Суперфункции и корень из факториала

Д. Ю. Кузнецов[1,a], Г. Траппманн[2,b]

[1] *Институт лазерной науки, Университет электрических коммуникаций. Япония, 182-8585, Токио, Чофугаока, 1-5-1 Чофу.*
[2] *Германия, 13351 Берлин, Камерунер 9.*
E-mail: [a] *dima@ils.uec.ac.jp,* [b] *henryk@pool.math.tu-berlin.de*

Статья поступила 13.08.2009, подписана в печать 13.10.2009

Построена голоморфная функция h такая, что $hhz = z!$; эта функция интерпретируется как квадратный корень из факториала.

Ключевые слова: суперфункция, корень из факториала, физфак МГУ, обратная задача.
УДК: 519.651, 519.669. PACS: 02.30.Ks, 02.30.Zz, 02.30.Gp, 02.30.Sa.

Введение

Мотивацией для настоящей работы явилась задача из курса квантовой механики, читаемого на физическом факультете МГУ, в которой предложено придать смысл оператору $\sqrt{!}$ [1]. В прошлом веке удовлетворительное решение найдено не было; утверждалось, что функция $\sqrt{!}$ не может иметь какого-либо смысла [2].

В квантовой механике повторное (итерированное) применение операции (обычно оператора некоторой наблюдаемой величины) интерпретируется как «степень» операции; такой смысл имеют, в частности, квадрат координаты и квадрат импульса. По аналогии мы используем обозначение без круглых скобок. В этих обозначениях $\sin\alpha$ означает $\sin(\alpha)$, $\ln\sin z$ означает $\ln(\sin(z))$ и т. п.; такие же обозначения используются в текстах по элементарной алгебре. Чтобы избежать двусмысленностей при итерациях, мы используем префиксное обозначение Factorial z = Factorial(z) вместо $z!$.

Будем считать, что факториал — это известная мероморфная функция, выражаемая через Гамма-функцию [3] сдвинутого на единицу аргумента. Именно так интерпретируется факториал в алгоритмических языках Mathematica и Maple. Факториал вещественного аргумента показан на рис. 1.

В настоящей работе квадратный корень из факториала есть голоморфная функция h, отличающаяся тем, что ее повторное применение дает факториал, т. е. $h\,h\,z = z!$. Для вещественных значений аргумента график функции $\sqrt{!}$ показан на рис. 2. Ниже описано, как можно вычислять эту функцию не только для вещественных, но и для комплексных значений аргумента, используя суперфункции [4–6].

1. Суперфункции

Построение нецелой степени, т. е. нецелой итерации какой-либо функции (например, $\sqrt{\exp}$, предложенной в [7–9], или $\sqrt{!}$), может быть основано на концепции суперфункции [4–6]. Для заданной функции H, которую будем называть ниже «передаточная функция», суперфункция F есть голоморфное решение уравнения Абеля

$$F(z+1) = H(F(z)). \qquad (1)$$

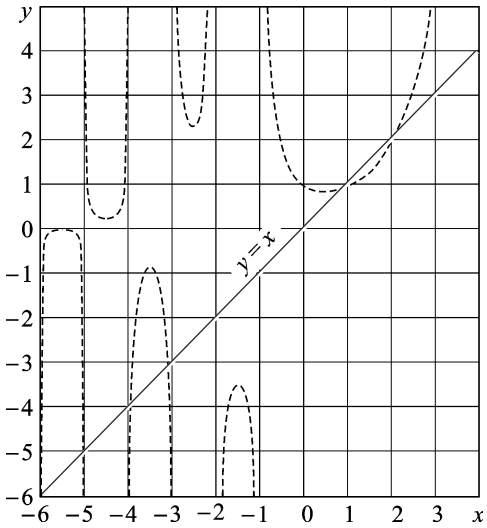

Рис. 1. Факториал вещественного аргумента и графическое решение уравнения $x! = x$

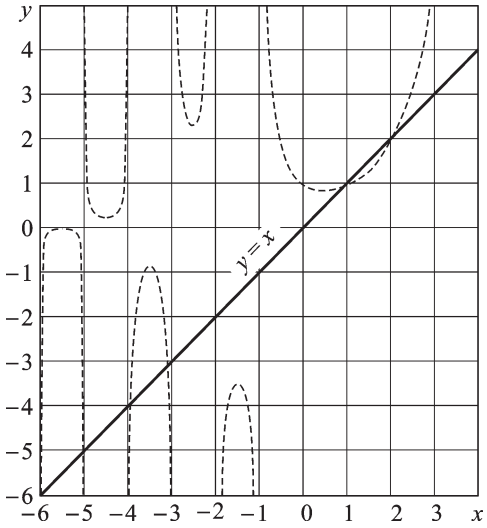

Рис. 2. *а*) y = Factorial(x) (длинный штрих); $y = \sqrt{!}(x)$ = Factorial$^{1/2}(x)$ (сплошная кривая) и $y = \sqrt{x!}$ = Factorial$(x)^{1/2}$ (короткий штрих); *б*) суперфакториал $y = F(x)$ (сплошная кривая) в сравнении с его асимптотой $y = 2 + \exp(kx)$ (короткий штрих)

Этому уравнению уже около двухсот лет [10–12], хотя в 1827 г. Нильс Абель написал его в иной форме, для обратной функции F. Уравнение (1) пришло в физику из феноменологического рассмотрения преобразования сигнала F в однородной одномерной нелинейной системе, отличающейся тем, что преобразование сигнала на единичной длине характеризуется передаточной функцией H. Уравнение (1) допускает и другие приложения, обсуждаемые ниже в п. 6.

В некотором смысле уравнение (1) эквивалентно уравнению Шрёдера [13–17]. При экспоненциальном преобразовании аргумента каждой обратной функции Шрёдера соответствует суперфункция, но не каждая суперфункция может быть просто выражена через обратную функцию Шрёдера. Поэтому здесь мы пользуемся суперфункциями, а не функциями Шрёдера.

Суперфункция F определяет дробную итерацию H^c передаточной функции H:

$$H^c(z) = F\left(c + F^{-1}(z)\right). \tag{2}$$

Функция H^c может рассматриваться как дробная степень функции H, потому что она удовлетворяет ожидаемым соотношениям

$$H^1 = H, \quad H^{c+d}(z) = H^c H^d z = H^c(H^d(z)),$$

т. е. для двух чисел c и d имеет место тождество $H^c H^d = H^{c+d}$, как если бы H была числом, а не функцией. В частности, при $c = 1/2$ половинная итерация $h(z) = \sqrt{H}(z) = H^{1/2}(z)$ рассматривается как квадратный корень функции H, так как $h\,h\,z = h(h(z)) = H\,z = H(z)$. В этом смысле $h^2 = H$ и $h = \sqrt{H}$.

Некоторые суперфункции (см. табл. 1) широко известны; для их использования не требуется знать, что они являются суперфункциями. Несколько примеров (в том числе тригонометрических) суперфункций были предложены также на сайтах [5, 6, 18].

Суперфункции от экспоненты (табл. 1, строка 4) пока не так широко известны, хотя Хельмут Кнезер предложил половинную итерацию экспоненты, т. е. фактически $\sqrt{\exp}$ еще в 1950 г. [7]. Мы называем тетрацией tet_b суперфункцию от $\exp_b$, такую, что $\mathrm{tet}_b(0) = 1$, и голоморфную на множестве $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -2\}$, т. е. голоморфное решение уравнения

$$\mathrm{tet}_b(z+1) = \exp_b(\mathrm{tet}_b(z)). \tag{3}$$

Для целых значений z тетрация $\mathrm{tet}_b(z)$ есть результат z-кратного применения экспоненты к единице:

$$\mathrm{tet}_b\ z = \underbrace{\exp_b\Big(\exp_b\big(\ldots \exp_b}_{z\text{-кратное применение экспоненты}}(1)\ldots\big)\Big). \tag{4}$$

Вычисление тетрации tet_b при $b > \exp(1/e)$, и в частности для $b = e$ и $b = 2$, описано в работах [9, 19, 22]. Для $b = e$ имеется быстрая аппроксимация [20, 21]. Вычисление тетрации при $1 < b < \exp(1/e)$, и в частности для $b = \sqrt{2}$, рассмотрено в работе [4].

Новые суперфункции могут получаться преобразованиями других, уже описанных суперфункций. Если F является суперфункцией некоторой передаточной функции H, то другая суперфункция $\mathcal{F}$ той же передаточной функции H может быть получена преобразованием $\mathcal{F}(z) = F(z + \delta(z))$, где δ есть некоторая голоморфная функция с периодом, равным единице. Например, суперфункция, приведенная в строке 9 табл. 1, может быть получена из суперфункции, приведенной в строке 8 при $\delta(z) = \pi \cdot i \cdot \ln(2)/2 = \mathrm{const}$. Для более сложных функций δ преобразованная суперфунция $\mathcal{F}$ обычно имеет более узкую область голоморфизма или по крайней мере быстро растет в направлении мнимой оси.

Кроме того, для пары взаимно обратных функций P и Q новые пары (передаточная функция, суперфункция) могут быть получены преобразованием, указанным в последней строчке табл. 1, так что таблица суперфункций может быть существенно длиннее.

Таблицу 1 можно расширять также с помощью произвольной пары F, F^{-1} биголоморфных функций, декларируя F как суперфункцию и строя соответствующую передаточную функцию по формуле (2) при $c = 1$.

В настоящей работе рассмотрена обратная задача, т. е. для данной передаточной функции, а именно для

Таблица 1

Примеры суперфункций

№	$H(z)$	$F(z)$	$F^{-1}(z)$	Комментарий
1	$z+1$	$b+z$	$z-b$	$b \in \mathbb{C}$
2	$b+z$	$bz+c$	$(z-c)/b$	$b \neq 0$
3	$bz+c$	$b^z + \dfrac{c}{1-b}$	$\log_b\left(z - \dfrac{c}{1-b}\right)$	
4	b^z	$\mathrm{tet}_b(z)$	$\mathrm{tet}_b^{-1}(z)$	(3), (4), [4, 9, 19–22]
5	z^b	$\exp(b^z)$	$\log_b\big(\ln(z)\big)$	$b > 0$
6	$\ln(b+e^z)$	$\ln(bz)$	e^z/b	$b \neq 0$
7	$(a^b+z^b)^{1/b}$	$az^{1/b}$	$(z/a)^b$	$a>0$, $b\neq 0$
8	$2z^2-1$	$\cos(2^z)$	$\log_2(\arccos(z))$	
9	$2z^2-1$	$\cosh(2^z)$	$\log_2(\mathrm{arccosh}(z))$	ср. № 8
10	$2z/(1-z^2)$	$\tan(2^z)$	$\log_2(\arctan(z))$	
11	$2z/(1+z^2)$	$\tanh(2^z)$	$\log_2\left(2\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\right)$	
12	$\mathrm{Factorial}(z)$	$\mathrm{SuperFactorial}(z)$	$\mathrm{ArcSuperFactorial}(z)$	(6), (8)
	$P(H(Q(z)))$	$P(F(z))$	$F^{-1}(Q(z))$	$P(Q(z)) = z$

факториала, строится суперфункция F и ее обратная функция F^{-1}; тогда при $c = 1/2$ уравнение (2) определяет функцию $\sqrt{!}$, давая смысл эмблеме физфака МГУ.

2. Факториал, аркфакториал и стационарные точки

Для вычисления суперфакториала и арксуперфакториала нужны эффективные представления факториала и аркфакториала. Карты факториала и аркфакториала комплексного аргумента показаны на рис. 3 в координатах $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ линиями $\mathrm{Re}(\mathrm{Factorial}(z)) = p = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Im}(\mathrm{Factorial}(z)) = q = \mathrm{const}$. Толстые линии соответствуют целым значениям p и q; например, на карте факториала линии $p = 1$ пересекают горизонтальную линию $q = 0$ в точках ($x = 0$, $y = 0$) и ($x = 1$, $y = 0$); линия $p = 2$ пересекает горизонтальную линию $q = 0$ в точке ($x = 2$, $y = 0$); линия $p = 6$ пересекает горизонтальную линию $q = 0$ в точке ($x = 3$, $y = 0$). На этих картах промежуточные линии проведены с шагом 0.2. В правой части карты факториала (левый график) плотность линий велика и они бы слились, поэтому там показаны только линии $p = 0$ и $q = 0$. Кроме того, плотность линий велика («бесконечна») в окрестностях полюсов функции факториал; полюса отмечены белыми точками. Такой же способ изображения функции ее картой используется и на других рисунках.

К сожалению, в алгоритмических языках пока отсутствуют эффективные процедуры для вычисления аркфакториала (АркГамма, как и, например, АркБессель, пока не представлены в стандартных пакетах). Поэтому для вычисления факториала и аркфакториала использованы программы [23], написанные на языке C++.

При вычислении суперфункции от некоторой передаточной функции ключевым является вопрос о ее стационарных точках (fixed points [16, 17]). В частности, для факториала стационарными точками являются решения уравнения $\mathrm{Factorial}(z) = z$. Вещественные стационарные точки соответствуют абсциссам пересечений графиков $y = \mathrm{Factorial}\ x$ и $y = x$. Эти графики показаны на рис. 1.

Для факториала и аркфакториала наиболее известны стационарные точки $z = 1$ и $z = 2$. Разумеется, у факториала имеется также счетное множество отрицательных стационарных точек. Четыре из них видны в левом нижнем углу рис. 1. Каждая из стационарных точек может быть использована для построения суперфункции и нецелых степеней передаточной функции, голоморфных в некоторой окрестности этой точки и сингулярных в других стационарных точках [4]. Таким образом, существует много различных квадратных корней из факториала.

В настоящей работе рассмотрена только одна реализация суперфакториала, и только один корень из факториала, соответствующие стационарной точке 2. Этот выбор обусловлен желанием построить такой $\sqrt{!}$, который неограниченно растет в положительном направлении вещественной оси, медленнее факториала и медленнее любой растущей экспоненты, но быстрее любого полинома, соответствуя интуитивному представлению о такой функции. Именно этот корень из факториала изображен в левой части рис. 2 сплошной кривой.

3. Вычисление суперфакториала

Рассмотрим суперфакториал F, который стремится к стационарному значению 2 при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента:

$$\mathrm{Factorial}(F(z)) = F(z+1), \quad \lim_{x\to-\infty} F(x+iy) = 2. \qquad (5)$$

По аналогии с суперэкспонентой [4] ищем решение F в виде

$$F(z) = \Phi\big(\exp(kz)\big), \qquad (6)$$

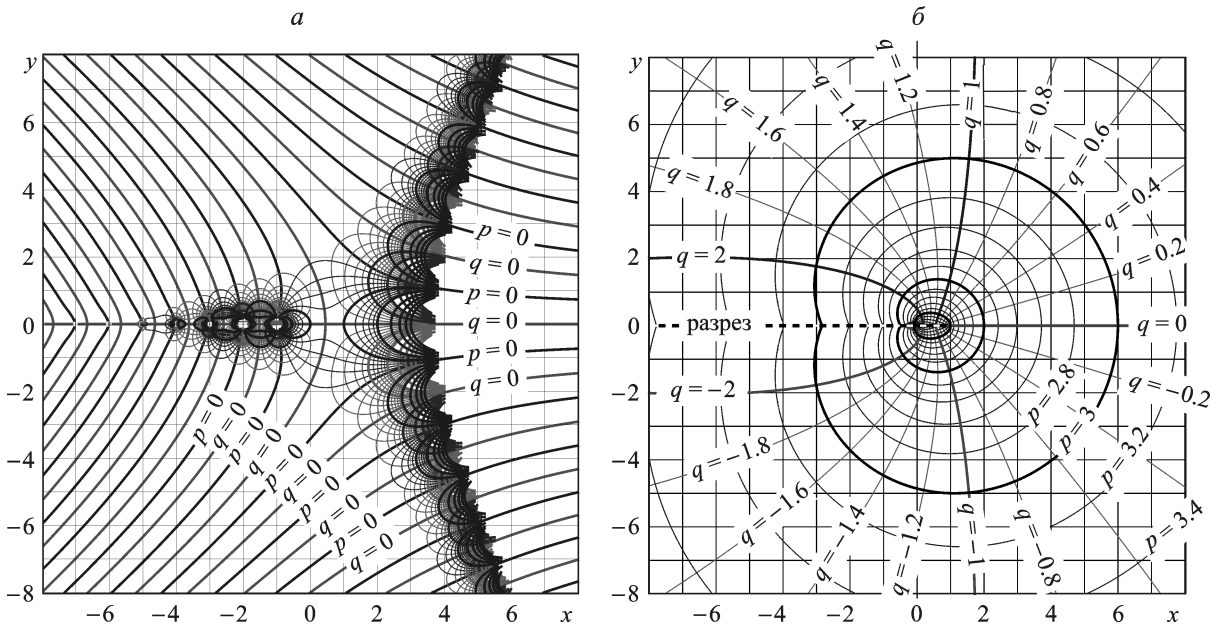

Рис. 3. $f = \mathrm{Factorial}(z)$ (*а*) и $f = \mathrm{ArcFactorial}(z)$ (*б*) в комплексной z-плоскости; уровни $\mathrm{Re}(f) = p = \mathrm{const}$ и уровни $\mathrm{Im}(f) = q = \mathrm{const}$ показаны толстыми линиями для $p = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и для $q = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

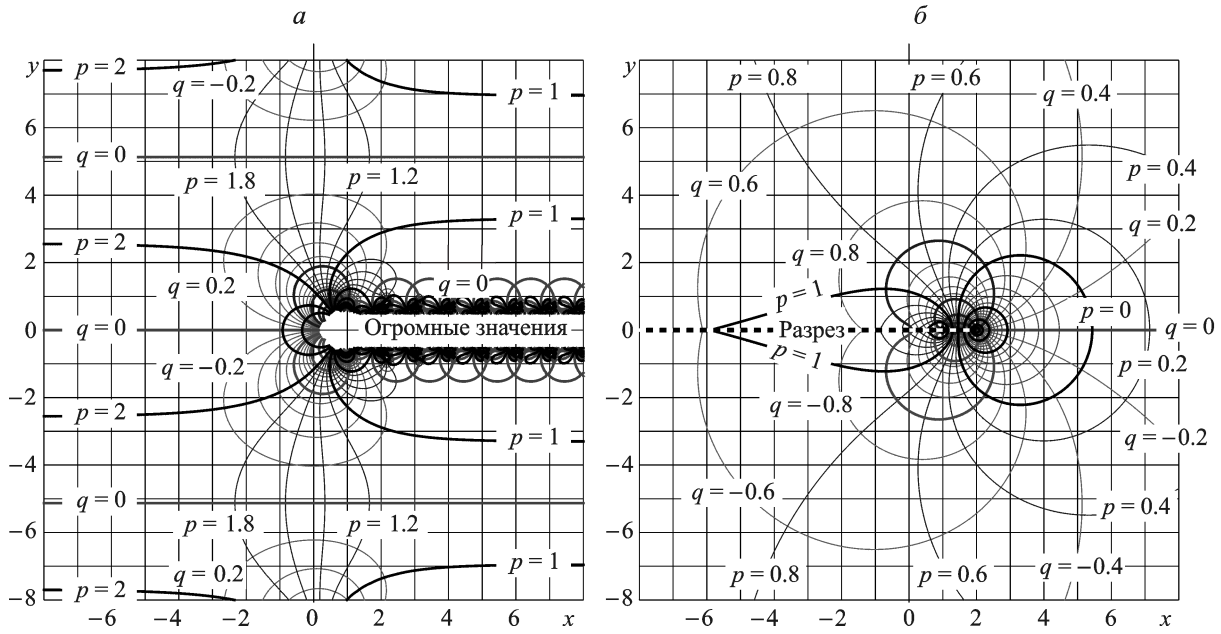

Рис. 4. Карты функций $f = F$ и $f = G$ в тех же обозначениях, что и на рис. 3

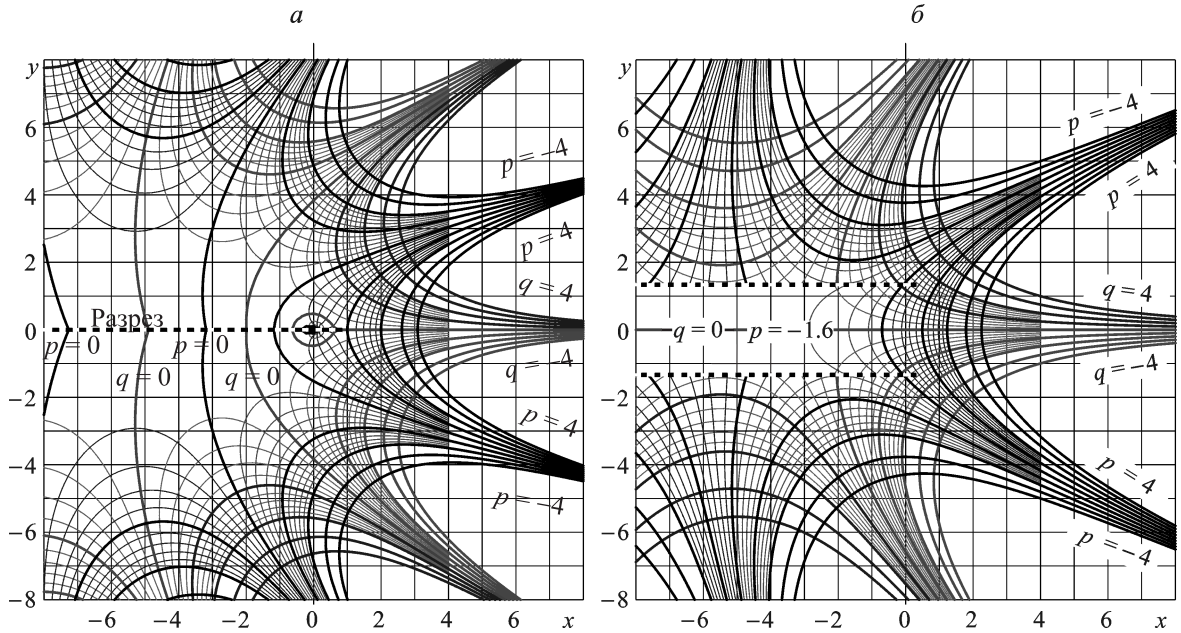

Рис. 5. Функция $f = \sqrt{!}(z) = \mathrm{Factorial}^{-1/2}(z)$, рассчитанная по формуле (10) (*а*) и $f = \sqrt{\exp}(z)$ (*б*) в тех же обозначениях, что и на рис. 3, 4; толстыми линиями показаны уровни $p, q = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

где k есть константа, а функция Φ имеет смысл обратной функции Шрёдера. Подстановка выражения (6) в уравнение (5) дает уравнение Шрёдера [13, 14]

$$\Phi(K\varepsilon) = \mathrm{Factorial}\,\big(\Phi(\varepsilon)\big), \tag{7}$$

где $K = \exp(k)$. Ищем решение в виде разложения

$$\Phi(\varepsilon) = 2 + \varepsilon + \sum_{n=2}^{N} u_n \varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \tag{8}$$

где u суть постоянные вещественные коэффициенты, а N есть натуральное число. Подстановка такого разложения в уравнение Шрёдера (7) дает значение

$$k = \ln(K) = \ln\big(3 + 2\,\mathrm{Factorial}'(0)\big) = \ln(3 - 2\,\gamma) \approx \\ \approx 0.6127874523307,$$

где $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.5772156649$ есть постоянная Эйлера [3], и цепочку уравнений для коэффициентов u. Из этих уравнений находим

$$u_2 = \frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 18\gamma + 6}{12(3 - 5\gamma + 2\gamma^2)} \approx 0.798731835,$$

$$u_3 = \big\{-36 - 39\pi^2 - 738\gamma^2 + 324\gamma + 99\pi^2\gamma - 60\pi^2\gamma^2 - \\ - \pi^4 + 24\gamma^5 + 594\gamma^3 - 120\zeta(3)\gamma + 48\zeta(3)\gamma^2 +$$

$$+ 12\gamma^3\pi^2 + 72\zeta(3) - 204\gamma^4\}\times$$
$$\times\left\{144(-18+69\gamma-104\gamma^2+77\gamma^3-28\gamma^4+4\gamma^5)\right\}^{-1},$$

где $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ есть дзета-функция Римана [3]; $\zeta(3)\approx 1.202056903$.

Похожие (но более громоздкие) выражения получаются и для других коэффициентов u; значения коэффициентов приведены в табл. 2. Кроме того, пусть $u_0 = 2$ и $u_1 = 1$. Частичная сумма (8) при $N = 20$ дает приближение для суперфакториала

$$F_{20}(z) = \sum_{n=0}^{20} u_n \exp(knz),$$

обеспечивая порядка 15 значимых десятичных цифр при $\mathrm{Re}(z) \leqslant -2$. Для вычисления $F(z)$ при $\mathrm{Re}(z) > -2$ используется рекуррентная формула $F(z) = \mathrm{Factorial}\big(F(z-1)\big)$. Таким образом расчитывался суперфакториал при построении графиков на рис. 2 и 4.

Таблица 2

Коэффициенты u и U в разложениях (8) и (9)

n	u_n	U_n
2	0.7987318351724345	−0.7987318351724345
3	0.5778809754764832	0.6980641135593670
4	0.3939788096629718	−0.6339640557572815
5	0.2575339580323327	0.5884152357911399
6	0.1629019581037053	−0.5538887519936520
7	0.1002824191713524	0.5265479025985924
8	0.0603184725913977	−0.5041914604280215
9	0.0355544582258062	0.4854529800293392
10	0.0205859954874424	−0.4694346809094714

Суперфакториал F является целой периодичной функцией. Ее период

$$T = 2\pi i/k \approx 10.25344968115602792657726406913 97\, i$$

чисто мнимый, так что структура на графике этой функции на рис. 4 воспроизводится при трансляциях вдоль мнимой оси. Вдоль вещественной оси, суперфакториал F быстро растет; быстрее, чем экспонента, и быстрее, чем тетрация [9].

В окрестности положительной части вещественной оси график суперфакториала имеет квазипериодичную «фрактальную» структуру, напоминающую поведение растущих суперэкспонент [4, 22]. Вероятно, и другие голоморфные функции, растущие быстрее любой конечной итерации экспоненты (т. е. $\exp^c$ при фиксированном c), ведут себя таким образом.

4. Арксуперфакториал

Обратная функция от суперфакториала, т. е. арксуперфакториал $G = F^{-1}$, показана на рис. 4, *б*. Эта функция может быть выражена обращением асимптотического разложения (8):

$$G(z) = \frac{1}{k}\log\left(\sum_{n=1}^{N} U_n(z-2)^n + \mathcal{O}(z-2)^{N+1}\right), \qquad (9)$$

где $U_1 = 1$ и $U_2 = -u_2$. Функция InverseSeries из алгоритмического языка «Mathematica» (см. также формулу 3.6.25 из [3]) позволяет выразить коэффициенты U через коэффициенты u точно; приближенные значения коэффициентов U приведены в правом столбце табл. 2.

Частичная сумма (9) при $N = 20$ дает приближение для $G(z)$ с 15 корректными десятичными знаками при $|z-2| \leqslant 0.1$. Для иных значений аргумента может использоваться уравнение $G(z) = G\big(\mathrm{ArcFactorial}(z)\big) + 1$. Итерации аркфакториала сходятся к значению 2; после нескольких таких итераций арксуперфакториал может быть аппроксимирован выражением (9). При использовании переменных `complex double` таким образом может быть получено порядка 14 значащих цифр. Вычисление эффективно: генерация каждого из представленных здесь рисунков занимает порядка секунды.

Арксуперфакториал $G = F^{-1}$ является голоморфной функцией в области $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \leqslant 2\}$. Вдоль вещественной оси арксуперфакториал растет до бесконечности, хотя и медленно; медленнее, чем логарифм, и медленнее, чем арктетрация [9]. Столь же медленный рост модуля арксуперфакториала имеет место при удалении от начала координат в любом направлении, кроме отрицательного направления вещественной оси. Число 2 является точкой ветвления функции G; разрез области голоморфизма на рис. 4 проведен в сторону отрицательной части вещественной оси.

5. Квадратный корень из факториала

Выбор суперфакториала F и арксуперфакториала G задает любую, в частности дробную и даже комплексную, степень факториала; функция может итерироваться комплексное число раз. В случае степени 1/2 комбинация (2) суперфакториала и арксуперфакториала дает функцию $\sqrt{!}$, т. е. «корень из факториала»:

$$\sqrt{!}\,(z) = \mathrm{Factorial}^{1/2}(z) = F\big(1/2 + G(z)\big). \qquad (10)$$

Поведение этой функции в комплексной плоскости показано на рис. 5, *а*. Для сравнения на рис. 5, *б* показан квадратный корень из экспоненты $\sqrt{\exp}(z) = \mathrm{tet}\big(1/2 + \mathrm{tet}^{-1}(z)\big)$, где тетрация tet есть суперфункция от экспоненты, т. е. голоморфное решение уравнения (3) при $b = e$. Быстрое численное представление тетрации tet, голоморфной в области $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \leqslant -2\}$, и арктетрации tet^{-1} описанно в работе [20]; программа на языке Mathematica для вычисления функций tet и tet^{-1} доступна на сайте [21]. Арктетрация иногда называется еще «superlogarithm» [24], хотя она и не являтся суперфункцией логарифма.

Построенный $\sqrt{!}$ является голоморфной функцией в домене $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \leqslant \nu\}$, где $\nu = \min\limits_{x>0}(x!) \equiv 0.8856$. Карта функции $\sqrt{!}$ похожа на карту функции $\sqrt{\exp}$ и даже в некотором смысле проще: $\sqrt{!}$ имеет только одну точку ветвления и только один разрез, в то время как $\sqrt{\exp}$ имеет две точки ветвления и два разреза. Функция $\sqrt{!}$ для вещественных значений аргумента показана на рис. 2. В целом эта функция соответствует интуитивным представлениям о ее поведении. В частности, вдоль вещественной оси $\sqrt{!}$ растет быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты.

Похожим образом карты функций $\mathrm{Factorial}^c$ и $\exp^c$ могут быть построены и для других значений c. В частности, при $c = 1$ функция $\mathrm{Factorial}^c$ становится обычным факториалом; при $c = -1$ это аркфакториал; а при $c = 0$ это идентичная функция, значение которой равно значению ее аргумента. Для целых положительных значений c c-кратная итерация факториала может интерпретироваться обычным образом:

$$\mathrm{Factorial}^c(z) = \underbrace{\mathrm{Factorial}\Big(\mathrm{Factorial}\big(\ldots \mathrm{Factorial}(z)\ldots\big)\Big)}_{c\text{-кратное применение факториала}}.$$

Уравнение (2) определяет плавный (голоморфный) переход от передаточной функции к ее обратной. Такие переходы существуют не только для факториала, но и для других передаточных функций.

6. Физические приложения

Хотя на сегодня неизвестны распределенные физические системы с факториальной передаточной функцией, уже сам факт существования суперфакториала и соответственно функции $\sqrt{!}$ дает надежду строить суперфункции для передаточных функций реальных физических систем. Рассмотрим возможные физические приложения формализма суперфункций.

В исследованиях нелинейного отклика оптических материалов образец предполагается оптически тонким; тогда интенсивность излучения при прохождении образца изменяется незначительно и можно говорить, например, о поглощении при некотором фиксированном значении интенсивности. Однако при незначительном изменении интенсивности точность измерения поглощения невысока. Реконструкция суперфункции по передаточной функции образца может позволить увеличить оптическую толщину образца и улучшить точность. В частности, передаточная функция образца половинной толщины является квадратным корнем (т. е. половинной итерацией) передаточной функции исходного образца.

В нелинейной акустике имеет смысл исследование поглощения ударных волн в однородной трубе — глушителе. Использование суперфункций может помочь восстановить передаточную функцию глушителя произвольной длины.

Для анализа процесса конденсации могут использоваться вертикальная труба с парами и маленькие капли жидкости, диффундирующие вниз сквозь эти пары. В первом приближении при фиксированном давлении паров масса капли на выходе будет передаточной функцией от ее массы на входе. Квадратный корень (половинная итерация) этой передаточной функции будет передаточной функцией трубы половинной длины.

Если снежный ком катится с лавиноопасного склона, то его масса растет как функция F от расстояния, которое он прокатился. Исследовать это явление лучше на безопасном холме, где есть возможность измерять массу кома после скатывания как передаточную функцию H исходной массы. Тогда F — суперфункция.

Если требуется сконструировать операционнный элемент с факториальной передаточной функцией и предлагается реализовать этот элемент с виде последовательного соединения пары идентичных элементов, то каждый из этих двух элементов должен иметь передаточную функцию $\sqrt{!}$, показанную на рис. 2.

Извлечение корней из функций может иметь и другие (вероятно, неожиданные) приложения и использоваться для описания процессов, растущих быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты. Теоретическая наука должна быть готова к таким приложениям. В частности, суперэкспонента, суперфакториал, $\sqrt{\exp}$ и $\sqrt{!}$ должны быть подняты до статуса специальных функций.

Заключение

Суперфакториал построен как суперфункция факториала, т. е. голоморфное решение уравнения (5). Для данной передаточной фукции H на основе ее суперфункции и арксуперфункции произвольная степень c функции H выражается уравнением (2). Для $H = \mathrm{Factorial}$ и $c = 1/2$ это дает способ вычисления функции $\sqrt{!}$, показанной на рис. 2 и 5. Предложенный формализм извлечения нецелых итераций от функций может иметь применение в различных разделах физики и техники.

Авторы выражают благодарность Р. Д. Кузнецову, М. А. Каллистратовой, А. В. Борисову, М. Садгрову и П. В. Елютину за ценную критику, Ш. Окудайре за предложения новых применений суперфункций, а также участникам тетрального форума [6] и ситизендиума [5] за ценные обсуждения.

Список литературы

1. Владимир Дмитриевич Кривченков // Сер. «Выдающиеся ученые физического факультета МГУ» / Сост. И. М. Сараева, Ю. М. Романовский, А. В. Борисов. М.: Физический факультет МГУ, 2008. Онлайновая версия, с. 81. `http://www.phys.msu.ru/rus/about/structure/admin/OTDEL-IZDAT/HISTORY/`
2. *Гордиенко В.М., Новик В.К.* О времени и факультете, о кафедре и о себе... 70-летие профессора В. П. Кандидова. М., 2007. `http://ofvp.phys.msu.ru/pdf/Kandidov_70.pdf`
3. *Абрамовиц М., Стегун И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
4. *Kouznetsov D., Trappmann H.* Mathematics of computation. 2010, in press. Preprint ILS UEC, 2009: `http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009sqrt2.pdf`
5. `http://en.citizendium.org/wiki/Superfunction`
6. *Trappmann H.* Elementary superfunctions. Tetration Forum. Berlin, 2009. `http://math.eretrandre.org/tetrationforum/showthread.php?tid=275`
7. *Kneser H.* // J. für die reine und angewandte Mathematik, 1950. **187**. P. 56.
8. *Trappmann H., Kouznetsov D.* Uniqueness of holomorphic Abel functions. Preprint ILS UEC, 2009. `http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009uniabel.pdf`
9. *Kouznetsov D.* // Mathematics of Computation. 2009. **78**. P. 1647.
10. *Belitskii G., Lubish Yu.* // Studia Mathematica. 1999. **134**, N 2. P. 135.
11. *Abel N.H.* // Crelle's J. 1827. N 2. P. 389.
12. `http://en.citizendium.org/wiki/Abel_function`
13. *Sui Sun Cheng, Wenrong Li.* Analytic solutions of functional equations. World Scientific, 2008.

14. *Schröder E.* Über iterierte Funktionen III // Math. Ann. 1870. **3**. P. 296.
15. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations. Cambridge, 1990.
16. *Écalle J.* Théorie des invariants holomorphes. Publications d'mathématiques d'Orsay n° 67–74 09, 1970, Université Paris XI, U.E.R. Mathématique, 91405 Orsay, France. `http://portail.mathdoc.fr/PMO/PDF/E_ECALLE_67_74_09.pdf`
17. *Milnor J.* Dynamics in one complex variable. Princeton, 2006.
18. *Mueller M.* Old projects. `http://www.math.tu-berlin.de/~mueller/projects.html`
19. *Kouznetsov D.* Ackermann functions of complex argument. Preprint ILS UEC, 2008; `http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2008ackermann.pdf`
20. *Кузнецов Д.* Владикавказский матем. журн. В печати. Препринт: `http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009vladir.pdf`
21. `http://en.citizendium.org/wiki/TetrationDerivativesReal.jpg/code`
22. *Kouznetsov D., Trappmann H.* Preprint ILS UEC, 2009. `http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009fractae.pdf`
23. `http://en.citizendium.org/wiki/ArcGamma.jpg/code`
24. *Robbins A.* Solving for the Analytic Piecewice Extension of Tetration and the Super-logarithm. Preprint of «Virtual Composer», 2000. `http://misc.virtualcomposer2000.com/TetrationSuperlog_Robbins.pdf`

Superfunctions and square root of factorial

D.Yu. Kouznetsov[1,a], **H. Trappmann**[2,b]

[1] *Institute for Laser Science, University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofushi, Tokyo, 182-8585, Japan.*
[2] *Kameruner Str. 9, 13351 Berlin, Germany.*
E-mail: [a] *dima@ils.uec.ac.jp,* [b] *henryk@pool.math.tu-berlin.de.*

The holomorphic function h is constructed such that $hhz = z!$; this function is interpreted as square root of factorial.

Keywords: square root of factorial, superfunction, superfactorial, inverse problem.
PACS: 02.30.Ks, 02.30.Zz, 02.30.Gp, 02.30.Sa.
Received 13 August 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

Сведения об авторах

1. Кузнецов Дмитрий Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, исследователь; тел.: 81-424-43-5708, e-mail: dima@ils.uec.ac.jp.
2. Траппманн Генрик (Trappmann Henryk) — профессор; e-mail: henryk@pool.math.tu-berlin.de.