

## АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

### О роли резонансных объектов в статистических распределениях кентавров и занептунных объектов

Б. Р. Мушаилов, В. С. Теплицкая<sup>a</sup>

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ), отдел астрометрии. Россия, 119991, Москва, Университетский пр., д. 13.*

*E-mail: <sup>a</sup>verateplic@yandex.ru*

Статья поступила 08.07.2009, подписана в печать 13.10.2009

Исследованы некоторые закономерности в распределениях кентавров и объектов «рассеянного диска», а также объектов пояса Койпера по большим полуосям, эксцентриситетам и углам наклонов орбит. Установлено, что около половины из исследованных объектов движутся по резонансным орбитам, предсказанным ранее. Интерпретировано расхождение максимума в наблюдаемом распределении по большим полуосям с точным орбитальным резонансом, определенным в рамках классической задачи трех тел.

**Ключевые слова:** пояс Койпера, «рассеянный диск», кентавры, орбитальные резонансы, занептунные объекты, статистические распределения.

УДК: 521.13. PACS: 96.30.Xa.

#### Введение

Существование занептунного пояса было предсказано К. Эджеверсом (1949) и Дж. Койпером (1951). Пояс Койпера располагается на расстоянии 30–50 а. е. от Солнца.

Возможность существования нескольких «поясов Койпера» была предсказана в [1, 2]. Существование нескольких занептунных поясов вероятно в области  $100 \leq a < 1000$  а. е. Обнаружение в настоящее время за орбитой Нептуна крупных объектов (диаметром порядка 1000 км) не исключает возможности обнаружения и больших планет. В частности, в работе [3] были предсказаны области за орбитой Нептуна, где могут находиться гипотетические большие планеты, а также вычислены интервалы средних движений, связанные резонансами с этими гипотетическими планетами.

Исследованию кентавров и занептунных объектов посвящено значительное число работ. В ряде работ выделяют два основных динамических класса: кентавры и объекты рассеянного диска, а также объекты пояса Койпера. Последние условно подразделяются на классические объекты пояса Койпера и несколько подклассов резонансных объектов [4]. Причем под резонансными подразумеваются объекты, имеющие либрационный тип движения [5, 6]. Эволюция орбит этих объектов и современное строение занептунного пояса предполагаются обусловленными динамической эволюцией Нептуна [7–9].

Однако в большинстве работ, посвященных исследованию эволюции занептунных объектов, интегрирование проводится на промежутках времени (миллионы лет), на которых существенны эффекты динамической неустойчивости, а поэтому достоверность результатов, получаемых в рамках гравитационной модели, вызывает сомнение. Исследование в рамках концепции частичной детерминированности динамической эволюции

объектов занептунного пояса на основе ограниченной эллиптической задачи трех тел с учетом гравитационных возмущений от Урана, Сатурна и Юпитера [10–12] позволяет построить надежную модель, основывающуюся на аналитических методах, предсказать эволюцию орбитальных параметров объектов занептунного пояса и указать наиболее вероятные зоны для поиска новых объектов. Основываясь на результатах [10], авторы работы [13] выявили ряд объектов в указанных зонах. Ввиду постоянного роста популяции обнаруживаемых занептунных объектов систематизация наблюдаемых распределений этих объектов по орбитальным параметрам остается актуальной и в настоящее время. Независимо от того, каков характер движения (либрационный или циркуляционный), резонансные эффекты обусловлены соизмеримостью средних движений гравитирующих объектов. Следовательно, вопреки ряду работ, часть так называемых классических объектов пояса Койпера на самом деле относятся к резонансным, поскольку движутся в орбитальных соизмеримостях с большими планетами Солнечной системы. Несмотря на значительное число работ, посвященных исследованию статистических распределений по орбитальным параметрам объектов пояса Койпера [4–9], до настоящего времени не уделялось должного внимания выявлению и теоретическому обоснованию истинных закономерностей в наблюдаемых распределениях занептунных объектов и кентавров, чemu и посвящена настоящая работа.

#### 1. Резонансы

Условие двухчастотного резонанса означает выполнение рациональной квазисоизмеримости частот вида  $[(k+l)n - kn'] \leq O(\sqrt{\mu})$ , где  $l$  — порядок;  $k$  — кратность резонанса;  $l, k$  — натуральные числа;  $n < n'$  — частоты или среднесуточные движения гравитирующих тел;  $\mu$  — приведенная масса. Резонансная полоса, имеющая

порядок  $2n'\sqrt{\mu}/(k+l)$ , локализована около значения точной соизмеримости:  $n/n' = k/(k+l)$  в случае  $n < n'$  или  $n/n' = (k+l)/k$  в случае  $n > n'$ . Соизмеримости первого порядка (линдбладовские резонансы) характеризуются максимальным резонансным эффектом. Максимальная амплитуда резонансного эффекта при фиксированном  $l$  достигается при  $k=1$ . Орбитальными резонансами связаны движения некоторых больших планет, спутников, астероидов, комет, метеорных потоков Солнечной системы, экзопланетных систем.

Динамическая эволюция орбит многих из вышеуказанных тел может быть корректно интерпретирована на основе резонансного варианта классической задачи трех тел с учетом вековых возмущений от сторонних тел.

Как следует из работы [11], при учете вековых возмущений от планет-гигантов Юпитера, Сатурна и Урана ( $P_i = 1, 2, 3$ ) аналитическое выражение для большой полуоси ( $a$ ) орбиты пассивно гравитирующего тела (занептунного объекта) имеет вид

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0} + \Delta, \quad (1)$$

где  $a_0$  — большая полуось при отсутствии возмущений от планет-гигантов,

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{a_i} \beta_i [L_{1/2}^{(0)}(\beta_i) + \beta_i D L_{1/2}^{(0)}(\beta_i)], \\ \Delta_0 &= \frac{1}{3} \left( \frac{k}{(k+l)(1+\mu_\psi)} \right)^{2/3}, \quad \beta_i = \frac{a_i}{\gamma}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\gamma$  — интегральная постоянная,  $\mu_\psi$  — масса Нептуна, а  $m_{1,2,3}$  и  $a_{1,2,3}$  — массы и большие полуоси орбит Юпитера, Сатурна и Урана соответственно. За единицу массы принята масса Солнца, большая полуось орбиты Нептуна принята за единицу,  $L_{(1/2)}^0$  — соответствующий коэффициент Лапласа.

Большая полуось орбиты занептунного объекта, отвечающая точному орбитальному резонансу, с учетом вековых возмущений от планет-гигантов имеет вид

$$a = \alpha_\psi \left[ \left( \frac{k+l}{k} \right)^{1/3} - \Delta \right]^2, \quad (3)$$

где  $a_\psi$  — большая полуось орбиты Нептуна.

Для резонанса первого порядка ( $l=1$ ) в переменных  $x = \sqrt{2\xi} \cos(\eta)$ ,  $y = \sqrt{2\xi} \sin(\eta)$ , в которых величины  $\xi$  и  $\eta$  определены в [11], решение ограниченной эллиптической задачи трех тел с учетом вековых возмущений от планет-гигантов сводится к интегрированию автономной канонической системы уравнений с одной степенью свободы вида

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

с гамильтонианом

$$F = (x^2 + y^2)^2 + A(x^2 + y^2) + Bx, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{k+1} \left\{ \sqrt{\gamma} - E^{-2} + \Delta \right\}, \quad E = \left[ \frac{k}{k+1} \sqrt{1+\mu_\psi} \right]^{1/6}, \\ \gamma &= a^{-1} \left[ -k + (1+k) \sqrt{1-e^2} \cos i \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$I^2 = 4\sqrt{a} \sqrt{1-e^2} \sin^2(i/2),$$

$I$  и  $\gamma$  — интегралы задачи;  $a$ ,  $e$ ,  $i$  — большая полуось, эксцентриситет и наклонение орбиты занептунного объекта  $P$ . Выражение для коэффициента  $B$  также приведено в [11].

Стационарные решения для переменных  $x$ ,  $y$  определяются системой алгебраических уравнений

$$4x(x^2 + y^2) + 2Ax + B = 0, \quad 4y(x^2 + y^2) + 2Ay = 0. \quad (6)$$

Конфигурация фазовой плоскости представлена на рис. 1.

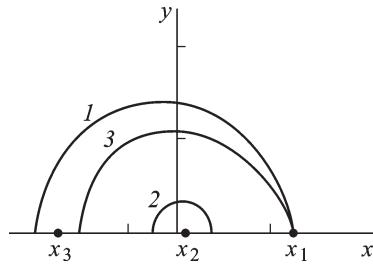


Рис. 1. Конфигурация фазовой плоскости. Траектории, проходящие через стационарную точку  $(x_1, 0)$ , являются сепаратрисами, разграничивающими три характерные области. Ввиду симметрии приведена лишь верхняя полуплоскость

Основываясь на интегралах задачи (5), можно представить области неустойчивости на диаграмме  $(e, a)$  и сопоставить их с наблюдаемыми данными (рис. 2).

Занептунные объекты могут существовать длительное время, если элементы их орбит располагаются вне заштрихованных областей, концентрируясь у границ этих зон. Учитывая асимметрию теоретических «зон неустойчивостей» относительно значений точной соизмеримости  $n_0(k)$ , легко понять, что в резонансных зонах при прочих равных условиях существование занептунных объектов (и с большими значениями эксцентриситетов) более вероятно при  $n < n_0(k)$ , чем при  $n > n_0(k)$ .

Из рис. 2 следует, что обнаруживаемые занептунные объекты располагаются на плоскости орбитальных параметров  $(e, a)$  в соответствии с теоретическими результатами, вне зон неустойчивостей, за исключением 3.7% объектов для случая резонанса 2:1 и 0.55% для резонанса 3:2 с Нептуном, которые наиболее подвержены миграции.

Для объектов, находящихся в орбитальных соизмеримостях (4:3, 3:2, 2:1) с Нептуном, на основании орбитальных параметров, приведенных в [14], были вычислены положения соответствующих изображающих точек на фазовой плоскости. Оказалось, что для соизмеримости 4:3 в либрационной зоне (зоне 3) находится 90% всех обнаруженных объектов, для соизмеримости 3:2 — 83% объектов, для резонанса 2:1 с учетом вековых возмущений — 65% объектов.

Вероятности переходов в либрационную зону можно оценить, исследуя вероятности переходов траекторий из одних областей фазовой плоскости в другие под действием различных возмущающих факторов, характеризуемых независимыми параметрами  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ .

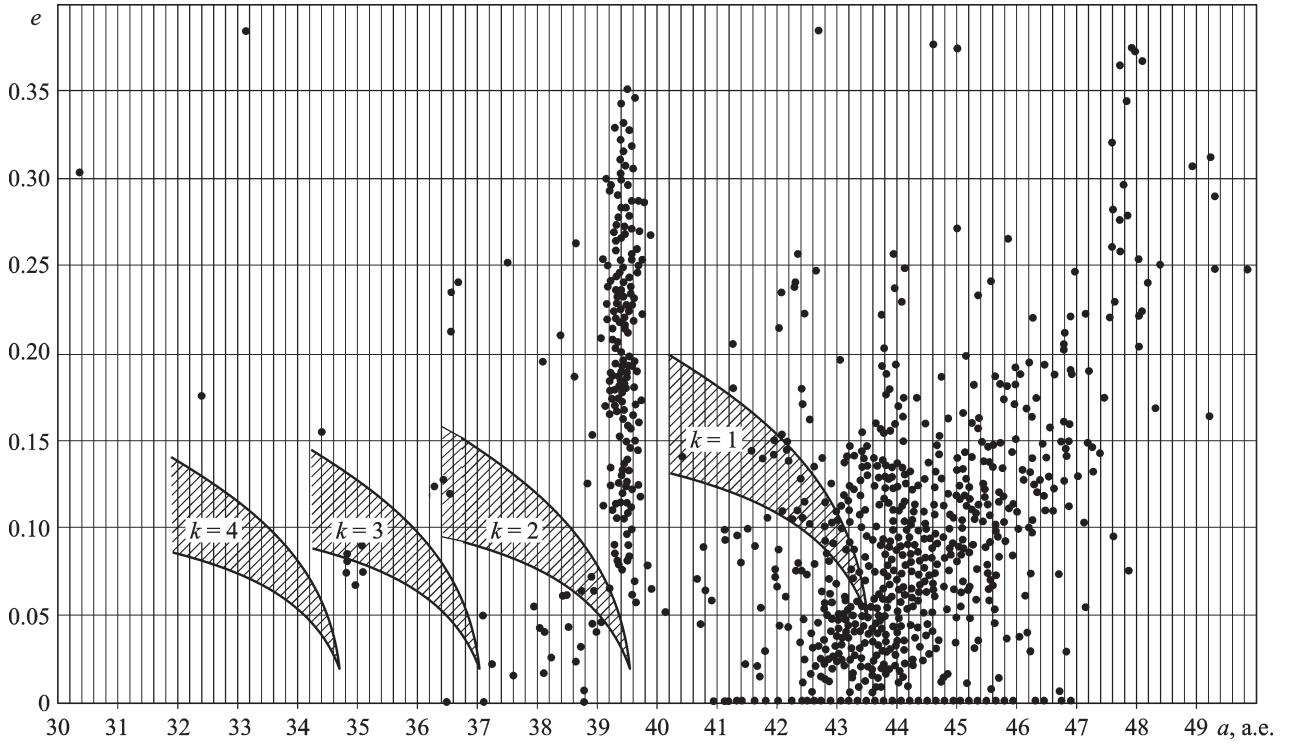


Рис. 2. Области неустойчивости на диаграмме  $e - a$  в случае резонансов первого порядка для различных кратностей  $k$

Вероятность перехода траектории под действием возмущений из области  $i$  в область  $j$  фазовой плоскости определяется выражением [11]

$$W_{ij} = \left( \frac{(-1)^j \frac{2}{4-i} \Delta' + (j-3) \frac{\pi}{2}}{(-1)^i \frac{\pi}{2} - \Delta'} \right), \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 3, \quad (7)$$

в котором  $\Delta' = \arcsin \varepsilon_1 + \psi_1 \varepsilon_2$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\psi_2}{1 + \text{sign}(1 - \psi_2) \varepsilon_3} \right)^{1/4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - 4\varepsilon_3^2)^{1/2}, \\ \varepsilon_3 &= \cos \left( \frac{\pi + \arccos |1 - \psi_2|}{3} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — независимые параметры, связанные с коэффициентами гамильтониана (4) следующим образом:

$$\psi_1 = -\frac{A}{B} \frac{\partial B / \partial \delta}{\partial A / \partial \delta}, \quad \psi_2 = -\frac{27}{4} \frac{B^2}{A^3}.$$

Коэффициент  $B$  (при фиксированной  $\mu_\psi$ ) зависит от кратности и порядка резонанса,  $A$  — функция состояния системы, характеризуемая интегральными постоянными.

Вероятности перехода занептуенного объекта из зоны  $i$  в зону  $j$  в зависимости от  $\text{ctg } \Delta'(\delta)$  представлены на рис. 3. Для исследуемых объектов вероятности переходов из одних областей фазового пространства в другие существенно зависят от параметра  $\rho = (\partial B / \partial \delta) / (\partial A / \partial \delta)$ . Например, для резонансов 4:3 и 3:2 выполняется неравенство  $W_{13} > W_{12}$  при значении  $\rho$  от  $-0.05$  до  $-0.03$ , в то время как  $W_{23} > W_{21}$  при значении  $\rho$  от  $0.03$  до  $0.05$ . В случае резонанса 2:1 справедливо неравенство  $W_{23} > W_{21}$  при значении  $\rho$  от  $-0.018$  до  $0.011$  и  $W_{13} > W_{12}$  при значении  $\rho$  от  $0.01$  до  $0.02$ .

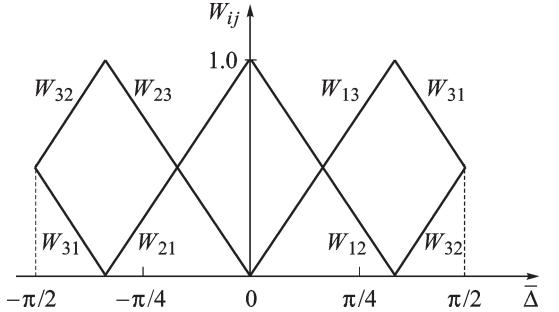


Рис. 3. Вероятности переходов  $W_{ij}$  занептуенных объектов из зоны  $i$  в зону  $j$  в зависимости от величины  $\text{ctg } \Delta'(\delta) = \bar{\Delta}$

В рамках различных вариантов задачи трех тел при наличии некоторых специальных условий в [3] были предсказаны параметры орбит гипотетических больших планет, а также резонансные зоны, связанные с этими планетами, где на космогонических интервалах времени могут располагаться гипотетические малые тела. В работе [15] было предсказано также существование резонансных объектов между орбитами планет-гигантов, а в [11] были предвычислены области существования резонансных занептуенных объектов и исследована эволюция их орбитальных элементов. Резонансные зоны из работ [2, 11, 15] сводены в таблицу.

В таблице «Планета 1» и «Планета 2» — гипотетические большие планеты, для которых также приведены связанные с ними зоны соизмеримости (ширина зон оценивалась равной порядка  $\sqrt{\mu}$ ) и количество объектов, обнаруженных в этих зонах. Выделенная строка соответствует случаю учета вековых возмущений (3). Среди кентавров и объектов «рассеянного

**Распределение исследуемых объектов по резонансным зонам**

Планета	Соизмеримость	Интервал $\Delta a$ , а. е.	Количество	
			объектов пояса Койпера	кентавров и объектов рассеянного диска
Сатурн	2:1	14.826	15.681	— 2
Сатурн	5:2	17.181	17.858	— 4
Сатурн	3:1	19.845	21.207	— 9
Сатурн	4:1	23.662	24.518	— 7
Уран	5:3	27.265	27.412	— 1
Нептун	5:4	34.624	35.165	6 0
Нептун	4:3	36.062	36.800	10 0
Нептун	3:2	38.499	40.371	225 1
Уран	3:1	39.280	40.686	191 1
Нептун	5:3	41.901	42.577	49 2
Нептун	7:4	43.374	43.894	140 0
Нептун	2:1	46.482	48.836	76 0
<b>Нептун</b>	<b>2:1</b>	<b>42.599</b>	<b>44.48</b>	<b>433 0</b>
«Планета 1»	1:2	47.185	47.416	5 0
Уран	4:1	47.761	49.432	20 1
Нептун	5:2	54.669	55.430	— 8
Уран	5:1	56.263	58.123	— 8
«Планета 1»	2:3	57.207	57.394	— 3
Нептун	3:1	61.004	64.023	— 14
Нептун	4:1	73.726	77.459	— 4
«Планета 1»	4:3	90.852	91.149	— 1
«Планета 2»	3:4	123.740	124.222	— 1

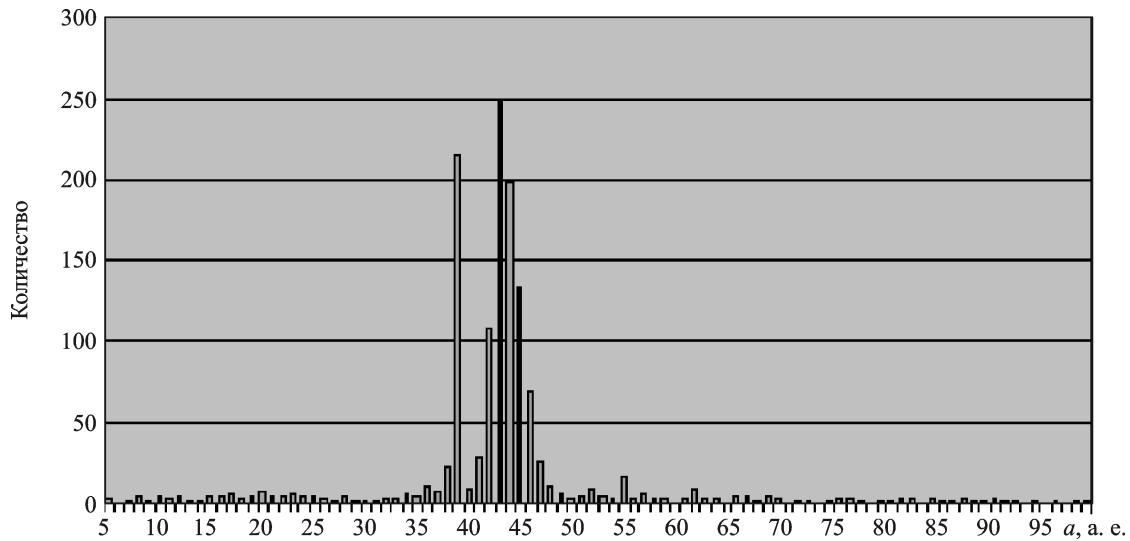


Рис. 4. Общее распределение кентавров и занептунных объектов по большим полуосям

диска» в приводимых резонансных зонах оказывается более 26.3%, а среди объектов пояса Койпера — 79% с учетом (3). Суммарная полоса этих зон охватывает 17.65% от области  $5 \div 125$  а. е. для кентавров и объектов рассеянного диска и 32.7% от области  $30 \div 50$  а. е. для объектов пояса Койпера.

## 2. Закономерности в наблюдаемых распределениях

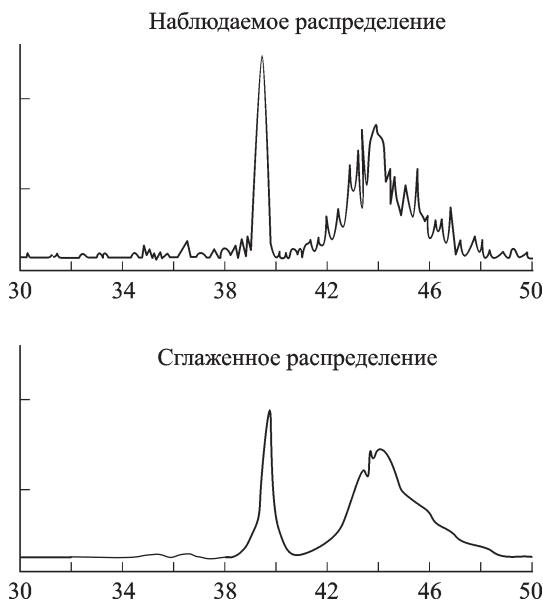
Массив обнаруженных в настоящее время кентавров и занептунных объектов позволяет исследовать статистически значимые закономерности в распределениях

рассматриваемых объектов по некоторым их орбитальным параметрам. С этой целью авторами настоящей работы по данным [14] по состоянию на май 2009 г. были построены распределения кентавров и занептунных объектов по большим полуосям (рис. 4), эксцентриситетам и углам наклонов орбит и проведено сопоставление этих данных с теоретическими результатами.

В распределении объектов пояса Койпера по большим полуосям наблюдаются два явно выраженных максимума, причем значения больших полуосей, отвечающие наблюдаемым максимумам распределений 39–40,

43–44 а. е. в пределах точности вычислений, совпадают с предсказанными в [11, 15] значениями 38.50–40.37, 42.60–44.48 а. е. Эксцентриситеты и наклонения орбит занептунных объектов, локализованных вблизи максимума, отвечающего большой полуоси 43.5 а. е., малы ( $e \sim 0.0\text{--}0.17$ ,  $i \sim 0\text{--}10^\circ$ ), что согласуется с результатом работ [3, 15]. Для максимума, соответствующего точной соизмеримости 3:2 с Нептуном, значения эксцентриситетов преимущественно расположены в области 0.15–0.30, а значения наклонов орбит — от 0 до  $20^\circ$ . Из (3) следует, что корректный учет вековых возмущений от Урана, Сатурна и Юпитера приводит к корреляции наблюдаемого максимума распределения (при  $a = 43.5$  а. е.) с резонансом 2:1 с Нептуном. Для кентавров и объектов «рассеянного диска» также наблюдаются явно выраженные локальные максимумы в распределении по большим полуосям орбит, отвечающих резонансам 4:1, 5:2 с Сатурном и 3:1, 5:2 с Нептуном. Эксцентриситеты кентавров и объектов «рассеянного диска» располагаются преимущественно в интервале  $0.2 \leq e \leq 0.7$ , а оскуллирующие углы наклонов их орбит в основном не превышают  $30^\circ$ .

Было установлено (по данным на 2002, 2006 и 2008 гг.), что уточнение параметров орбит и увеличение числа обнаруженных объектов принципиально не влияет на вид приведенных выше распределений. Коэффициенты корреляции между значениями однотипных орбитальных параметров объектов по данным 2006 и 2009 гг., равны  $\sim 0.99$ , а для соответствующих значений рядов распределений — от 0.91 до 0.99 в зависимости от объема выборки. При изменении шага построения диаграммы по большим полуосям от 5 до 1 а. е. для кентавров и объектов «рассеянного диска» и от 1 до 0.1 а. е. для объектов пояса Койпера выявленные тенденции сохраняются. Уменьшение шага дискретизации позволяет выявить мелкомасштабные детали распределения.



*Rus. 5. Сглаживание селективных эффектов (шумов) в распределении объектов пояса Койпера с помощью вейвлета Добеши*

При прочих равных условиях на рассматриваемые статистические распределения оказывают влияние селективные эффекты (более далекие и/или менее яркие объекты сложнее обнаружить). Для сглаживания селективных эффектов был проведен вейвлет-анализ распределений, который подтверждает инвариантность конфигурации максимумов распределений (рис. 5).

### Заключение

Максимумы в распределениях по большим полуосям объектов пояса Койпера и «нерегулярных тел» — кентавров и объектов «рассеянного диска» коррелируют с орбитальными резонансными зонами, соответствующими максимальным амплитудам резонансных эффектов. Устранение расхождений максимумов в наблюдаемом распределении объектов пояса Койпера по большим полуосям с теоретическими значениями, отвечающими точным орбитальным резонансам, возможно с учетом недоопределенности выбора интегральных постоянных путем корректного учета вековых возмущений от планет-гигантов. Статистически значимые закономерности распределений исследуемых объектов по орбитальным параметрам сохраняются независимо от величины популяции этих тел и уточнения орбитальных параметров. В окрестности наблюдаемых максимумов ( $a_0$ ) в распределениях по большим полуосям орбит за вычетом селективных эффектов в полном соответствии с теоретическими предсказаниями наблюдается асимметрия распределений — при  $a > a_0$ , объектов больше, чем в случае  $a < a_0$ . Большее число исследуемых в настоящей работе объектов (кентавров, объектов пояса Койпера) движется по резонансным орбитам и было предсказано ранее.

Работа была представлена на Ломоносовских чтениях в 2008 г. (<http://www.sai.msu.ru/news/2008/04/19/solasystem.ppt>).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-02-16795а).

### Список литературы

- Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. Околоземная астрономия и проблемы изучения малых тел Солнечной системы. М., 2000. С. 17.
- Trujillo C.A., Brown M.E. // *Astrophys. J. Lett.* 2001. **554**. P. 95.
- Мушаилов Б.Р. // Труды ГАИШ. **70**. М., 2004. С. 251.
- Sheppard S. // ASP Conf. Series. 2006. **352**. P. 3.
- Chiang E.I., Lovering J.R., Millis R.L. et al. // *Earth, Moon and Planets*. 2003. **92**. P. 49.
- Jewitt D., Moro-Martín A., Lacerda P. // arXiv:0808.3224.
- Malhotra R. // *Astron. J.* 1995. **110**. P. 420.
- Morbidelli A., Levison H.F., Gomes R. // <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0703558v1>.
- Levison H.F., Morbidelli A., Laerhoven C. van et al. // arXiv:0712.0553
- Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. // Межведомственный сборник научных трудов. Прикладная механика и математика. М., 1992. С. 42.
- Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 53.
- Malhotra R. // *Astron. J.* 1996. **111**. P. 504.
- Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р., Калошин А.А. // Астрон. вестник. 2003. № 1. С. 5.

14. [www.cfa.harvard.edu/iau/lists/TNOs.html](http://www.cfa.harvard.edu/iau/lists/TNOs.html),  
[www.cfa.harvard.edu/iau/lists/Centaurs.html](http://www.cfa.harvard.edu/iau/lists/Centaurs.html).
15. *Мушайлов Б.Р., Жуйко С.В.* // Околоземная астрономия XXI века. М., 2001. С. 180.

## On the role of resonant objects in statistical distributions of centaurs and beyond-Neptune objects

**B. R. Mushailov, V. S. Teplitskaya<sup>a</sup>**

*P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.  
E-mail: <sup>a</sup>verateplc@yandex.ru.*

Some principles in the distribution of Centaurs and the “Scattered Disk” objects, as well as the Kuiper belt objects for its semi-major axes, eccentricities and inclinations of the orbits have been investigated. It has been established that more than a half from them move on the resonant orbits and that is what has been predicted earlier. The divergence of the maximum in the observable distribution for the semi-major axes with an exact orbital resonance has been interpreted.

*Keywords:* the Kuiper belt, the «Scattered Disk» objects, Centaurs, orbital resonances, beyond-Neptune objects, statistical distributions.

PACS: 96.30.Xa.

*Received 8 July 2009.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

### Сведения об авторах

1. Мушайлов Борис Романович — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.; тел.: (495) 939-16-25, e-mail: brm@sai.msu.ru.
2. Теплицкая Вера Сергеевна — аспирантка, e-mail: verateplc@yandex.ru.