

## Пионная конденсация в модели Гросса–Невё

В. Ч. Жуковский<sup>1,a</sup>, К. Г. Клименко<sup>2,b</sup>, Т. Г. Хунджуа<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

<sup>2</sup>ИФВЭ и Университет «Дубна». Россия, 142281, Московская обл., г. Протвино.

E-mail: <sup>a</sup>zhukovsk@phys.msu.ru, <sup>b</sup>kklim@ihep.ru

Статья поступила 06.10.2009, подписана в печать 18.10.2009

Исследована фазовая структура двумерной массивной модели Гросса–Невё в переменных химических потенциалов, числа кварков и изоспинового числа при нулевой температуре в пределе большого числа компонентов поля  $N_c \rightarrow \infty$ .

**Ключевые слова:** модель Гросса–Невё, кварковая материя.

УДК: 539.12.01. PACS: 12.38.Lg.

### Введение

В последнее время большое внимание уделяется изучению фазовых переходов в адронной материи с учетом барионного и изотопического химпотенциалов. Последнее связано с экспериментами по столкновениям тяжелых ионов, а также с физикой компактных звезд, в состав которых нейтроны и протоны входят несимметрично. Поскольку взаимодействие в таких ситуациях сильное, необходимо применять непертурбативные методы и, в частности, эффективные модели типа Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ) [1]. В то время как НЙЛ модели применимы при низких энергиях и плотностях, модели типа Гросса–Невё (ГН) в пространстве размерности (1+1) [2–4] этих ограничений не требуют. Более того, они эффективно моделируют свойства квантовой хромодинамики (КХД), такие как перенормируемость, асимптотическая свобода и размерная трансмутация. При этом в пределе большого числа компонент поля ( $N_c \rightarrow \infty$ ) теорема о невозможности спонтанного нарушения непрерывной симметрии в (1+1)-модели ГН не работает [11, 12]. Поэтому использование модели ГН для изучения непертурбативных явлений в рамках этой модели при  $N_c \rightarrow \infty$  существенно проще (см., напр., [7, 8, 13]). Следовательно, представляется весьма удобным изучение таких эффектов, как цветовая сверхпроводимость и спонтанное нарушение изотопической симметрии, характерных для реалистических условий в (3+1)-мерном пространстве, на примере модели ГН в пределе больших чисел  $N_c$ .

В отличие от нашей предыдущей работы [13], где подобная модель использовалась для изучения системы безмассовых кварков с двумя ароматами в конечном объеме при конечном изотопическом химическом потенциале  $\mu_I \neq 0$  и нулевой барионной плотности  $\mu = 0$ , в настоящей работе оба химического потенциала и масса кварков считаются отличными от нуля, а пространство имеет стандартную топологию  $R^1 \times R^1$ . При этом мы принимаем, что конденсаты пространственно однородны (случай неоднородных конденсатов при  $\mu_I = 0$  был недавно рассмотрен в работах [9, 10, 14, 15]).

### 1. Модель и ее термодинамический потенциал

Рассмотрим (1+1)-мерную модель плотной кварковой материи, состоящей из безмассовых кварков двух

различных ароматов ( $u$ - и  $d$ -кварки), описываемую лагранжианом

$$L = \bar{q} \left[ \gamma^\nu i\partial_\nu - m_0 + \mu \gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 \right] q + \frac{G}{N_c} \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5 \tau q)^2 \right]. \quad (1)$$

Эта модель представляет собой обобщение модели Гросса–Невё [2], поскольку здесь двухкомпонентный дираковский спинор поля кварков  $q(x) \equiv q_{i\alpha}(x)$  представляет собой также дублет по ароматам ( $i = 1, 2$  или  $i = u, d$ ) и  $N_c$ -мультиплет по цветам ( $\alpha = 1, \dots, N_c$ ) (в (1) подразумевается суммирование по ароматовым, цветовым и спинорным индексам;  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — матрицы Паули;  $\mu$  — химический потенциал по числу кварков;  $\mu_I$  — химический потенциал по изоспиновому числу). При  $\mu_I = 0$ ,  $m_0 = 0$  лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразований хиральной группы  $SU_L(2) \times SU_R(2)$ . При  $\mu_I \neq 0$ ,  $m_0 = 0$  симметрия снижается до группы  $U_{I_3 L}(1) \times U_{I_3 R}(1)$  ( $I_3 = \tau_3/2$  — третья компонента оператора изоспина, индексы  $L, R$  обозначают левую или правую подгруппу). Эту симметрию можно также представить как произведение подгрупп  $U_{I_3}(1) \times U_{A I_3}(1)$ , где  $U_{I_3}(1)$  — подгруппа изоспина, а  $U_{A I_3}(1)$  — аксиальная подгруппа изоспина, которые преобразуют кварки соответственно как  $q \rightarrow \exp(i\alpha \tau_3)q$  и  $q \rightarrow \exp(i\alpha \gamma^5 \tau_3)q$ . В случае  $m_0 \neq 0$ ,  $\mu_I \neq 0$  лагранжиан (1) инвариантен относительно группы  $SU_I(2)$ , представляющей собой диагональную подгруппу хиральной группы  $SU_L(2) \times SU_R(2)$ . В наиболее общем случае, когда  $m_0 \neq 0$ ,  $\mu_I \neq 0$ , исходная модель (1) симметрична относительно упомянутой изоспиновой подгруппы  $U_{I_3}(1)$ . При этом модель во всех упомянутых частных случаях инвариантна относительно цветовой группы  $SU(N_c)$ .

Линеаризуя модель (1) путем введения составных полей бозонов  $\sigma(x)$  и  $\pi_a(x)$  ( $a = 1, 2, 3$ ),

$$\sigma(x) = -2 \frac{G}{N_c} (\bar{q}q); \quad \pi_a(x) = -2 \frac{G}{N_c} (\bar{q}i\gamma^5 \tau_a q), \quad (2)$$

получим эквивалентный лагранжиан

$$\tilde{L} = \bar{q} \left[ \gamma^\nu i\partial_\nu - m_0 + \mu \gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 - \sigma - i\gamma^5 \pi_a \tau_a \right] q - \frac{N_c}{4G} [\sigma \sigma + \pi_a \pi_a]. \quad (3)$$

Поля бозонов, как следует из (2), подвержены преобразованиям изоспиновой подгруппы  $U_{I_3}(1)$ :  $\sigma \rightarrow \sigma$ ;  $\pi_3 \rightarrow \pi_3$ ;  $\pi_1 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_1 + \sin(2\alpha)\pi_2$ ;  $\pi_2 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_2 - \sin(2\alpha)\pi_1$ . При  $N_c \rightarrow \infty$  главный член разложения термодинамического потенциала (ТДП) модели по  $1/N_c$  имеет вид

$$\Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta) = \frac{(M - m_0)^2 + \Delta^2}{4G} + \\ + i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left\{ \left[ (p_0 + \mu)^2 - (E_\Delta^+)^2 \right] \left[ (p_0 + \mu)^2 - (E_\Delta^-)^2 \right] \right\}, \quad (4)$$

где  $E_\Delta^\pm = \sqrt{(E^\pm)^2 + \Delta^2}$ ,  $E^\pm = E \pm \nu$ ,  $\nu = \mu_l/2$  и  $E = \sqrt{p_1^2 + M^2}$ ,  $M = m_0 + \langle \sigma \rangle$ ,  $\Delta = \langle \pi_1 \rangle$ . Ясно, что ТДП ультрафиолетово расходится. Введем обрезание  $|p_1| < \Lambda$ , и тогда, согласно свойствам 2-мерной модели ГН, константа связи  $G$  и голая масса кварка  $m_0$  становятся функциями  $\Lambda$ . Процедура перенормировки массивной модели ГН хорошо известна (см., напр., [5, 6, 16, 17]). Следуя этой процедуре, для  $G \equiv G(\Lambda)$  запишем

$$\frac{1}{2G(\Lambda)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp_1 \frac{1}{\sqrt{M_0^2 + p_1^2}} = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{M_0^2 + \Lambda^2}}{M_0} \right) \quad (5)$$

и введем новый свободный конечный параметр перенормировки  $m$  ( $m_0 = mG(\Lambda)$ ), не зависящий от  $\Lambda$ . В результате получим следующий конечный перенормированный ТДП:

$$\Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta) = V_0(M, \Delta) - \frac{mM}{2} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \left\{ E_\Delta^+ + E_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} + \right. \\ \left. + (\mu - E_\Delta^+) \theta(\mu - E_\Delta^+) + (\mu - E_\Delta^-) \theta(\mu - E_\Delta^-) \right\}, \quad (6)$$

где

$$V_0(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right] = \\ = \Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta) \Big|_{\mu=0, \nu=0, m=0}. \quad (7)$$

Поскольку для системы с сильным взаимодействием четность в вакууме должна сохраняться, мы полагаем  $\Delta = 0$  в (7). Тогда глобальный минимум ТДП (7) оказывается в точке  $M = M_0$ , т. е. генерируемая в вакууме динамическая масса представляет собой параметр  $M_0$ , введенный в (5).

## 2. Фазовая структура модели

a) Частный случай:  $\mu = 0$ ,  $\mu_l = 0$ ,  $m \neq 0$ .

Введем параметр  $\alpha$  следующим образом:  $m \equiv \alpha M_0/\pi$ . Тогда из (6) получим термодинамический потенциал

$$\Omega_0(M, \Delta) = V_0(M, \Delta) - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi}. \quad (8)$$

Отсюда получим уравнения щели

$$\frac{\partial \Omega_0(M, \Delta)}{\partial M} = \frac{\partial \Omega_0(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 0, \quad (9)$$

где

$$\frac{\partial \Omega_0(M, \Delta)}{\partial M} = 2M \ln \left( \frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - \alpha M_0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Omega_0(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 2\Delta \ln \left( \frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right).$$

Система (9) имеет несколько решений, но точка глобального минимума (ТГМ) потенциала (8) соответствует значению  $\Delta = 0$ . Тогда первое уравнение в (9) относительно  $M$  имеет три решения разных знаков. Именно наибольшее из них по величине соответствует ТГМ потенциала. Эта щель  $M$  изображена на рис. 1 как функция  $\alpha$ . Поскольку плотности числа夸克ов  $n_q$  и изоспина  $n_l$  равны нулю в ТГМ, основное состояние модели при  $\mu = 0$  и  $\mu_l = 0$  соответствует вакууму, и поэтому щель  $M$  представляет собой динамическую массу кварка в вакууме. В хиральном пределе  $\alpha = 0$  щель  $M$ , очевидно, совпадает с  $M_0$ . Кроме того на рис. 1 представлено поведение массы пи-мезона  $M_\pi$  как функции  $\alpha$  при  $\mu = 0$  и  $\mu_l = 0$ . Оказывается, что  $M_\pi$  совпадает с критическим значением  $\mu_{lc}$  изотопического химического потенциала  $\mu_l$ , при котором система переходит из состояния вакуума в фазу пионного конденсата. Это и изображено на рис. 1. На этом рисунке также изображено поведение критического значения  $\mu_c$  химического потенциала  $\mu$  как функция  $\alpha$ , при котором система переходит из вакуумного состояния в нормальную фазу кварковой материи при  $\nu = 0$  (см. ниже).

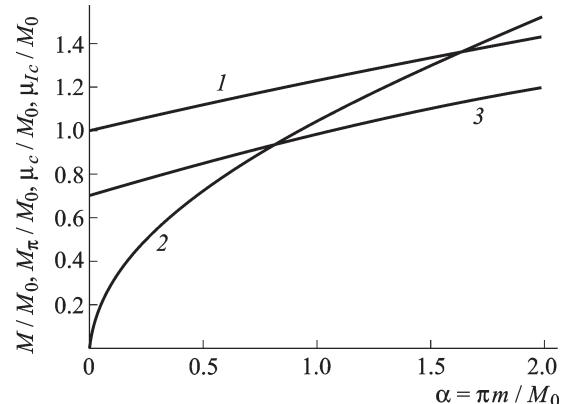


Рис. 1. Динамическая масса кварка  $M$  (кривая 1) и масса пи-мезона  $M_\pi$  (кривая 2) как функции  $\alpha \equiv \pi m / M_0$  при  $\mu = 0$ ,  $\mu_l = 0$ . Кривая 3 — критическое значение  $\mu_c$  для перехода вакуум — нормальная фаза кварковой материи (при  $\mu_l = 0$ ); критическое значение  $\mu_{lc}$  перехода вакуум — пионный конденсат изображено кривой 2, т. е.  $\mu_{lc} = M_\pi$

Соотношение между  $M$  и пионной массой  $M_\pi$  в вакууме (при  $\mu = 0$  и  $\mu_l = 0$ ) должно соответствовать реальной физике. Поэтому в дальнейшем в самом общем случае при  $\mu \neq 0$  и  $\nu \neq 0$  будем использовать обычно принимаемое в (3+1)-мерной модели НЙЛ при исследовании плотной кварковой материи соотношение (при  $\mu = 0$  и  $\mu_l = 0$ ) [18]:  $M = 350$  МэВ и  $M_\pi = 140$  МэВ,

т. е.  $M/M_\pi = 5/2$ . Тогда, согласно рис. 1, этот выбор будет соответствовать значению  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$ , что дает  $M/M_0 \approx 1.04$ ,  $M_\pi/M_0 \approx 0.42$  и  $m/M_0 \approx 0.05$ , где  $M_0$  — динамическая кварковая масса в безмассовой модели ГН при  $\mu = 0$  и  $\mu_I = 0$ .

б) Частный случай:  $\mu \neq 0$ ,  $\mu_I = 0$ .

Из соотношения (6) получим следующее выражение для ТДП при  $\mu \neq 0$ ,  $\mu_I = 0$ :

$$\Omega_\mu(M, \Delta) = V_0(M, \Delta) - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi} + \frac{\theta(\mu - \sqrt{M^2 + \Delta^2})}{\pi} \Omega'_\mu(M, \Delta), \quad (11)$$

где

$$\Omega'_\mu(M, \Delta) = (M^2 + \Delta^2) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2 - \Delta^2}}{\sqrt{M^2 + \Delta^2}} \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - M^2 - \Delta^2}. \quad (12)$$

Из уравнения щели для ТДП (11) следует, что в ТГМ  $\Delta = 0$ , а  $M$  удовлетворяет уравнению

$$\theta(\mu^2 - M^2) \ln \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2})^2}{M_0^2} + \theta(M^2 - \mu^2) \ln \frac{M^2}{M_0^2} = \frac{\alpha M_0}{2M}. \quad (13)$$

Как видно, при  $\mu < \mu_c$  ТГМ расположена в  $(M, \Delta = 0)$ , причем критическое значение  $\mu_c$  и щель  $M$  изображены на рис. 1. Система находится в вакуумном состоянии  $n_q = 0$  и  $n_I = 0$ . При  $\mu > \mu_c$  образуется фаза нормальной кварковой материи с конечной плотностью  $n_q$ , однако нулевой изоспиновой плотностью  $n_I = 0$  при  $\mu_I = 0$ . В частном случае, когда  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$ , поведение щели  $M$  в ТГМ приведено на рис. 2, где  $\mu_c = 0.76M_0$ .

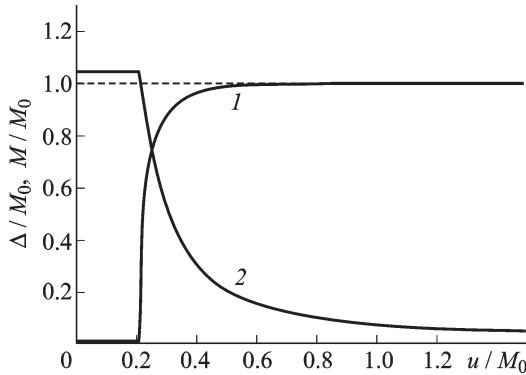


Рис. 2. Динамическая кварковая масса  $M$  как функция  $\mu$  при  $\mu_I = 0$  и  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$ . Здесь  $\mu_c/M_0 = 0.76$

в) Частный случай:  $\mu = 0$ ,  $\mu_I \neq 0$ .

При  $\mu = 0$  термодинамический потенциал определяется формулой (6), в которой вторая строка отсутствует, так как  $\theta$ -функции в этом случае равны нулю:

$$\Omega_\nu(M, \Delta) = V_0(M, \Delta) - \frac{mM}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \left\{ E_\Delta^+ + E_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right\}. \quad (14)$$

Данное выражение удается представить в проинтегрированном виде, если использовать эллиптические интегралы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}}, \\ \mathbf{I}_{-1} &= \int_{\frac{1}{A}}^\infty \frac{du}{u\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}}, \\ \mathbf{I}_1 &= \int_0^\Lambda \frac{u \, du}{\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2M((M + \nu)^2 + \Delta^2), \\ B &= 5M^2 + 6M\nu + \nu^2 + \Delta^2, \\ C &= 4M + 2\nu, \end{aligned} \quad (16)$$

причем изменение знака  $\nu \rightarrow -\nu$  приводит к замене параметров  $A, B, C$  на

$$\begin{aligned} A' &= 2M((M - \nu)^2 + \Delta^2), \\ B' &= 5M^2 - 6M\nu + \nu^2 + \Delta^2, \\ C' &= 4M - 2\nu \end{aligned} \quad (17)$$

и соответствующей замене интегралов (15)  $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_{-1}, \mathbf{I}_1$  на  $\mathbf{I}'_0, \mathbf{I}'_{-1}, \mathbf{I}'_1$ . Тогда (14) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \Omega_\nu(M, \Delta) &= V_0(M, \Delta) - \frac{mM}{2} - \\ &- \frac{M}{4\pi} [A(\nu\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_0) - A'(\nu\mathbf{I}'_1 - \mathbf{I}'_0)] + \\ &+ \frac{(M^2 + \Delta^2)}{2\pi} \times (\mathbf{I}_{-1} + \mathbf{I}'_{-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Данное выражение конечно в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ , несмотря на расходимость отдельных слагаемых. Отсюда получим уравнения щели

$$\frac{\partial \Omega_\nu(M, \Delta)}{\partial M} = \frac{\partial \Omega_\nu(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 0. \quad (19)$$

Напомним, что в  $(3+1)$ -мерной модели НЙЛ с пионным конденсатом в случае ненулевой голой (токовой) массы кварка [19] при некотором критическом значении изоспинового химического потенциала  $\mu_{lc}$ , являющегося пионной массой  $\mu_{lc} = M_\pi$  в вакууме при  $\mu = 0$  и  $\mu_I = 0$ , происходит непрерывный фазовый переход второго рода из фазы вакуума (возможной при  $\nu < \nu_c = M_\pi/2$ ) с  $M(\nu) \equiv M(0) \neq 0$ ,  $\Delta(\nu) = 0$  в fazu пионного конденсата (при  $\nu > \nu_c$ ), где  $M(\nu) \neq 0$ ,  $\Delta(\nu) \neq 0$ . Этой фазе соответствует ТГМ  $(M(\nu), \Delta(\nu))$  со следующими свойствами:  $M(\nu) \rightarrow M(\nu_c) \equiv M(0)$ ,  $\Delta(\nu) \rightarrow 0$ , если  $\nu \rightarrow \nu_{c+}$ . Здесь мы вновь используем обозначения  $\nu = \mu_I/2$  и  $M(0)$  для динамической массы кварка в вакууме.

Подобная картина пионной конденсации возникает и в рамках массивной модели ГН. В самом деле, численное исследование ТДП (6) при  $\mu = 0$  показывает, что в некоторой критической точке  $\nu_c$  происходит фазовый переход второго рода из вакуума в fazu пионной конденсации (т. е. ТГМ — непрерывная функция  $\nu$

в критической точке  $\nu = \nu_c$ ). Теперь для того чтобы определить  $\nu_c$  и показать, что равенство  $\nu_c = M_\pi/2$  также справедливо и в массивной модели ГН, необходимо заметить, что при  $\nu > \nu_c$  координаты  $(M(\nu), \Delta(\nu))$  ТГМ термодинамического потенциала удовлетворяют уравнениям (19). Поскольку при  $\nu = \nu_c$  имеет место непрерывный фазовый переход, т. е.  $\Delta(\nu_c) = 0$ ,  $M(\nu_c) \equiv M(0)$ <sup>1</sup>, в критической точке  $\nu = \nu_c$  эта пара равенств преобразуется в следующую:

$$\alpha M_0 = 2M(0) \ln \frac{M^2(0)}{M_0^2}, \quad (20)$$

$$\ln \frac{M^2(0)}{M_0^2} = 2\nu_c^2 \int_0^\infty dp_1 \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + M^2(0)} (p_1^2 + M^2(0) - \nu_c^2)}. \quad (21)$$

С помощью уравнения (21) из (20) находим

$$\frac{\alpha M_0}{2M(0)} = 2\nu_c^2 \int_0^\infty dp_1 \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + M^2(0)} (p_1^2 + M^2(0) - \nu_c^2)}. \quad (22)$$

Легко показать, что пионная масса  $M_\pi$  в вакууме удовлетворяет этому же соотношению и тогда  $\nu_c = M_\pi/2$ , т. е. критическое значение  $\mu_{lc}$  равняется пионной массе  $M_\pi$  при  $\mu = 0$  и  $\mu_l = 0$  при произвольных значениях  $\alpha$ . В результате графики  $\mu_{lc}$  и  $M_\pi$  как функции  $\alpha$  представлены одной кривой на рис. 1.

Итак, при  $\nu < \nu_c$  имеется фаза, соответствующая пустому пространству с  $n_q = n_l = 0$ , т. е. вакууму. В вакууме  $\Delta = 0$ , но щель  $M \neq 0$  и не зависит от  $\nu$  (ее зависимость от  $\alpha$  показана на рис. 1). При  $\nu > \nu_c$  в модели реализуется фаза пионной конденсации с  $n_q = 0$  и  $n_l \neq 0$ . В этой фазе обе щели  $M$  и  $\Delta$  отличны от нуля и зависят от  $\nu$ . Изоспиновая симметрия  $U_{l_3}(1)$  спонтанно нарушена в этой фазе. Для определенного значения параметра  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$  зависимость щелей от  $\nu$  представлена на рис. 3, где  $\nu_c \approx 0.21M_0$ .

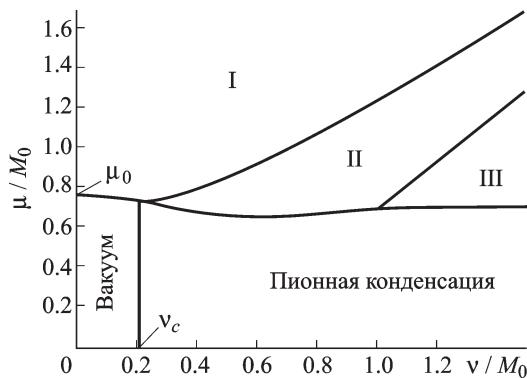


Рис. 3. Щели  $\Delta$  (кривая 1) и  $M$  (кривая 2) как функции  $\nu \equiv \mu_l/2$  в случае  $\mu = 0$  и  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$

г) Общий случай:  $\mu \neq 0$ ,  $\mu_l \neq 0$ .

Дифференцируя ТДП (6), получаем следующие уравнения щели:

$$\frac{\partial \Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta)}{\partial M} = \frac{\partial \Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 0, \quad (23)$$

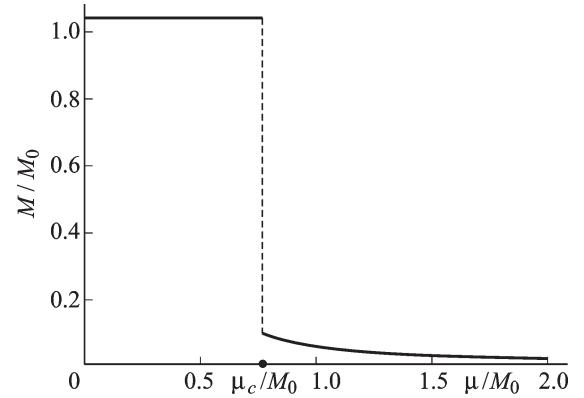


Рис. 4. Фазовый портрет модели в переменных  $\mu$  и  $\nu \equiv \mu_l/2$  при  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$ . Здесь  $\nu_c/M_0 \approx 0.21$ ,  $\mu_c/M_0 \approx 0.76$ . Все кривые на рисунке соответствуют фазовым переходам первого рода, за исключением границы между вакуумом и фазой пионного конденсата

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta)}{\partial M} &= \frac{\partial \Omega_\nu(M, \Delta)}{\partial M} + \\ &+ \frac{M}{\pi} \int_0^\infty dp_1 \left\{ \frac{E^+ \theta(\mu - E_\Delta^+)}{EE_\Delta^+} - \frac{E^- \theta(\mu - E_\Delta^-)}{EE_\Delta^-} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\mu,\nu}(M, \Delta)}{\partial \Delta} &= \frac{\partial \Omega_\nu(M, \Delta)}{\partial \Delta} + \\ &+ \frac{\Delta}{\pi} \int_0^\infty dp_1 \left\{ \frac{\theta(\mu - E_\Delta^+)}{E_\Delta^+} - \frac{\theta(\mu - E_\Delta^-)}{E_\Delta^-} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Фазовый портрет, построенный на основе этих уравнений, при  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$  изображен на рис. 4. Здесь видны вакуум, фаза пионного конденсата, а также три нормальные фазы кварковой материи I, II и III.

В фазе пионной конденсации щели  $\Delta$  и  $M$  отличны от нуля, и поэтому здесь изоспиновая симметрия  $U_{l_3}(1)$  спонтанно нарушена. В этой фазе щели не зависят от  $\mu$ , однако они существенно зависят от  $\nu$  (см. рис. 3). В точках  $(\nu, \mu)$  в других фазах на рис. 4  $\Delta$ -координата точки глобального минимума ТДП равна нулю, и это значит, что там изоспиновая симметрия  $U_{l_3}(1)$  сохраняется. В то же время  $M$ -координата отлична от нуля. В вакуумной фазе щель  $M$  не зависит от  $(\nu, \mu)$ , т. е. постоянна, а именно  $M \approx 1.04M_0$  при  $\alpha = \alpha_0 \approx 0.17$ . Поскольку на границе между вакуумной фазой и пионным конденсатом щель непрерывно зависит от  $\mu$  и  $\nu$ , можно заключить, что между этими фазами осуществляется переход второго рода.

### Заключение

В настоящей статье показано, что фаза заряженной пионной конденсации реализуется в некомпактной области изменения химических потенциалов:  $\mu_l > M_\pi$  и  $\mu$  не превышает  $M_0/\sqrt{2}$ , где  $M_\pi$  — масса пи-мезона в вакууме. В этой фазе изоспиновая симметрия  $U_{l_3}(1)$  спонтанно нарушена и появляются безмассовые голдстоунские бозонные возбуждения. Все однокварковые возбуждения в этой фазе имеют щель. В результате плотность числа кварков  $n_q$  исчезает в фазе пионной

<sup>1</sup> Функция  $M(0)$  от  $\alpha$  представляет собой щель  $M$ , изображенную на рис. 1 в качестве кривой 1.

конденсации. Точно такие же свойства этой фазы предсказываются и в рамках некоторых параметризаций модели НЙЛ (см., напр., [20–22]). В то же время в фазовой диаграмме модели НЙЛ фазы пионной конденсации занимают компактную область, и для некоторых схем параметризации может образоваться бесщелевая пионная конденсация [19–22].

При сравнительно больших значениях химического потенциала числа кварков  $\mu$  мы обнаружили довольно большое разнообразие нормальных фаз кварковой материи I, II и III (см. рис. 4), в которых  $n_q$  отлична от нуля. Оказалось, что в фазе I как  $u$ -, так и  $d$ -кварки бесщелевые квазичастицы, однако в фазах II и III только  $u$ -кварки бесщелевые, в то время как  $d$ -кварки имеют щель. Таким образом, такие динамические эффекты в плотной кварковой материи, как явления переноса (например, проводимость), могут происходить качественно различным образом в фазах I и II, III. Более реалистическая модель для изучения фазовых диаграмм квантовой хромодинамики должна включать конечную температуру и неоднородные конденсаты [14, 15].

Авторы выражают благодарность профессору Д. Эберту за полезное обсуждение результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке DAAD (Германской службы академических обменов).

### Список литературы

1. Nambu Y., Jona-Lasinio G. // Phys. Rev. 1961. **D112**. P. 345.
2. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. 1974. **D10**. P. 3235.
3. Feinberg J. // Ann. Phys. 2004. **309**. P. 166.
4. Thies M. // J. Phys. 2006. **A39**. P. 12707.
5. Klimenko K.G. // Theor. Math. Phys. 1988. **75**. P. 487.
6. Barducci A., Casalbuoni R., Modugno M., Pettini G. // Phys. Rev. 1995. **D51**. P. 3042.
7. Chodos A., Minakata H., Cooper F. et al. // Phys. Rev. 2000. **D61**. P. 045011.
8. Ohwa K. // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 085040.
9. Schon V., Thies M. // Phys. Rev. 2000. **D62**. P. 096002.
10. Brzozka A., Thies M. // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 125001.
11. Mermin N.D., Wagner H. // Phys. Rev. Lett. 1966. **17**. P. 1133.
12. Coleman S. // Commun. Math. Phys. 1973. **31**. P. 259.
13. Ebert D., Klimenko K.G., Tyukov A.V., Zhukovsky V.C. // Phys. Rev. 2008. **D78**. P. 045008.
14. Basar G., Dunne G.V. // Phys. Rev. Lett. 2008. **100**. P. 200404; Phys. Rev. 2008. **D78**. P. 065022.
15. Basar G., Dunne G.V., Thies M. // Phys. Rev. 2009. **D79**. P. 105012.
16. Aoki S., Higashijima K. // Progr. Theor. Phys. 1986. **76**. P. 521.
17. Feinberg J., Zee A. // Phys. Lett. 1997. **B411**. P. 134.
18. Ebert D., Klimenko K.G., Yudichev V.L. // Phys. Rev. 2005. **C72**. P. 015201; Phys. Rev. 2005. **D72**. P. 056007; Phys. Rev. 2007. **D75**. P. 025024.
19. He L., Jin M., Zhuang P. // Phys. Rev. 2005. **D71**. P. 116001; Phys. Rev. 2006. **D74**. P. 036005.
20. Ebert D., Klimenko K.G. // J. Phys. 2006. **G32**. P. 599; Eur. Phys. J. 2006. **C46**. P. 771.
21. Andersen J.O., Kyllingstad L. // arXiv:hep-ph/0701033.
22. Abuki H., Anglani R., Gatto R. et al. // arXiv:0809.2658.

### Pion condensation in the Gross–Neveu model

V. Ch. Zhukovsky<sup>1,a</sup>, K. G. Klimenko<sup>2,b</sup>, T. G. Khunjua<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

<sup>2</sup>IHEP and University of Dubna (Protvino Branch), Protvino 142281, Moscow Region, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>zhukovsk@phys.msu.ru, <sup>b</sup>kklim@ihep.ru.

Phase structure of the two-dimensional Gross–Neveu model is studied in variables of the quark number and isospin chemical potentials at zero temperature in the limit of large number of field components  $N_c \rightarrow \infty$ .

**Keywords:** Gross–Neveu model, quark matter.

**PACS:** 12.38.Lg.

*Received 6 October 2009.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

### Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Клименко Константин Григорьевич — докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., гл. науч. сотр.; тел.: (4967) 71-35-75, e-mail: kklim@ihep.ru.
3. Хундуза Тамаз Григорьевич — студент; e-mail: gtamaz@gmail.com.