ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Определение профиля диэлектрической проницаемости пластинки, обладающей сильной частотной дисперсией

А. А. Голубков [1,a], В. А. Макаров [2,b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. [1] Специализированный учебно-научный центр, кафедра физики. Россия, 121357, Москва, ул. Кременчугская, д. 11.
[2] Физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 56.
E-mail: [a] andrej2501@yandex.ru, [b] vamakarov@phys.msu.ru

Статья поступила 07.07.2009, подписана в печать 22.07.2009

Доказана возможность однозначного восстановления профиля диэлектрической проницаемости одномерно неоднородной (возможно, поглощающей) пластинки по известным в некотором диапазоне углов падения коэффициентам отражения и прохождения s-поляризованной плоской волны и предложен алгоритм его нахождения.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость, неоднородный слой, коэффициент отражения, коэффициент прохождения, обратная задача.

УДК: 535. PACS: 42.25.Dd.

На практике часто возникает необходимость определения профиля диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ слоисто-неоднородных сред. К сожалению, подавляющее большинство разработанных методов решения этой проблемы [1–5] по разным причинам не применимы в оптике (пренебрежение частотной дисперсией в широком диапазоне частот, невозможность прямого измерения необходимых величин и др.). Нам известна только одна работа с корректной постановкой задачи восстановления профиля диэлектрической проницаемости одномерно-неоднородной пластины в оптическом диапазоне [6]. Однако предложенный в ней алгоритм нахождения $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ по известным коэффициентам отражения плоских волн фиксированной частоты, распространяющихся в различных направлениях, имеет два принципиальных недостатка и, возможно, именно поэтому не получил дальнейшего развития. Во-первых, он существенно использует идеализированную геометрию взаимодействия волн со средой (слой непоглощающей среды находится перед идеально отражающей поверхностью) и не применим в общем случае. Во-вторых, он оставляет открытым вопрос единственности получающегося решения. Настоящая работа свободна от этих двух ограничений.

Рассмотрим плоский слой среды, диэлектрические свойства которого изменяются только вдоль оси z, перпендикулярной его поверхностям. При $z=z_1$ и $z=z_2$ $(z_2>z_1)$ он граничит с однородными изотропными непоглощающими средами с диэлектрической проницаемостью ε_0. Будем считать, что среда, образующая слой, имеет перпендикулярную его поверхностям плоскость симметрии, и направим вдоль нее ось x $(x\perp z)$.

Пусть на такую пластинку под углом α падает плоская s-поляризованная волна с напряженностью электрического поля $\boldsymbol{E}_0(x,z)=E_0\boldsymbol{e}_y\exp[i(\omega t-k_x x-k_z z)]$, где $z<z_1$, $\boldsymbol{e}_y$ — перпендикулярный плоскости падения единичный вектор, ω — частота волны, $k_x=k_0\sin\alpha$ и $k_z=k_0\cos\alpha$ — компоненты ее волнового вектора, $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$, c — скорость света в вакууме. Тогда вектор электрической индукции в пластинке $\boldsymbol{D}(x,z)=\varepsilon(z)E(z)\boldsymbol{e}_y\exp[i(\omega t-k_x x)]$, а изменение $E(z)$ в ней описывается уравнением

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\left[\frac{\omega^2\varepsilon(z)}{c^2}-\lambda\right]E=0. \tag{1}$$

Здесь $\lambda=k_x^2$, $\varepsilon(z)=\varepsilon_{yy}(z)$ — компонента тензора диэлектрической проницаемости среды. Заметим, что если у последней нет плоскости симметрии xz, но есть ось симметрии 3_z, 4_z, 6_z или ∞_z [7], то уравнение (1) справедливо в пренебрежении пространственной дисперсией.

В силу максвелловских граничных условий на поверхностях слоя имеем

$$\begin{aligned} &E(z_1)=(1+R)E_0, && \left.\frac{dE}{dz}\right|_{z=z_1}=-ik_z(1-R)E_0,\\ &E(z_2)=TE_0, && \left.\frac{dE}{dz}\right|_{z=z_2}=-ik_zTE_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где R и T — соответственно амплитудные коэффициенты отражения пластинкой световой волны и прохождения через нее. Если $\varepsilon(z)$ известно, то, решив уравнение (1) с учетом (2), можно легко рассчитать R и T для любых значений $k_z\neq 0$ (прямая задача). Нас будет интересовать значительно более сложная обратная задача — определение профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ слоя данной толщины по его амплитудным коэффициентам отражения и прохождения, известным в некотором интервале значений углов падения.

Прежде чем перейти к ее решению, рассмотрим чуть более подробно прямую задачу. Напомним, что для достаточно широкого класса функций $\varepsilon(z)$ (кусочно-непрерывных и ограниченных или даже только интегрируемых [8, 9]) уравнение (1) имеет непрерывно дифференцируемые решения, которые можно представить в виде

$$E(z,\lambda) = [C_1\varphi_1(z,\lambda) + C_2\varphi_2(z,\lambda)]E_0. \tag{3}$$

Здесь функции $\varphi_{1,2}(z,\lambda)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi_1(z_2,\lambda) = 1, \quad \left.\frac{d\varphi_1(z,\lambda)}{dz}\right|_{z=z_2} = 0, \\ &\varphi_2(z_2,\lambda) = 0, \quad \left.\frac{d\varphi_2(z,\lambda)}{dz}\right|_{z=z_2} = -1 \end{aligned} \tag{4}$$

и при каждом значении λ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Подставляя (3) в (2), с учетом (4) получим, что входящие в (3) коэффициенты $C_{1,2}$ и значения функций $\varphi_{1,2}$ и их производных в точке $z = z_1$ связаны с R и T соотношениями

$$C_1 = T, \quad C_2 = ik_zT, \tag{5}$$

$$T\Psi_1 + ik_zT\Psi_2 = 1 + R, \quad T\Psi_{1z} + ik_zT\Psi_{2z} = -ik_z(1-R),$$

где $\Psi_{1,2}(\lambda) = \varphi_{1,2}(z_1,\lambda)$, $\Psi_{1z,2z}(\lambda) = d\varphi_{1,2}(z,\lambda)/dz|_{z=z_1}$. Из (5) видно, что T может быть равно нулю, только если $\lambda = k_0^2$ (т. е. $k_z = 0$), а при $\lambda \neq k_0^2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1+R}{T} &= \Psi_1 + ik_z\Psi_2 \equiv f_1(k_z), \\ -ik_z\frac{1-R}{T} &= \Psi_{1z} + ik_z\Psi_{2z} \equiv f_2(k_z). \end{aligned} \tag{6}$$

При каждом фиксированном $z \in [z_1, z_2]$ функции $\varphi_{1,2}(z,\lambda)$ — однозначные аналитические функции λ без особых точек в конечной части плоскости, т. е. целые функции [8–10]. Поэтому $\Psi_{1,2}$ и $\Psi_{1z,2z}$ также являются целыми функциями λ, а следовательно, и $k_z^2 = k_0^2 - \lambda$. Последнее означает, что они являются четными целыми функциями k_z. Поэтому $f_{1,2}$ в силу определения (6) — целые функции k_z. Пользуясь четностью функций $\Psi_{1,2}$ и $\Psi_{1z,2z}$ относительно k_z, из (6) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Psi_{1,1z}(\lambda) &= \frac{1}{2}(f_{1,2}(k_z) + f_{1,2}(-k_z)), \\ \Psi_{2,2z}(\lambda) &= \frac{1}{2ik_z}(f_{1,2}(k_z) - f_{1,2}(-k_z)), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\lambda \equiv k_x^2 = k_0^2 - k_z^2$.

Вернемся теперь к задаче восстановления профиля диэлектрической проницаемости слоя данной толщины по его амплитудным коэффициентам отражения и прохождения, известным в некотором интервале значений углов падения. Если $\Phi(z,\lambda)$ является решением (1) с граничными условиями

$$\left.\left(\frac{d\Phi}{dz} + h_1\Phi\right)\right|_{z=z_2} = 1, \quad \left.\left(\frac{d\Phi}{dz} + h_2\Phi\right)\right|_{z=z_1} = 0, \tag{8}$$

где $h_{1,2}$ — произвольные константы, то, как доказано в [9], функция $\Phi(z_2,\lambda)$ однозначно определяет $\varepsilon(z)$, а также значения коэффициентов $h_{1,2}$. С другой стороны, $\Phi(z,\lambda)$ может быть представлена в виде, аналогичном (3):

$$\Phi(z,\lambda) = C_3\varphi_1(z,\lambda) + C_4\varphi_2(z,\lambda). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая граничные условия (4), легко найти, что

$$\Phi(z_2,\lambda) = \frac{h_2\Psi_2 + \Psi_{2z}}{h_2\Psi_1 + \Psi_{1z} + h_1h_2\Psi_2 + h_1\Psi_{2z}}.$$

Таким образом, для однозначного определения $\varepsilon(z)$ достаточно знать $\Psi_{1,2}$ и $\Psi_{1z,2z}$ на всей комплексной плоскости λ. Пусть коэффициенты R и T известны в некотором интервале углов падения $\alpha^{(1)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha^{(2)}$. Тогда, пользуясь (6), для значений $k_z \in [k_0\cos\alpha^{(2)}, k_0\cos\alpha^{(1)}]$ можно найти $f_{1,2}(k_z)$, которые, в отличие от $\Phi(z_2,\lambda)$, являются целыми функциями. Последнее обстоятельство является достаточным для однозначного аналитического продолжения $f_{1,2}(k_z)$ на всю комплексную плоскость k_z [10]. Зная $f_{1,2}(k_z)$, с помощью (7) можно найти $\Psi_{1,2}(\lambda)$ и $\Psi_{1z,2z}(\lambda)$ для любых λ, а значит, и однозначно определить $\varepsilon(z)$.

Итак, мы доказали, что знание амплитудных коэффициентов прохождения и отражения в некотором интервале углов падения является достаточным для однозначного нахождения профиля диэлектрической проницаемости исследуемой пластинки. Ниже приводится возможный алгоритм восстановления $\varepsilon(z)$.

Пусть для некоторого интервала K значений k_x точно известны коэффициенты прохождения $T(k_x)$ и отражения $R(k_x)$ плоского слоя, границы которого задаются координатами $z = z_1$ и $z = z_2$. Иными словами, известно, что существует функция $\varepsilon(z)$, для которой задача (1), (2) при данных $T(k_x)$ и $R(k_x)$ имеет нетривиальное решение при любых $k_x \in K$ и $E_0 \neq 0$.

Для восстановления $\varepsilon(z)$ найдем два решения $E_{1,2}(z)$ вспомогательного уравнения вида (1) с пробной функцией $q(z)$ вместо неизвестной нам $\varepsilon(z)$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &E_1(z_1) = 1 + R, \quad \left.\frac{dE_1(z)}{dz}\right|_{z=z_1} = -ik_z(1-R), \\ &E_2(z_2) = T, \qquad\quad \left.\frac{dE_2(z)}{dz}\right|_{z=z_2} = -ik_zT. \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим далее соответствующий $q(z)$ неотрицательный функционал

$$\begin{aligned} G[q] = \int\limits_K dk_x \Bigg\{ &\alpha_1|E_1(z_2) - T|^2 + \beta_1\left|\left(\left.\frac{dE_1}{dz}\right|_{z=z_2} + ik_zT\right)\right|^2 + \\ &+ \alpha_2|E_2(z_1) - (1+R)|^2 + \beta_2\left|\left(\left.\frac{dE_2}{dz}\right|_{z=z_1} + ik_z(1-R)\right)\right|^2\Bigg\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ — любые фиксированные положительные числа, являющийся мерой отличия коэффициентов отражения R_q и прохождения T_q слоя с профилем $q(z)$ от известных нам. Действительно, сравнение формул (2) при $E_0 = 1$ с (10), (11) показывает, что $G = 0$ только при полном совпадении коэффициентов R_q и T_q с R и T в интервале K. Но, как было доказано выше, такое совпадение возможно только в одном случае и, очевидно, имеет место, если $q(z) \equiv \varepsilon(z)$. Таким образом, нахождение $\varepsilon(z)$ сводится к поиску единственного нулевого минимума функционала (11). Для решения задач такого типа к настоящему времени разработаны различные эффективные алгоритмы [4, 11]. Наши пробные расчеты показали, что использования даже относительно простого метода градиентного спуска [11] вполне достаточно для восстановления диэлектрической проницаемости неоднородных тонких пленок с хорошей точностью.

Список литературы

1. *Lesselier D.* // J. Optics (Paris). 1978. **9**, N 6. P. 349.
2. *Hodgson R.J.W.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1991. **24**, N 8. P. 1239.
3. *Khruslov E.Ya., Shepelsky D.G.* // Inverse Problems. 1994. **10**, N 1. P. 1.
4. *Hodgson R.J.W.* // J. Appl. Phys. 1991. **70**, N 8. P. 4023.
5. *Xia J., Jordan A.K., Kong J.A.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. **11**, N 3. P. 1081.
6. *Roger A., Maystre D., Cadilhac M.* // J. Optics (Paris). 1978. **9**, N 2. P. 83.
7. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М., 1975.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
9. *Yurko V.* // Inverse Problems. 2006. **22**, N 4. P. 1139.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., 1984.
11. *Brown B.M., Samko V.S., Knowles I.W., Marletta M.* // Inverse Problems. 2003. **19**, N 1. P. 235.

The dielectric permittivity profile reconstructing of medium layer with strong frequency dispersion

A. A. Golubkov[1,a], **V. A. Makarov**[2,b]

[1] *Department of Physics, Advanced Education and Science Center, M. V. Lomonosov Moscow State University, Kremenchugskaya str. 11, Moscow, 121357, Russia.*

[2] *Department of General Physics and Wave Processes, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.*

E-mail: [a] *andrej2501@yandex.ru,* [b] *vamakarov@phys.msu.ru*

Uniquely determination possibility of the dielectric permittivity one-dimensional profile of inhomogeneous (probably absorbing) medium layer using s-polarized plane wave reflection and transmission coefficients known in some incident angle interval is proved and the dielectric permittivity profile searching method is proposed.

Keywords: dielectric permittivity, inhomogeneous layer, reflection coefficient, transmission coefficient, inverse problem.

PACS: 42.25.Dd.

Received 7 July 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2009).

Сведения об авторах

1. Голубков Андрей Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 445-53-06, e-mail: andrej2501@yandex.ru.
2. Макаров Владимир Анатольевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел.: (495) 939-12-25, e-mail: vamakarov@phys.msu.ru.