

Отражение волны конечной амплитуды от фронта искривленной ударной волны

Е. С. Гришечкин, Ф. В. Шугаев^a

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ^ashugaev@phys.msu.ru*

Статья поступила 20.04.2009, подписана в печать 22.10.2009

Рассмотрено падение волны конечной амплитуды на фронт нестационарной ударной волны произвольной формы со стороны сжатого газа. Получено в аналитическом виде соотношение, связывающее параметры отраженной волны с параметрами падающей волны, кривизной и интенсивностью ударной волны.

Ключевые слова: нестационарная искривленная ударная волна, кривизна ударной волны, волна сжатия, волна разрежения, уравнения Эйлера.

УДК: 533.6.011.72. PACS: 51.20.+d.

Введение

Взаимодействие ударной волны с малыми возмущениями исследовалось рядом авторов [1, 2]. Взаимодействие плоских ударных волн между собой, а также слабых ударных волн с волнами разрежения и сжатия рассмотрено в книге [3].

Ниже анализируется задача о взаимодействии искривленной нестационарной ударной волны с волной конечной амплитуды, падающей на фронт ударной волны со стороны сжатого газа. Сама волна распространяется по однородному покоящемуся газу. Используются лагранжевы переменные.

1. Характеристики уравнений Эйлера

Течение идеального газа описывается системой уравнений Эйлера, которая в лагранжевых переменных имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} g^{jk} \frac{\partial p}{\partial u^j} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + g^{jk} \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \frac{\partial x_i}{\partial u^k} &= 0, \\ i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь V^i — компоненты скорости, ρ — плотность, p — давление, x^i — эйлеровы координаты частицы, g^{jk} — контравариантные компоненты метрического тензора.

Функции $x^i = x_i$, V^i , p , ρ зависят от времени t и лагранжевых переменных $u^1, u^2, u^3 = \tau_c$, где u^α , $\alpha = 1, 2$, — координаты вдоль фронта волны, τ_c — момент времени, в который фронт волны пересекает рассматриваемую частицу. Ковариантные компоненты метрического тензора таковы:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^m}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_m}{\partial u^\beta}, \\ g_{\alpha 3} = g_{3\beta} &= \frac{\partial x^m}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_m}{\partial \tau_c} = \frac{\partial x^m}{\partial u^\alpha} c n_m = 0, \\ \alpha &= 1, 2; \quad \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь c — скорость звука, n_m есть проекция внешней единичной нормали к фронту волны. Контравариантные компоненты равны $g^{\alpha 3} = g^{3\beta} = 0$. Величина $g^{33} = \frac{1}{c^2}$.

Предполагаем, что диссипация отсутствует: $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$, где s — энтропия. В этом случае

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Умножим уравнение непрерывности на c . Система принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial \tau_c} n^i + \frac{1}{\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} &= 0, \\ \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial V^i}{\partial \tau_c} n_i + c g^{\alpha\beta} \frac{\partial V^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Составим линейную комбинацию уравнений системы, умножив первое уравнение на вектор l_i и добавив к полученной сумме уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned} l_i \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + c n_i \frac{\partial V^i}{\partial \tau_c} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial \tau_c} l_i n^i + \\ + \frac{1}{\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} l_i + c g^{\alpha\beta} \frac{\partial V^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Полученная линейная комбинация уравнений газодинамики будет содержать только внутренние производные по отношению к гиперповерхности в четырехмерном пространстве u^1, u^2, τ_c, t лишь в том случае, если $l_i = n_i$. При этом имеем

$$n_i \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + n_i \frac{\partial V^i}{\partial \tau_c} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial \tau_c} + c g^{\alpha\beta} \frac{\partial V^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta} = 0.$$

Вводя оператор $\frac{d}{dt_+} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau_c}$, получим

$$n_i \frac{dV^i}{dt_+} + \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt_+} + c g^{\alpha\beta} \frac{\partial V^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим дифференцирование вдоль луча в противоположном направлении

$$\frac{d}{dt_-} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau_c}.$$

Произведя замену $n_i \Rightarrow -n_i$, $\tau_c \Rightarrow -\tau_c$, получим аналогичное уравнение

$$n_i \frac{dV^i}{dt_-} - \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt_-} - cg^{\alpha\beta} \frac{\partial V^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta} = 0. \quad (2)$$

Для получения полной характеристической системы необходимо добавить к двум последним уравнениям выражение для проекции ускорения на плоскость, касательную к фронту, и выражение для изменения единичной нормали [3]:

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u^\sigma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial u^\sigma}, \quad \frac{dn^i}{dt} = -g^{\alpha\beta} \frac{\partial c}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}, \quad \sigma = 1, 2. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) образуют полную характеристическую систему уравнений Эйлера.

2. Отражение волны конечной амплитуды от фронта ударной волны

Перейдем к течению за ударной волной. Введем τ_s — момент времени, в который фронт ударной волны пересекает рассматриваемую частицу. Соотношение между τ_s и τ_c таково: $d\tau_s = \frac{c_2}{\varepsilon G} d\tau_c$, где $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, G — скорость распространения ударной волны, индексы «1» и «2» относятся к состоянию перед и за волной соответственно. Далее предполагаем, что в рассматриваемый момент времени фронт приходящей волны возмущения совпадает с фронтом ударной волны. Уравнения (1) и (2) записутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_i \frac{dV_2^i}{dt_s} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{dp_2}{dt_s} &= - \left(1 - \frac{\varepsilon G}{c_2} \right) \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial \tau_c} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial \tau_c} \right) + \\ &\quad + 2c_2(1-\varepsilon)GH, \\ n_i \frac{dV_2^i}{dt_s} - \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{dp_2}{dt_s} &= \left(1 + \frac{\varepsilon G}{c_2} \right) \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial \tau_c} - \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial \tau_c} \right) - \\ &\quad - 2c_2(1-\varepsilon)GH, \end{aligned}$$

$2H = g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — тензор кривизны ударной волны, H — средняя кривизна фронта ударной волны, оператор $\frac{d}{dt_s} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau_s}$. Мы учли значение скорости за волной $V_2^i = (1-\varepsilon)Gn^i$, а также производную нормали вдоль фронта [4]

$$\frac{\partial n^i}{\partial u^\alpha} = -g^{\sigma\chi} b_{\alpha\sigma} \frac{\partial x^\chi}{\partial u^\alpha}, \quad \sigma = 1, 2; \quad \chi = 1, 2.$$

Принимая во внимание соотношения на ударной волне для совершенного газа, а также вводя физические величины вместо производных по τ_s , найдем окончательно:

$$\begin{aligned} \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} - \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_- &= \\ &= K_1 \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_+ + K_2 c_1 H, \quad (4) \end{aligned}$$

$$K_1 = -\frac{(\gamma+1)(M^2-1)}{(1+\sqrt{f_1/f_2})^2} \frac{(1+M^2(1-2\sqrt{f_1/f_2}))}{(1+M^2(1+2\sqrt{f_1/f_2}))},$$

$$K_2 = \frac{8(M^4-1)}{(\gamma+1)M(1+\sqrt{f_1/f_2})(1+M^2(1+2\sqrt{f_1/f_2}))},$$

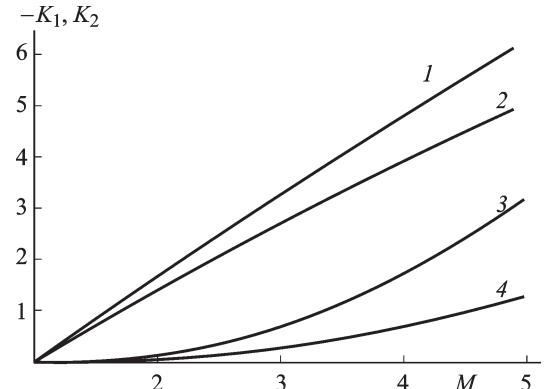
$$f_1 = 2 + (\gamma-1)M^2, \quad f_2 = 2\gamma M^2 - \gamma + 1.$$

Здесь M — число Маха ударной волны, $\gamma = C_p/C_v$ — отношение удельных теплоемкостей, ось l направлена вдоль внешней нормали к фронту волны.

Комбинации

$$\left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_+, \quad \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} - \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_-$$

относятся к падающей $\left(\frac{du^i}{dt} = cn^i \right)$ и отраженной $\left(\frac{du^i}{dt} = -cn^i \right)$ волне соответственно. Физический смысл коэффициентов K_1, K_2 таков. Величина K_1 есть коэффициент отражения возмущения от фронта плоской ударной волны. Величина K_2 определяет амплитуду возмущения, распространяющегося по сжатому газу от фронта ударной волны единичной кривизны при отсутствии возмущения, приходящего к ударной волне. Коэффициенты $K_1 < 0$ и $K_2 > 0$ стремятся к нулю при $M \rightarrow 1$. Зависимость этих коэффициентов от числа Маха ($\gamma = 1.4$; $\gamma = 5/3$) показана на рисунке.



Зависимость коэффициентов K_1, K_2 от числа Маха. Кривые 1, 2 — K_2 , 3, 4 — K_1 , 1, 3 — $\gamma = 1.4$, 2, 4 — $\gamma = 5/3$

Как известно, в случае плоской ударной волны ($H = 0$) падающая на нее волна разрежения отражается в виде волны сжатия и наоборот. За плоской ударной волной существуют падающее и отраженное возмущения, исключая тривиальный случай, когда течение за этой волной однородно. Рассмотрим особенности, возникающие при $H \neq 0$. При $H = -K_1 \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_+ / (K_2 c_1)$ отраженное возмущение отсутствует. В случае сходящейся ударной волны ($H > 0$) при $H > -K_1 \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_+ / (K_2 c_1)$ волна разрежения отражается в виде волны разрежения. В случае расходящейся ударной волны ($H < 0$) при $H < -K_1 \left(n_i \frac{\partial V_2^i}{\partial l} + \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\partial p_2}{\partial l} \right)_+ / (K_2 c_1)$ волна сжатия отражается в виде волны сжатия. В остальных случаях процесс взаимодействия качественно тот же самый, что и для плоской ударной волны. Пользуясь соотношением (4), получаем в линейном случае (амплитуды возмущений и кривизна ударной волны малы) выражение для инварианта Римана r_- в окрестности рассматриваемой точки

$$r_- (u^1, u^2, t + \tau_c) = \frac{B}{A} r_+ (u^1, u^2, \xi) +$$

$$+ 4 \frac{(A+B)(M^2 - 1) \sqrt{f_1 f_2}}{AM^2(\gamma + 1)^2} c_1^2(t + \tau_c) H,$$

$$\xi = - \frac{(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{\left(1 + \sqrt{f_1/f_2}\right)^2} (t + \tau_c),$$

$$r_- = n_i V_2^i - \int \frac{dp_2}{\rho_2 c_2}, \quad r_+ = n_i V_2^i + \int \frac{dp_2}{\rho_2 c_2}.$$

Величина $t + \tau_c$ предполагается малой. При $M = 1$ инвариант r_- не зависит от времени, т. е. отраженная волна отсутствует, как и следовало ожидать.

Заключение

Таким образом, получено аналитическое соотношение для параметров отраженной волны конечной ам-

плитуды при взаимодействии между ударной волной и падающей на нее волной разрежения или сжатия. Выполнен анализ эффектов, возникающих за счет кривизны ударной волны: отсутствие отраженной волны при определенных значениях кривизны, изменение типа отражения.

Список литературы

1. *McKenzie J.F., Westpfal K.O.* // Phys. Fl. 1968. **11**. P. 2350.
2. *Shugaev F.V., Shtemenko L.S.* Propagation and reflection of shock waves. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 1998.
3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М., 1978.
4. *Thomas T.Y.* Concepts from tensor analysis and differential geometry. N. Y., 1966.

The reflection of a wave of finite amplitude from a curvilinear unsteady shock wave

E. S. Grishechkin, F. V. Shugaev^a

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^ashugaev@phys.msu.ru.

The reflection of a wave of finite amplitude from a curvilinear unsteady shock wave has been analyzed. A formula has been obtained in closed form. The reflection coefficient depends on the curvature of the shock, too.

Keywords: unsteady curvilinear shock wave, shock curvature, compression wave, rarefaction wave, Euler equations.

PACS: 51.20.+d.

Received 20 April 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

Сведения об авторах

1. Гришечкин Евгений Сергеевич — аспирант.
2. Шугаев Федор Васильевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-28-16, e-mail: shugaev@phys.msu.ru.