КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Подавление кольцевых артефактов в режиме реального времени в рентгеновской томографии

С. С. Титаренко[a], А. Г. Ягола[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a]sofya.titarenko@googlemail.com, [b]yagola@physics.msu.ru

Статья поступила 07.10.2009, подписана в печать 16.10.2009

Предлагается алгоритм подавления кольцевых артефактов в задачах рентгеновской томографии, который позволяет осуществить обработку изображений входных данных в режиме реального времени. Данный алгоритм основан на использовании методов теории обратных и некорректных задач. Численная реализация алгоритма использует минимизацию сглаживающего функционала Тихонова на основе метода сопряженных градиентов.

Ключевые слова: некорректная задача, томография, кольцевые артефакты.
УДК: 517.9. PACS: 02.30.Zz, 42.30.Wb, 02.60.Pn.

Введение

Рассмотрим стандартную схему эксперимента для задач компьютерной томографии с использованием источников синхротронного излучения. Пучок электронов, генерируемых сихротроном, испускает высокочастотное рентгеновское излучение при прохождении через систему магнитов, вызывающих резкое торможение заряженных частиц. Полученные таким образом рентгеновские лучи обладают широким спектром частот. Для выделения узкого спектра частот, необходимых для томографии, на пути пучка ставится монохроматор. Пройдя через монохроматор, лучи попадают на объект, вращающийся вокруг своей вертикальной оси, а затем поглощаются сцинтиллятором, который в свою очередь испускает лучи видимого спектра. Для современных сцинтилляторов интенсивность этих лучей почти линейно зависит от интенсивности поглощенного излучения. Лучи видимого излучения проходят через оптическую систему и падают на сенсор, измеряющий интенсивность излучения и представляющий собой двумерную ПЗС-матрицу конденсаторов.

Пусть L — один из лучей, вдоль которого распространяется рентгеновское излучение, а $\mu(\boldsymbol{x})$ — коэффициент поглощения излучения в точке $\boldsymbol{x}$. Если I_0 — интенсивность излучения до объекта, то интенсивность света после прохождения объекта равна $I = I_0 \exp(-p)$, где p — интеграл вдоль луча L, т. е. $p = \int\limits_L \mu(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$. Измерив оптический путь p как функцию x, z и t, где x и z — горизонтальная и вертикальная координаты, перпендикулярные пути распространения рентгеновских лучей, а t — момент времени, можно узнать значение коэффициента поглощения $\mu(\boldsymbol{x})$. Подробное описание различных методов, используемых для этой цели, можно найти в книге [1].

К сожалению, сцинтиллятор, оптическая система и сенсор не идеальны — на их поверхностях имеются царапины, пыль, грязь, внутри же могут быть примеси посторонних материалов, дефекты, при больших интенсивностях рентгеновского излучения наблюдают небольшие нелинейные эффекты, а за счет тепловых эффектов генерируются дополнительные электроны на ПЗС-матрице. Все это приводит к тому, что имеются погрешности при использовании стандартной процедуры коррекции изображения, основанной на формуле

$$p = -\ln \frac{I - D}{W - D},$$

где W и D — интенсивности света, измеренные при отсутствии объекта в рентгеновском пучке при включенном и выключенном источнике соответственно. В результате неправильно найденных значений p при реконструкции изображений появляются так называемые кольцевые артефакты, представляющие собой кольца или дуги (см., напр., [2] и рисунок, *а*).

Для большинства практических задач справедлива вспомогательная формула

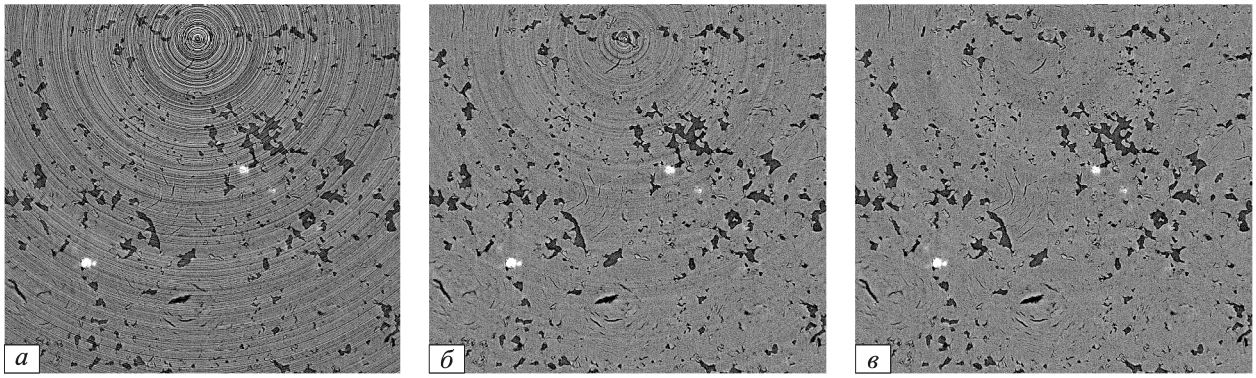
$$r(x, z, t) = p(x, z, t) + q(x, z), \tag{1}$$

где $r(x, z, t)$ и $p(x, z, t)$ — оптические пути в случае реального и идеального экспериментов, $q(x, z)$ — некоторая неизвестная функция, не зависящая от времени.

Отметим, что имеется дополнительная информация о функциях $p(x, z, t)$ и $q(x, z)$. Во-первых, аппаратные функции сцинтиллятора и оптической системы, т. е. функции, описывающие распределение интенсивности света в приборе при освещении его точечным источником света, часто имеют гауссовский вид [3, 4], т. е. $K(x, z) = K_0 \exp\{-\gamma(x^2 + z^2)\}$, где K_0, $\gamma > 0$. Тогда интенсивность излучения, падающего на сенсор, можно записать как свертку

$$I_{\text{sen}}(x, z) = I(x, z) \cdot K(x, z) \equiv \iint I(x - \xi, z - \zeta) K(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

В силу дифференциальных свойств свертки и ограниченности интенсивности ($I(x, z) \leqslant I_{\max}$) справедлива



Кусок графита с металлическими включениями, реконструированный без использования предложенного метода (*а*) и с использованием 1% (*б*) и 10% (*в*) проекций ($\alpha = \beta = 10000$)

оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} I_{\text{sen}}(x,z)\right| = \left|I(x,z)\cdot\frac{\partial}{\partial x}K(x,z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2K_0\gamma I_{\max}\int\int\left|\xi e^{-\gamma(\xi^2+\zeta^2)}\right| d\xi\, d\zeta \leqslant 2K_0 I_{\max}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Следовательно, функция $I_{\text{sen}}(x,z)$, а следовательно, и $p(x,z,t)$ являются Липшиц-непрерывными функциями пространственных переменных.

Во-вторых, предполагается, что отклонение эксперимента от идеального невелико, поэтому функция $q(x,z)$ близка к нулю, например, в пространстве L_2 суммируемых с квадратом функций.

Алгоритм

Пусть D — некоторая двумерная область (часто прямоугольник) и t меняет свои значения от 0 до $T < \infty$. Тогда нашу задачу можно сформулировать как задачу сглаживания: из множества функций $q(x,z)$, минимизирующих $\|q\|^2_{L_2(D)} < \Omega$, необходимо выбрать функцию, для которой $(1/T)\int\limits_0^T \|p\|^2_{W_2^1(D)}dt$ минимально. Тогда задача сводится к минимизации функционала Тихонова

$$M^\alpha[q] = \|q\|^2_{L_2(D)} + \frac{\alpha}{T}\int\limits_0^T \|r-q\|^2_{W_2^1(D)}\,dt \qquad (2)$$

на множестве $\|q\|^2_{L_2(D)} < \Omega$, где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Реальные данные дискретны, так как сенсор представляет собой двумерную матрицу. Таким образом, измеряется матрица r_{ijk}, а требуется найти матрицу q_{ij}, $i = \overline{1,n_x}$, $j = \overline{1,n_z}$, $k = \overline{1,n_t}$. Тогда исходная задача сводится к минимизации

$$M^\alpha[q] = \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_z} q_{ij}^2 + \frac{\alpha}{n_t}\sum_{k=1}^{n_t}\Bigg(\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_z}|r_{ijk}-q_{ij}|^2 +$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_z-1}|r_{ijk}-r_{i,j+1,k}-q_{ij}+q_{i,j+1}|^2 +$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{n_x-1}\sum_{j=1}^{n_z}|r_{ijk}-r_{i+1,jk}-q_{ij}+q_{i+1,j}|^2\Bigg),$$

где $\beta > 0$ — некоторая константа при условии $\sum\limits_{i=1}^{n_x}\sum\limits_{j=1}^{n_z} q_{ij}^2 < \Omega$.

Отметим, q_{ij} может рассматриваться как вектор длины $n_x n_z$, поэтому функционал Тихонова может быть записан как $M^\alpha[q] = \alpha\{(Aq,q) + 2(b,q) + c\}$, где A — матрица размера $n_x^2 n_z^2$, b — вектор длины $n_x n_z$, c — константа. При этом каждая строка или столбец матрицы A имеет не более пяти отличных от нуля элементов. Определим $\bar{r}_{ij} = \frac{1}{n_t}\sum\limits_{k=1}^{n_t} r_{ijk}$ и доопределим $\bar{r}_{i0} = r_{i1}$, $\bar{r}_{i,n_z+1} = \bar{r}_{i,n_z}$, $\bar{r}_{0j} = \bar{r}_{1j}$, $\bar{r}_{n_x+1,j} = \bar{r}_{n_x j}$, $i = \overline{1,n_x}$, $j = \overline{1,n_z}$; аналогично доопределим q_{ij}. Тогда $b_{ij} = \beta\bar{r}_{i,j-1} + \beta\bar{r}_{i,j+1} + \beta\bar{r}_{i-1,j} + \beta\bar{r}_{i+1,j} - (4\beta+1)\bar{r}_{ij}$, $A_{ij,ij} = 4\beta + 1 + 1/\alpha$, $A_{ij,i-1,j} = A_{ij,i+1,j} = A_{ij,i,j-1} = A_{ij,i,j+1} = -\beta$. Таким образом, вычисление Aq сводится к свертке матриц q_{ij} и

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ -\beta & 4\beta+1+1/\alpha & -\beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

и может быть осуществлено относительно быстро. Выбор параметра регуляризации α должен быть основан на использовании информации о погрешностях измерений при помощи методов, описанных в [5].

Заключение

Предложенный метод подавления кольцевых артефактов имеет важное прикладное значение в томографии. В современных экспериментах требуется получить полностью реконструированный объект сразу после создания последнего изображения. Так как сама реконструкция объекта занимает очень много времени, то подавление кольцевых артефактов должно начаться как можно раньше. Обычно объект поворачивается на определенный угол и сенсор регистрирует изображение, затем процедура повторяется. Но возможна и другая схема эксперимента: сначала объект поворачивается на больший угол, так что регистрируются изображения, охватывающие всевозможные углы поворота; после этого полученные изображения используются для нахождения матрицы q_{ij}, которая в свою очередь уже применяется для корректировки остальных изображений, получаемых для стандартного угла поворо-

та. В любом случае после нахождения матрицы q_{ij} в дальнейшем для реконструкции объекта используется $p_{ijk} = r_{ijk} - q_{ij}$.

Простой вид матрицы A позволяет реализовать метод на обычных компьютерах с использованием библиотек Intel, существенно ускоряющих векторные и матричные операции, а также на графических процессорах, работа которых основана на принципе «одна инструкция для массива данных».

Авторы выражают благодарность профессору Филипу Визерсу (Philip J. Withers) за возможность посетить Университет Манчестера и доктору Альбрехту Кюрилаису (Albrecht Kyrieleis) за предоставленные данные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00160-а) и Научного совета по инженерным и физическим наукам (EPSRC, Великобритания) (грант «Collaborating for Success»).

Список литературы

1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М., 1990.
2. *Titarenko S., Titarenko V., Kyrieleis A., Withers P.J.* // Appl. Phys. Lett. 2009. **95**. P. 071113.
3. *Banhart J.* Advanced tomographic methods in materials research and engineering. Oxford, 2008.
4. *Mahajan V.N.* Optical imaging and aberrations. Part II. Wave diffraction optics. Bellighnam, WA, 2001.
5. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М., 1990.

Ring artefact suppression in real-time X-ray tomography

S. S. Titarenko[a], **A. G. Yagola**[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *sofya.titarenko@googlemail.com,* [b] *yagola@physics.msu.ru.*

A ring artefact suppression algorithm in X-ray tomography is proposed and allows one to process input data in real time. The algorithm is based on method of the theory of inverse and ill-posed problems. Its numerical implementation uses minimisation of the smoothing Tikhonov's functional with the conjugate gradient method.

Keywords: ill-posed problem, tomography, ring artefacts.
PACS: 02.30.Zz, 42.30.Wb, 02.60.Pn.
Received 7 October 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

Сведения об авторах

1. Титаренко Софья Станиславовна — аспирантка; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: sofya.titarenko@googlemail.com.
2. Ягола Анатолий Григорьевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: yagola@physics.msu.ru.