

# Исследование поведения спиральности магнитных полей на Солнце в рамках модели динамо Паркера

Е. П. Попова<sup>a</sup>, С. Н. Нефедов<sup>b</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: <sup>a</sup>porovaelp@mail.ru, <sup>b</sup>rainbow\_84@rambler.ru

Статья поступила 09.09.2009, подписана в печать 25.11.2009

Проведено построение бафтерфляй-диаграмм для магнитной спиральности в нескольких приближениях, входящих в подход Паркера. Диаграммы построены как для случая эффективной генерации магнитного поля (больших динамо-чисел), так и для слабой (малые динамо-числа). В первом случае используется соответствующее асимптотическое решение уравнений солнечного динамо. С помощью этого решения исследовано, как влияет меридиональная циркуляция на вид бафтерфляй-диаграмм. Бафтерфляй-диаграммы построены также на основе маломодового приближения, справедливого для умеренных динамо-чисел. Обсуждается, какие черты бафтерфляй-диаграмм оказываются общими во всех этих приближениях, и возможность сравнения их с данными наблюдений.

*Ключевые слова:* динамо Паркера, бафтерфляй-диаграмма, спиральность, динамо-волны.

УДК: 523.92-46-337. PACS: 02.30.Hg, 52.65.Kj, 96.10.+i.

## Введение

В последнее время нескольким научным группам удалось начать мониторинг по наблюдению магнитной спиральности в активных областях Солнца. В связи с этим становится актуальной задача предсказания на основе теории динамо поведения магнитной спиральности на протяжении солнечного цикла.

Считается, что магнитное поле Солнца и звезд создается механизмом динамо. Схема работы динамо была предложена в работе Паркера [1]. Предполагается, что полоидальное магнитное поле — это поле магнитного диполя, находящегося в центре Солнца. Тороидальное магнитное поле получается из полоидального под действием дифференциального вращения в конвективной зоне. Обратный процесс превращения тороидального магнитного поля в полоидальное осуществляется в результате нарушения зеркальной симметрии конвекции во вращающемся теле. Сила Кориолиса при действии на поднимающиеся и расширяющиеся (опускающиеся и сжимающиеся) вихри приводит к преобладанию правых вихрей в северном полушарии (левых вихрей в южном полушарии). Мерой нарушения отражательной инвариантности течений в конвективной зоне Солнца является гидродинамическая спиральность. Электродвижущая сила, возникающая в результате действия электромагнитной индукции Фарадея, после усреднения по пульсациям скорости приобретает компоненту  $\alpha \mathbf{F}$ , параллельную среднему магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Она и замыкает цепь самовозбуждения в динамо Паркера.

В рамках модели Паркера возбуждаемое магнитное поле неограниченно растет. В реальности этот рост подавляется, но само распространение волны магнитного поля сохраняется. Чтобы описать данное явление предполагают, что с ростом магнитного поля уменьшается  $\alpha$ -эффект [2]. Использование баланса магнитной спиральности приводит к тому, что магнитное поле

оказывается отражательно асимметричным. Эта асимметрия приводит к подавлению  $\alpha$ -эффекта.

Так как до недавнего времени наука не располагала ни наблюдательными, ни экспериментальными способами определения  $\alpha$ -эффекта, модели солнечного динамо опирались только на оценки  $\alpha$ -эффекта из физических принципов [3]. В последние годы стала возможной оценка магнитного вклада в  $\alpha$ -эффект с помощью наблюдений токовой спиральности в активных областях Солнца (одновременно появились первые измерения  $\alpha$ -эффекта в лаборатории [4]). Полученные при этом оценки укладываются в модели динамического подавления  $\alpha$ -эффекта [5].

В настоящей работе получены предсказания об эволюции магнитной и токовой спиральности на основе простейшей модели динамо.

## 1. Основные уравнения

Уравнения динамо Паркера получаются из системы уравнений электродинамики средних полей [6] в предположении, что динамо-волна распространяется в тонкой сферической оболочке (например, в инверсном слое). При этом производится усреднение магнитного поля по радиусу в пределах некоторой сферической оболочки, и отбрасываются члены, описывающие эффекты кривизны вблизи полюса. С. И. Брагинский [7] включил в эти уравнения меридиональную циркуляцию (см. также [8]). В результате уравнения динамо приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial \theta} &= \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(VB)}{\partial \theta} &= D \cos \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $B$  — тороидальное магнитное поле,  $A$  пропорционально тороидальной компоненте векторного потенциала, которая определяет полоидальное магнитное поле;  $\theta$  — широта, которая отсчитывается от экватора;  $t$  — время. Множитель  $\cos \theta$  отвечает уменьшению

длины параллели вблизи полюса. Уравнения выписаны в безразмерных переменных, так что амплитуды  $\alpha$ -эффекта, градиента угловой скорости и коэффициент турбулентной диффузии объединены в безразмерное динамо-число  $D$ . Мы пользуемся  $\alpha\omega$ -приближением. В диффузионных членах опущены эффекты кривизны. Для простоты мы считаем, что радиальный градиент угловой скорости не меняется с  $\theta$ . Процедура вывода подобных уравнений описана в работе [9]. По соображениям симметрии ( $\alpha(-\theta) = -\alpha(\theta)$ ) уравнения (1) можно рассматривать лишь для одного (северного) полушария с условиями антисимметрии (дипольная симметрия) или симметрии (квадрупольная симметрия) на экваторе. Так как магнитное поле Солнца имеет дипольную симметрию, мы ею и ограничиваемся. В уравнениях (1)  $V$  — меридиональная циркуляция. Ее точный вид не известен, поэтому для простоты предполагаем, что  $V = \text{const}$  в северном полушарии и имеет противоположный знак в южном полушарии. Длина параллели уменьшается при приближении к экватору, поэтому будем считать, что вещество, вовлеченное в циркуляцию, постепенно перемещается в область противотока, а магнитное поле остается в области генерации.

Модель Паркера не включает в себя токовую спиральность, но эту величину можно связать с величинами, фигурирующими в схеме Паркера, с помощью метода, описанного в работе [5].

Оценивая  $\alpha$ -эффект, используем баланс магнитной спиральности. Она характеризует коэффициент зацепления магнитных линий. Плотность магнитной спиральности равна  $\mathfrak{W}$ . Полное магнитное поле и векторный потенциал можно представить как сумму крупномасштабных и мелкомасштабных компонент  $\mathfrak{B} = \mathbf{B} + \mathbf{b}$  и  $\mathfrak{A} = \mathbf{A} + \mathbf{a}$ . В рамках модели крупномасштабные компоненты имеют только составляющие  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$ , причем их произведение  $\mathbf{AB}$  не сохраняется. Такое несохранение компенсируется за счет плотности мелкомасштабной магнитной спиральности  $\mathbf{ab}$ . Мы предполагаем, что мелкомасштабные компоненты  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  распределены локально однородно и изотропно.

Плотность мелкомасштабной магнитной спиральности  $\mathbf{ab}$  пропорциональна плотности мелкомасштабной токовой спиральности  $\mathbf{bj}$ , где  $\mathbf{j}$  — электрический ток. Калибровка векторного потенциала выбирается из условий осевой симметрии крупномасштабной компоненты и локальной однородности и изотропии мелкомасштабной компоненты. Поскольку в рассматриваемом приближении магнитная и токовая спиральность пропорциональны, а нас интересует их качественное поведение в ходе цикла, можно изображать их на одном и том же графике, не уточняя, о какой спиральности идет речь. Вычисляя спиральность  $\mathbf{AB}$  из уравнений динамо Паркера, мы можем сопоставить ее с наблюдаемой спиральностью  $\mathbf{bj}$ . Плотность токовой спиральности удастся определять наблюдательно.

Напомним, что величина  $D$  характеризует интенсивность источников генерации —  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения. Если  $D$  достаточно велико, то появляются растущие решения, т. е. возникает явление динамо. Порог генерации соответствует условиям, при которых генерационные эффекты (спиральность

и дифференциальное вращение) невелики, они лишь в состоянии компенсировать диссипационные потери.

В зависимости от величины  $D$  рассмотрим два случая: когда она близка к пороговому значению и когда значительно его превышает.

## 2. Случай слабой генерации

В первом случае систему Паркера можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha \cos \theta B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  и  $B$  являются функциями широты  $\theta$ , измеряемой от экватора, и времени  $t$ . Безразмерные числа  $R_\alpha$  и  $R_\omega$ , аналогичные известному в гидродинамике числу Рейнольдса, характеризуют интенсивность  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения соответственно ( $D = R_\alpha R_\omega$ ).

Идея построения предлагаемой модели состоит в следующем. После начального периода роста магнитное поле в звезде стабилизируется, его рост прекращается и возникает режим, напоминающий автоколебания. Можно предположить, что при этом система перестроилась так, что динамо стало находиться на пороге возбуждения. При этом можно надеяться, что решение представимо в виде суперпозиции небольшого числа подходящим образом подобранных мод свободного затухания. Классическое объяснение Паркера, представленное выше, как раз и излагает работу динамо на языке эволюции двух мод свободного затухания под действием двух источников генерации, дифференциального вращения и спиральности.

Для начала рассмотрим случай свободного затухания, когда интенсивность источников генерации  $R_\alpha, R_\omega = 0$ . Собственные решения здесь имеют вид  $\{\sin k\theta, 0\}$ ,  $k = 1, 3, \dots$  (здесь учтено условие дипольной симметрии для векторного потенциала  $A$ ) или  $\{0, \sin k\theta\}$ ,  $k = 2, 4, \dots$  (учтено условие дипольной симметрии для векторного потенциала  $B$ ). Идея метода состоит в поиске решения основной системы (2) в виде ряда по собственным функциям задачи свободного затухания, при этом мы ограничиваемся конечным числом членов. Определим скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  как  $(x, y) = \int xy d\theta$ . Теперь, умножая первое уравнение на  $A$ , а второе на  $B$  и учитывая ортогональность  $A$  и  $B$ , можно перейти к задаче на собственные функции и собственные значения матрицы  $W$ :

$$WC = \lambda C. \quad (3)$$

Элементы матрицы  $W$  имеют вид  $W_{ij} = \lambda_i^0$  при  $i = j$  и  $W_{ij} = \int \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_i^* \hat{L} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_j d\theta$ . Здесь  $\lambda_i^0$  — собственные значения задачи затухания, оператор  $\hat{L}$  имеет вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} R_\alpha \cos \theta(\cdot) & \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} & R_\omega \sin \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

(точкой обозначено место, куда нужно поставить моду, на которую действует оператор). Решая задачу (3), мы получаем набор собственных функций и собственных

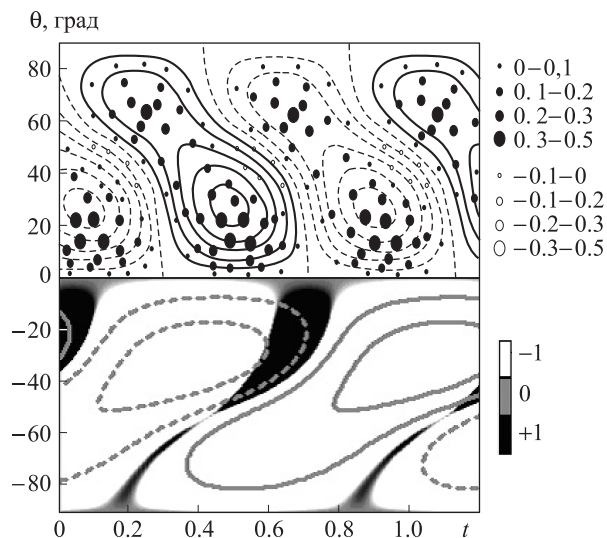


Рис. 1. Баттерфляй-диаграмма в случае умеренной работы динамо (для области положительных широт) и эффективной работы динамо (для области отрицательных широт)

значений (скоростей роста)  $\lambda_i$ . Далее, воспользовавшись критерием, что первой должна возбуждаться осциллирующая мода, получим [10], что основную роль в процессе генерации магнитного поля играют четыре моды: две полоидальные и две тороидальные. Меняя числа  $R_\alpha$  и  $R_\omega$ , получим, что генерация лидирующей моды (когда  $\text{Re } \lambda \approx 0$ ) происходит при параметрах  $R_\alpha = 1/2$  и  $R_\omega = 575$ , при этом  $\text{Im } \lambda \approx 7.6i$ , а коэффициенты разложения для тороидального поля равны  $C_1^T = 0.72$ ,  $C_2^T = 0.38 + 0.58i$ , соответствующие коэффициенты разложения для полоидального поля  $C_1^P = 0.05 + 0.34i$ ,  $C_2^P = 0.1 + 0.56i$ . Для наглядности полученных результатов были построены баттерфляй-диаграммы (рис. 1). Баттерфляй-диаграмма представляет собой линии уровня действительной части тороидального поля  $B^T(\theta, t) = (C_1^T \sin 2\theta + C_2^T \sin 4\theta)e^{7.6it}$ . Для наглядности на этом же графике кружками изображена спиральность магнитного поля

$$AB = \text{Re}\{(C_1^T \sin 2\theta + C_2^T \sin 4\theta)e^{7.6it}\} \times \text{Re}\{(C_1^P \sin \theta + C_2^P \sin 3\theta)e^{-7.6it}\}.$$

### 3. Случай сильной генерации

При величине  $D$ , значительно превышающей пороговое (эффективная генерация), задача решается с помощью асимптотического метода, аналогичного методу ВКБ в квантовой механике.

Решение системы (1) ищется в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ |D|^{2/3} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \exp(|D|^{2/3} \gamma t + i|D|^{1/3} S), \quad (4)$$

где  $S$ ,  $\mu$  и  $\nu$  — гладкие функции,  $S$  — аналог действия, а его производная  $k = S'$  соответствует волновому вектору, который в данном случае является комплексным. Комплексное  $\gamma$  определяет собственное значение, его действительная часть дает скорость роста, а мнимая дает длительность цикла активности. Множители в комплексной скорости роста  $|D|^{2/3}$  и  $|D|^{1/3}$  в действии вы-

браны так, чтобы дифференциальное вращение,  $\alpha$ -эффект, собственное значение и диссипация оказались одного порядка и вошли в старший член асимптотического разложения. Меридиональная циркуляция включена в тот же старший член асимптотического решения при

$$V = |D|^{1/3} v, \quad (5)$$

где  $v$  порядка единицы. В работе [11] показано, что меридиональная циркуляция существенно влияет на длительность солнечного цикла.

Результаты для построения баттерфляй-диаграмм в данном случае получены в [11]. Кроме этого, мы получили аналитическую зависимость фазового сдвига между спиральностью и тороидальным полем как функцию меридиональной циркуляции  $V$ , измеренной в долях  $|D|^{1/3}$ :

$$\varphi = -\text{arctg} \frac{\text{Re } \gamma + k_m^2}{\text{Im } \gamma + k_m v}. \quad (6)$$

Здесь  $k_m$  соответствует значению  $k(\theta_m)$ , где  $\theta_m$  — точка максимума решения.

### Заключение

Баттерфляй-диаграммы изображены на рис. 1 и 2. Каждая представляет собой широтно-временное распределение тороидального магнитного поля и аналогичное распределение спиральности. Эти распределения наложены друг на друга. Время измеряется в тех же безразмерных единицах, в которых выписаны уравнения (1) и (2).

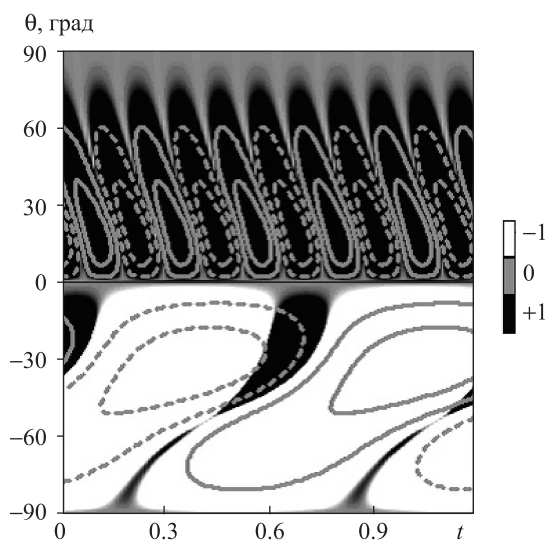


Рис. 2. Баттерфляй-диаграмма в случае эффективной генерации,  $v = 0$  (для области положительных широт) и  $v = 1$  (для области отрицательных широт)

Для того чтобы лучше описать структуру распределения спиральности, на рис. 1 совмещены случаи сильной и умеренной работы динамо, а на рис. 2 приведен случай эффективной генерации, но при разных значениях  $v$ .

На рис. 1 величина и знак спиральности переданы величиной и цветом кружков в случае, когда генерация только начинается. В случае эффективной генерации величина и знак спиральности переданы градацией

серого. Линии уровня характеризуют тороидальное магнитное поле (сплошные соответствуют положительному знаку, пунктирные отрицательному).

На рис. 2 изображены бафтерфляй-диаграммы для спиральности и тороидального магнитного поля в случае эффективной генерации. Линии уровня характеризуют тороидальное магнитное поле (сплошные соответствуют положительному знаку, пунктирные отрицательному). Величина и знак спиральности переданы градацией серого. Бафтерфляй-диаграммы на рис. 2 отражают, что меридиональная циркуляция существенно влияет на длительность солнечного цикла.

Из рис. 1 и 2 видно, что распределение спиральности антисимметрично относительно солнечного экватора. В северном полушарии Солнца спиральность в основном положительна, а в южном полушарии — в основном отрицательна. Различие преимущественных знаков в двух полушариях не связано с выбором системы координат. Тороидальное магнитное поле меняет от цикла к циклу свою полярность на противоположную. Спиральность — квадратичная величина, поэтому она сохраняет преимущественный знак в данном полушарии от цикла к циклу.

На рисунках заметны области на бафтерфляй-диаграммах, в которых спиральность имеет «неправильный» знак для данного полушария. Эти области приурочены к концу цикла, и их форма существенно зависит от меридиональной циркуляции. Появление таких областей является свойством модели Паркера.

То, что спиральность достаточно часто имеет «неправильный» знак, обнаруживается в наблюдаемых данных о токовой спиральности [12].

На рис. 1 и 2 заметно, что спиральность отстает от тороидального магнитного поля. Количественно сдвиг фаз представлен на рис. 3 как функция меридиональной циркуляции. Видно, что этот сдвиг меняется с изменением  $v$ , но изменения малы.

Широтно-временное распределение спиральности в рамках простейшей модели динамо Паркера обнаруживает правило полярности, сопоставимое с правилом полярности Хейла.

В настоящее время стало возможным построение

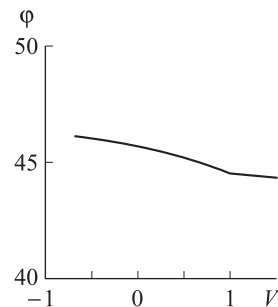


Рис. 3. Фазовый сдвиг (в градусах) между спиральностью и тороидальным полем как функция меридиональной циркуляции  $V$ , измеренной в долях  $|D|^{1/3}$

бафтерфляй-диаграмм для токовой спиральности по данным наблюдений. Это даст возможность тестирования существующих моделей и разработки новых.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-02-01010 и 07-02-00127).

### Список литературы

1. Parker E.N. // *Astrophys. J.* 1955. **122**. P. 293.
2. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М., 2006.
3. Zhang H., Bao S. // *Astrophys. J.* 1999. **519**. P. 876.
4. Stepanov R., Volk R., Denisov S. et al. // *Phys. Rev. E.* 2006. **73**. P. 046310.
5. Kleeorin N., Kuzanyan R., Moss D. et al. // *Astron. Astrophys.* 2003. **409**. P. 1097.
6. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*. М., 1984.
7. Брагинский С.И. // *ЖЭТФ*. 1964. **48**. С. 2178.
8. Моффат Х.К. *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*. М., 1980.
9. Соколов Д.Д., Фьок М., Нем-Риб Э. // *Магнитная гидродинамика*. 1995. **31**, № 1. С. 19.
10. Соколов Д.Д., Нефедов С.Н. // *Вычислительные методы и программирование*. 2007. № 8. С. 195.
11. Попова Е.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. // *Астрон. журн.* 2008. № 1. С. 183.
12. Sokoloff D., Bao S.D., Kleeorin N. et al. // *Astron. Nachr.* 2006. **327**. P. 876.

### Investigation helicity of magnetic fields on the Sun within the model of Parker's dynamo

H. P. Popova<sup>a</sup>, S. N. Nefedov<sup>b</sup>

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>popovaelp@mail.ru, <sup>b</sup>rainbow\_84@rambler.ru.*

We carried out the construction of butterfly diagrams for the magnetic helicity in several approximations dynamo Parker. These diagrams are constructed as in the case of efficient generation of magnetic field (large dynamo numbers), and for the weak (small dynamo number). In the first case we use the corresponding asymptotic solution of the solar dynamo. With this solution, we studied the butterfly diagrams for different values of the meridional circulation. Butterfly diagrams are constructed and based on few-mode approximation, valid for moderate dynamo numbers. We discuss what features butterfly diagrams are common in all these approximations. These robust features can be compared with observational data.

*Keywords:* Parker's dynamo, butterfly diagram, helicity, dynamo-wave.

*PACS:* 02.30.Hg, 52.65.Kj, 96.10.+i.

*Received 9 September 2009.*

*English version: Moscow University Physics Bulletin 2(2010).*

### Сведения об авторах

1. Попова Елена Петровна — аспирантка; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: popovaelp@mail.ru.

2. Нефедов Сергей Николаевич — аспирант; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: rainbow\_84@rambler.ru.