$, $c_2=i\zeta_0$, где ζ_0 — заданное начальное значение уровня. Следовательно, решение (12) и (8) можно записать в виде

$$a=\zeta_0\exp[-(y/\mathrm{Ro})], \quad (16)$$

$$\varsigma=\varsigma_0\exp[-(y/\mathrm{Ro})]\cos(kx-\omega t+\varphi)]. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (6), находим скорости течений в волне Кельвина

$$u=\frac{q}{H}\varsigma, \quad v=0. \quad (18)$$

Полученное решение подобно классическому решению [10], в котором считается $s = 0$, так как рассматривается постоянная глубина $m = 0$. В настоящей работе показано, что это решение можно применять и для наклонных шельфов, для которых выполнено условие $s = mL/D \ll 1$. Для широких шельфов (например, у берегов Сибири и Австралии величина L составляет 1500 км) при уклонах $m \leqslant 10^{-6}$ и $D = 10$ м имеем $s \leqslant 0.15$, т.е. это условие выполняется. Для узких шельфов условие $s \ll 1$ может быть выполнено и при больших уклонах. У берегов Охотского и Японского морей величина L, например, составляет 10–50 км. Здесь при $D = 10$ м, $L = 10$ км условие $s \leqslant 0.1$ выполняется при $m \leqslant 10^{-4}$.

2. Упругое взаимодействие волн Кельвина с литосферой

Найдем давление на дно, оказываемое волной Кельвина (17), (18). Подставляя (17) в (5), получим при $z = H$

$$p^H = p^a + g\rho H - g\rho\zeta_0 \exp\left(-\frac{y}{\mathrm{Ro}}\right)\cos(kx - \omega t + \varphi).$$

Амплитуда переменной части давления $g\rho\zeta_0 \exp(-y/\mathrm{Ro})$ довольно быстро (экспоненциально) убывает в сторону океана от берега, где она максимальна и равна $p_{\max} = g\rho\zeta_0$. У берегов Охотского моря России величина максимального суточного прилива ζ_0 колеблется от 5.9 м на мысе Толстой в заливе Шелихова до 13.2 м в устье реки Пенжина, где в СССР собирались строить приливную электростанцию. Нетрудно подсчитать, что здесь величина $p_{\max}$ достигает 129 360 Па, что превышает нормальное атмосферное давление $p^a = 101\,325$ Па. Учитывая, что 1 кг-сила = 9.8 Н, находим, что колебания на дне шельфа Охотского моря от волн Кельвина могут достигать 13 т/м^2. По данным работы [8], колебания донного давления суточного периода могут прослеживаться в литосфере, состоящей из осадочных пород четвертичного возраста, до глубины 27 км. Таким образом, волны Кельвина можно использовать как естественный источник упругих волн, необходимый для сейсмической томографии коры Земли.

Найдем величину деформаций, соответствующую этим колебаниям давления. Для этого воспользуемся обобщенным законом Гука [12]

$$\sigma^e_{ij} = (1 - m_0)(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij} + \alpha_1 Kp\delta_{ij}). \qquad (19)$$

Здесь σ^e_{ij} — эффективные напряжения [12], m_0 — равновесная пористость осадочных пород, α_1 — коэффициент объемного сжатия твердой матрицы осадочных пород, $(1 - m_0)\lambda_1$ — первый коэффициент Ламэ пористой среды, $(1 - m_0)\lambda_2$ — второй коэффициент Ламэ, $K = \lambda_1 + (2\lambda_2/3)$ — модуль всестороннего сжатия, $e = e_{ij}\delta_{ij}$ — первый инвариант тензора деформаций e_{ij}. Из (19) легко найти

$$e_{zz} = \frac{\sigma^e_{zz}}{K(1 - m_0)} - \left(\frac{\alpha_1}{3}\right)p. \qquad (20)$$

Переменной части деформаций соответствует второй член в (20), т.е. вблизи дна

$$\tilde{e}_H = \frac{\alpha_1}{3} g\rho\varsigma_0 \exp\left(-\frac{y}{\mathrm{Ro}}\right)\cos(kx - \omega t + \varphi).$$

Максимальная амплитуда деформаций достигается вблизи берега ($y = 0$) в начале координат $x = 0$:

$$E = \frac{\alpha_1}{3} g\rho\zeta_0. \qquad (21)$$

Подставляя в (21) значения $g = 9.8$ м/с^2, $\rho = 1000$ кг/м^3 и $\zeta_0 = 12\mu$, находим $E = 4 \cdot 10^{-7}$. Относительную деформацию E можно представить в виде Δ/z, где Δ — абсолютная деформация, Z — базовое значение длины. Если деформация измеряется лазерным деформографом с плечом $Z = 52.2$ м [3, 6], то величина максимума абсолютной деформации, вызываемая волнами Кельвина с амплитудой $\zeta_0 = 12$ м, достигает 21 мкм.

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. Построена теория волн Кельвина и инерционных колебаний на континентальном или островном шельфе с глубиной, возрастающей в сторону открытого океана.

2. Определены колебания давления на дно, оказываемые волнами Кельвина. Показано, что величина амплитуды колебаний давления от волн Кельвина может достигать 13 т/м^2 и колебания давления суточного периода могут прослеживаться в литосфере, состоящей из осадочных пород четвертичного возраста, до глубины 27 км. Таким образом, волны Кельвина можно использовать как естественный источник упругих волн, необходимый для сейсмической томографии коры Земли.

3. Найдены формулы для расчетов колебаний деформаций дна, вызванных волнами Кельвина, которые проявляются на записях сейсмографов, установленных на берегах морей и океанов.

Список литературы

1. *Кармалеева Р.М.* // Физика Земли. 1999. № 5. С. 89.
2. *Алексеев А.В., Долгих Г.И., Ковалев С.И.* и др. // Доклады АН. 1999. **304**, № 4. С. 679.
3. *Долгих Г.И.* Исследование волновых полей океана и литосферы лазерно-интерференционными методами. Владивосток, 2000.
4. *Kuo J.J.* // J. Geophys. Res. 1969. **74**, N 6. P. 1635.
5. *Beavan R.J., Gently N.R.* // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1977. **48**. P. 293.
6. *Долгих Г.И., Долгих С.Г., Ковалев С.Н.* и др. // Физика Земли. 2009. № 8. С. 82.
7. *Долгих Г.И., Новотрясов В.В., Пермяков М.С.* // Доклады АН. 2003. **389**, № 4. С. 532.
8. *Арсеньев С.А., Шелковников Н.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 2. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 2006. N 2. P. 63).
9. *Арсеньев С.А., Шелковников Н.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 58 (Moscow University Phys. Bull. 2008. N 2. P. 140).
10. *Thompson W.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1879. **10**. P. 92.
11. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане: В 2 т. М., 1981.
12. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. М., 1996.

Interaction of Kelvin's waves and inertia oscillations with lithosphere on the ocean shelf

S. A. Arsenyev[a], **N. K. Shelkovnikov**[b]

Department of Marine and Inland Water Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: [a] *arrsenyev@yandex.ru,* [b] *shelkovnikov@phys.msu.ru*

The theory of the Kelvin's topographical waves and their interaction with lithosphere on an inclined shelf is constructed.

Keywords: shelf, Kelvin's waves, tides, microseisms, lithosphere, deformations of the ocean bottom, seismic tomography.
PACS: 91 10.Tq; 91.10.Vr; 91.30.Bi; 91.50.Bd.
Received 23 December 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторах

1. Арсеньев Сергей Александрович — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр.; тел.: (495) 911-34-09, e-mail: arrsenyev@yandex.ru
2. Шелковников Николай Константинович — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр.; e-mail: shelkovnikov@phys.msu.ru.