

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

**Распределение энергии в сильно возмущенной хаотической системе**

Ю. Е. Щадилова

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра квантовой электроники. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: <sup>a</sup>yes@shg.ru*

Статья поступила 04.03.2009, подписана в печать 07.09.2009

Для модели осциллятора Дуффинга, возмущенного сильным гармоническим полем и совершающего хаотическое движение, получено аналитическое выражение для распределения по энергии как функции амплитуды и частоты возмущения.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, хаос, осциллятор Дуффинга, распределение энергии.

УДК: 531.395. PACS: 05.45.-a.

Гамильтоновы нелинейные неавтономные системы общего вида, гамильтонианы которых  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  явно зависят от времени, а функция  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  сложнее квадратичного полинома по  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , можно разделить на два класса. Это системы, способные поглотить неограниченное количество энергии от источника внешней силы, хаотическое движение которых может быть инфинитно по действию (или по энергии), а также системы, у которых энергия вечно остается ограниченной. К первому классу относятся, например, ротор с  $\delta$ -толчками — механический прототип стандартного отображения [1] и модель стохастической ионизации атома водорода [2]. Ко второму классу относятся модели одномерных нелинейных осцилляторов с жесткой нелинейностью (частота собственных колебаний является возрастающей функцией энергии) во внешнем гармоническом поле [3] и модель Улама для стохастического ускорения Ферми [4]. В системах второго класса существуют стационарные функции распределения динамических величин. Задача аналитического описания таких функций представляет интерес, так как они позволяют определять зависимости моментов функций стохастической компоненты (например, среднее значение энергии) от параметров модели.

Целью настоящей работы является определение функции распределения  $P(E)$  по энергии для модели осциллятора Дуффинга во внешнем гармоническом поле большой амплитуды, заданной уравнением

$$\ddot{x} - x + x^3 = F \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $F > 1$ ,  $\omega \approx 1$ . Колебания осциллятора Дуффинга были впервые описаны в монографии [5]. Эта модель стала одной из центральных в теории нелинейных колебаний; новую жизнь модели дало открытие в ней хаотического движения [6], исследование которого активно продолжается до настоящего времени [7–10].

Под энергией  $E$  мы понимаем величину энергии невозмущенной системы  $E = \dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4$ , взятую в моменты времени  $t_n = \pi n / \omega$  ( $n$  — целое). В моменты  $t_n$  возмущение обращается в нуль.

Схожая задача была решена Либерманом и Лихтенбергом [11]. Эти авторы описали распределение

по скоростям  $w(u)$  для модели Улама — одномерного движения точки между двумя упруго отражающими ее стенками, одна из стенок осциллирует по периодическому закону. Распределение было получено, основываясь на малости изменения энергии за период поля, что позволило использовать для описания кинетики энергий модель энергетической диффузии. В моделях одномерных нелинейных осцилляторов с жесткой нелинейностью, например в модели осциллятора Дуффинга (1) в сильном поле, за период внешнего поля энергия может изменяться в десятки раз, что требует иного подхода.

Рассмотрим проекцию траектории частицы на стробоскопическое сечение Пуанкаре  $\{x; \dot{x}\}$  при фиксированных значениях частоты и амплитуды внешней силы (рис. 1). Точки заполняют большую часть области  $E(x, \dot{x}) < E_+$ , где  $E_+$  — максимально достижимое значение энергии системы. Поэтому примем для простоты, что они заполняют всю область, и притом равномерно, последнее вытекает из сохранения фазового объема. Это предположение, эквивалентное малости островков устойчивости в сравнении с хаотической компонентой, является главным ограничителем применимости нашего расчета. Теперь отыскание функции распределения по энергии сводится к вычислению зависимости  $E_+$  от параметров внешнего поля  $F$  и  $\omega$ . Заметим, что значение  $E_+$ , которое для нашей модели дает критерий перекрытия резонансов Чирикова [12], отличается от найденного при численном интегрировании системы (1) в десятки раз (например, при параметрах внешнего поля  $F = 2.5$ ,  $\omega = 1$  значение  $E_+$ , найденное численным интегрированием, равно 10.5, использование критерия перекрытия резонансов Чирикова приводит к значению 1.5).

При больших значениях энергии  $E \geq 1$  движение невозмущенного осциллятора Дуффинга слабо ангармонично — отношение амплитуд третьей и первой гармоник составляет лишь несколько процентов (например, при начальных условиях  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 4$ , которые соответствуют энергии  $E = 8$ , это отношение равно 0.058). Поэтому в низшем приближении движение может быть

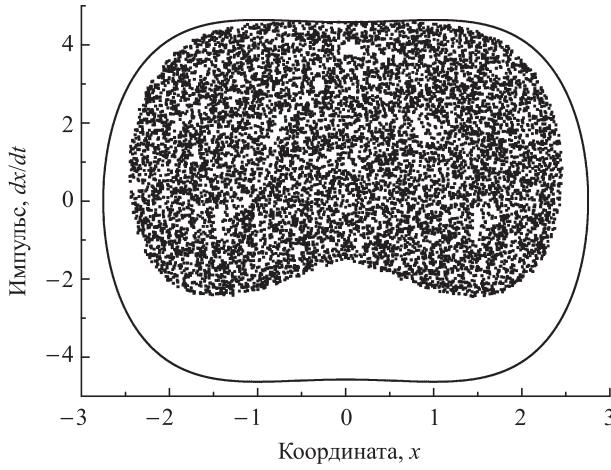


Рис. 1. Стробоскопическое отображение фазовой траектории осциллятора Дуффинга (1) на плоскость  $\{x; \dot{x}\}$  при параметрах внешней силы  $F = 2.5$ ,  $\omega = 1$ . Сплошная линия — граница области фазового пространства, доступной при энергиях системы, не превосходящих  $E_+$ .

описано гармоническим законом  $x(t) = A \cos \Omega t$ . В области  $E \geq 1$  амплитуда  $A$  и частота  $\Omega$  слабо зависят от энергии:  $A \propto \Omega \propto E^{1/4}$ . Эта слабая зависимость позволяет считать амплитуду и частоту в возмущенной системе медленными функциями времени и представить ее движение в виде

$$x(t) = A(E(t)) \cos \left( \int_0^t \Omega(E(t')) dt' + \varphi_0 \right) = \\ = A(t) \cos \Phi(t). \quad (2)$$

Скорость изменения энергии дается выражением  $\dot{E} = \dot{x}(t)F \sin \omega t$ . Подставляя в него закон движения (2) и пренебрегая членами высших порядков малости,  $(\dot{A}\Omega/A) \ll 1$ , получаем

$$E = E_0 - \int_0^{\pi/\omega} A \Omega \sin \Phi F \sin \omega t dt, \quad (3)$$

где  $E_0$  — начальная энергия.

Максимальную энергию  $E_+$  оценим из формулы (3), используя прямой вариационный метод. Возьмем простейшую пробную функцию вида

$$\Phi(t) = \tilde{\Omega}t + \varphi_0, \quad (4)$$

где  $\tilde{\Omega}$  — частота усредненного по половине периода движения,  $\varphi_0$  — начальная фаза движения.

Подставив (4) в (3), вычислив функционал энергии и продифференцировав его по начальной фазе, получаем

$$E(E_0, F, \omega) = E_0 - 2 \frac{F \omega \tilde{A} \tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}^2 - \omega^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\tilde{\Omega}}{\omega} \right),$$

где  $\tilde{A}(E_0)$  — амплитуда усредненного по половине периода движения. Используя асимптотики амплитуды и частоты сильно возмущенного движения и принимая

в качестве начальной энергию движения свободной частицы во внешнем поле  $E_0 = F/\omega^2$ , получаем

$$E(F, \omega) = \frac{F}{\omega^2} - 2 \frac{\lambda \mu F^{3/2} \omega}{\lambda^2 \sqrt{F} - \omega^3} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\lambda F^{1/4}}{\omega^{3/2}} \right), \quad (5)$$

где  $\mu = \sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\lambda = \sqrt{\pi} \Gamma(1/4) \Gamma^{-1}(3/4) \approx 1.198$ . Зависимости энергии  $E_+$  от частоты  $\omega$  и амплитуды  $F$  внешней силы, рассчитанные по формуле (5), представлены на рис. 2. Как видно из них, данные аналитического расчета и численного эксперимента находятся в 10%-м согласии в области параметров внешнего поля  $F = 1, \dots, 4$  и  $\omega = 0.5, \dots, 1.2$ , где остроки устойчивости не превосходят области, занятой хаотической компонентой.

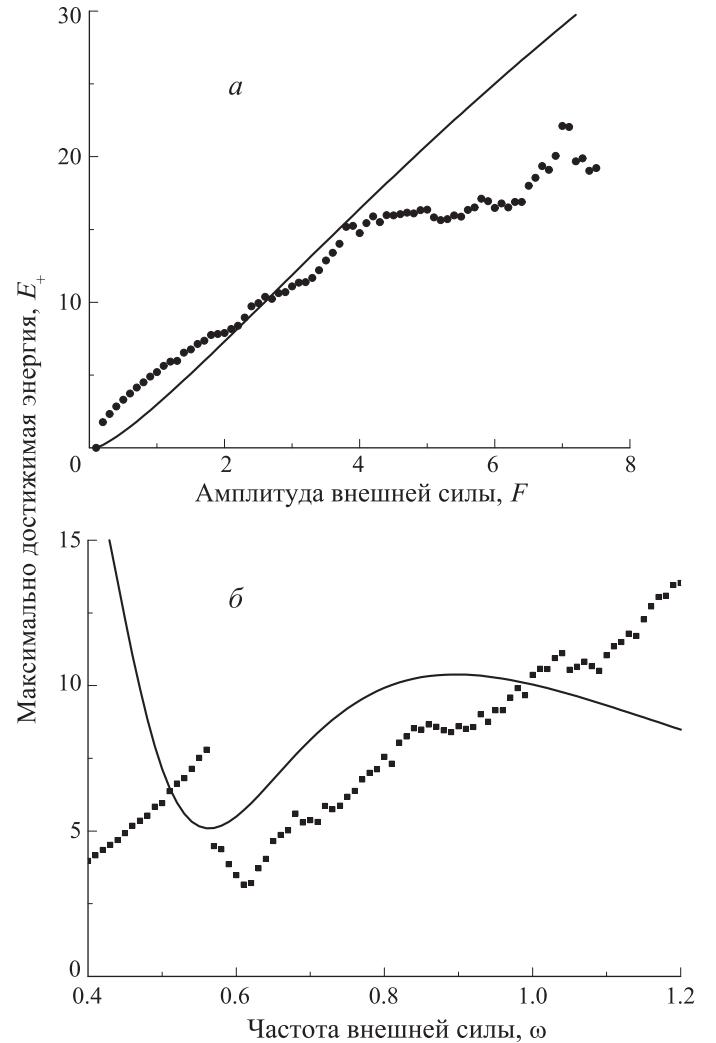
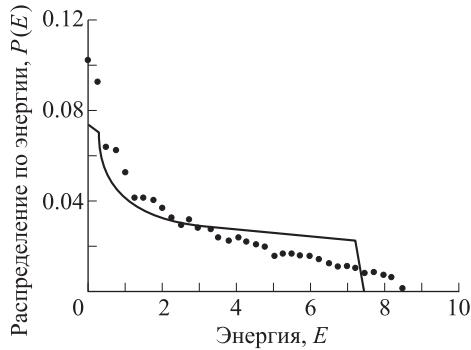


Рис. 2. Зависимость максимальной энергии  $E_+$  от амплитуды  $F$  внешней силы при частоте  $\omega = 1$  (а) и от частоты  $\omega$  внешней силы при амплитуде  $F = 2.5$  (б). Сплошная линия — расчет по формуле (5), точки — результат численного эксперимента

Поскольку в канонических переменных  $\{x; p \propto \dot{x}\}$  для гамильтоновых систем имеет место сохранение фазового объема, то плотность вероятности в хаотической области на стробоскопическом сечении постоянна [13, с. 466]. Вероятность  $P(E)$  найти систему в состоянии с энергией, не превосходящей  $E$ ,



*Рис. 3.* Вид функции распределения по энергии при  $F = 2$ ,  $\omega = 1$ . Сплошная линия — расчет по формуле (6), точки — результат численного эксперимента

пропорциональна площади  $S(E)$ , ограниченной кривой  $\dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = E$ . Эта площадь для модели двухъя姆ного осциллятора Дуффинга (1) может быть выражена аналитически:

$$S(E) = \sqrt[4]{1+4E} \left( (\sqrt{1+4E} - 1) K(k) + 2E(k) \right),$$

где  $E(k)$  и  $K(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [14],  $k^2 = (1 + \sqrt{1+4E}) / (2\sqrt{1+4E})$  — безразмерный параметр. Тогда функция распределения

$$P(E) = N(E_+) S(E), \quad (6)$$

где  $N(E_+)$  — нормировочный коэффициент. Характерный вид функции  $P(E)$ , полученный по формуле (6) с использованием оценки (5) для максимальной энергии, представлен на рис. 3. Из распределения по энергии видно, что при удовлетворительном общем согласии результаты, полученные по формуле (6), дают

занятую вероятность в области высоких энергий. Это обстоятельство легко понять из графика на рис. 1: области регулярного движения (которые мы в нашем подходе присчитывали к хаотической компоненте) лежат вблизи граничной кривой  $\dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = E_+$ .

Автор благодарит П. В. Елютина за интерес к работе и А. А. Никулина за полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М., 1991.
2. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. // УФН. 1983. **140**. С. 355.
3. Chism W., Timberlake T., Reichl L.E. // Phys. Rev. E. 1988. **58**, N 2. Р. 1713.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
5. Duffing G. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Berlin, 1918.
6. Holmes P. // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1979. **292**, N 1394. Р. 419.
7. Lai Y.-C., Kandangath A., Krishnamoorthy S. et al. // Phys. Rev. Lett. 2005. **94**, N 21. Р. 214101.
8. Wu B.S., Suna W.P., Limb C.W. // J. of Sound and Vibration. 2007. **307**, N 3–5. Р. 953.
9. Arie Kapulkinand Arjendu K. Pattanayak // Phys. Rev. Lett. 2008. **101**, Р. 074101.
10. Buric N. // Phys. Rev. A. 2009. **79**. Р. 022101.
11. Lieberman M.A., Liechtenberg A.J. // Phys. Rev. A. 1972. **5**. Р. 1852.
12. Chirikov B.V. // Phys. Reports. 1979. **52**, N 5. Р. 263.
13. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973.

## Energy distribution in strongly perturbed chaotic system

Yu. E. Shchadilova

Department of Quantum Electronics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>yes@shg.ru

The analytical expression for the energy distribution for the Duffing oscillator that moves chaotically under the strong harmonic perturbation is obtained as a function of the perturbation amplitude and frequency.

*Keywords:* nonlinear dynamics, chaos, Duffing's oscillator, energy distribution.

PACS: 05.45.–a.

Received 4 March 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

## Сведения об авторе

Шадилова Юлия Евгеньевна — студентка; тел.: (495) 939-36-69, e-mail: yes@shg.ru.