

Континуальное обобщение логистического отображения

Д. Ю. Кузнецов

Университет электрических коммуникаций, Институт лазерной науки.
Япония, 182-8585 Токио, Чофугаока, 1-5-1 Чофу.
E-mail: dima@ils.ucc.ac.jp

Статья поступила 29.11.2009, подписана в печать 24.12.2009

Логистическая проблема сформулирована в терминах суперфункции и абель-функции для квадратичной передаточной функции $H(z) = uz(1 - z)$. Суперфункция F как голоморфное решение уравнения $H(F(z)) = F(z + 1)$ обобщает логистическую последовательность $F(z)$ на случай комплексных значений z . Предложен эффективный алгоритм вычисления функции F и ее обратной функции (т. е. абель-функции) G , такой что $F(G(z)) = z$. Построена половинная итерация $h(z) = F(1/2 + G(z))$; в широкой области значений z имеет место соотношение $h(h(z)) = H(z)$. Для специального случая $u = 4$, суперфункция F и абель-функция G выражены в терминах элементарных функций.

Ключевые слова: логистическое отображение, континуальное обобщение, суперфункции, нецелые итерации, голоморфное расширение, аналитическое продолжение.

УДК: 517.98, 501. PACS: 02.30.Ks, 02.30.Zz, 02.30.Gp, 02.30.Sa.

Введение

Логистическая последовательность F определяется рекурсией

$$H(F(z)) = F(z + 1) \quad (1)$$

и начальным условием $F(0)$ для квадратичной передаточной функции

$$H(z) = uz(1 - z), \quad (2)$$

где u является положительным параметром. Обычно считается, что $0 < F(0) < 1$. В публикациях о логистическом уравнении z считается целым числом [1–5]; при заданном $F(0)$ уравнение (1) определяет $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, ...

В настоящей работе формализм суперфункций [6–12] используется для построения голоморфного расширения функции F . Для этого расширения строится обратная функция $G = F^{-1}$, тогда могут вычисляться нецелые итерации передаточной функции

$$H^c(z) = F(c + G(z)). \quad (3)$$

При $c = 1/2$ это позволяет вычислять половинную итерацию логистической передаточной функции, т. е.

функцию $h = \sqrt{H} = H^{1/2}$, такую что

$$hhz = h(h(z)) = H(z). \quad (4)$$

Половинные итерации для передаточных функций \exp и Factorial рассмотрены в работах [6, 10]. Для квадратичной передаточной функции (2) график половинной итерации показан на рис. 1 толстой кривой для $u = 3$ (а), $u = 4$ (б) и $u = 5$ (в). Остальные кривые соответствуют итерациям с номерами 0.2, 0.8 и 1, т. е. $H^{1/5}$, $H^{4/5}$, и $H^1 = H$, для тех же значений u . Нулевая итерация соответствует идентичной функции H^0 , которая всегда имеет значение, равное значению ее аргумента.

В следующих разделах описано вычисление функций F и G и обсуждается область применимости соотношения (4).

1. Суперфункция

Для того чтобы сделать голоморфное расширение, надо работать в комплексной плоскости. Квадратичная функция H , рассчитанная по формуле (2), показана на верхних графиках рис. 2. Функция $f = H(z)$ построена в комплексной плоскости z для $u = 3$ (а), $u = 4$ (б)

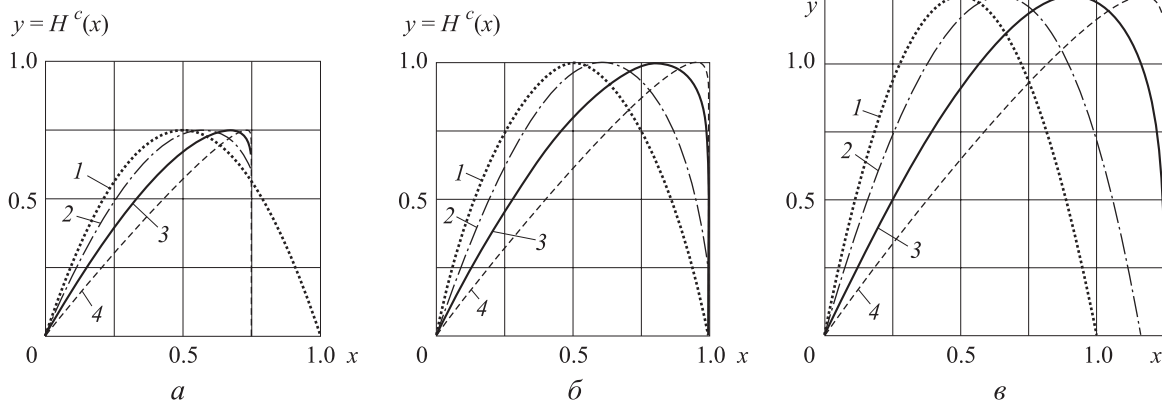


Рис. 1. Различные итерации $H^c(x)$ как функции вещественного x для $u = 3$ (а), $u = 4$ (б) и $u = 5$ (в). Кривая 1 – $c = 1$, 2 – $c = 0.8$, 3 – $c = 0.5$, 4 – $c = 0.2$

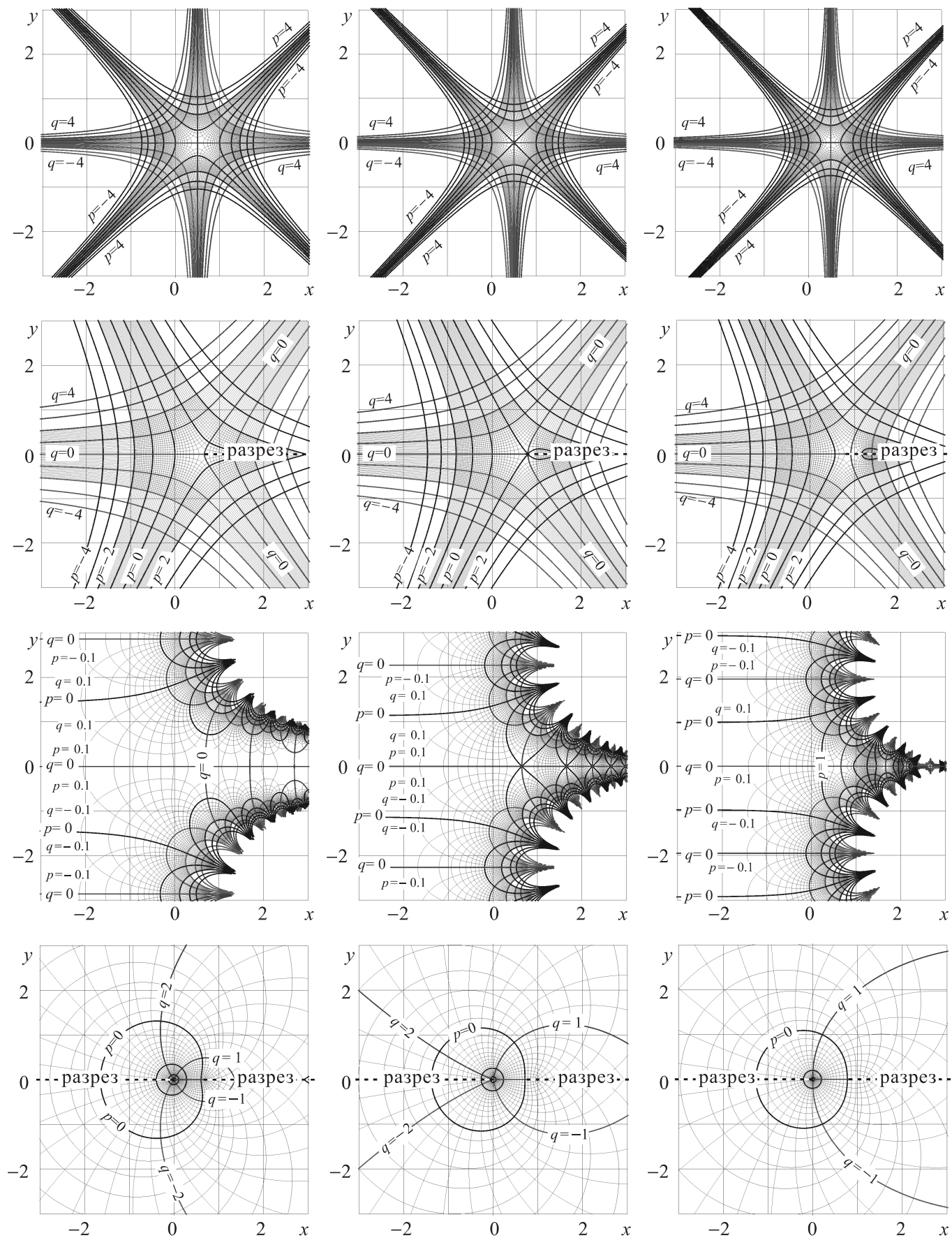


Рис. 2. Карты передаточной функции $H(z)$ (верхний ряд изображений), половинной итерации (второй ряд), суперфункции $F(z)$ (третий ряд) и абель-функции $G(z)$ (нижний ряд) в плоскости $z = x + iy$ для $u = 3$ (слева), 4 (по центру) и 5 (справа)

и $u = 5$ (в). Проведены уровни $p = \text{Re}(f) = \text{const}$ и уровни $q = \text{Im}(f) = \text{const}$; толстые кривые соответствуют целым значениям.

Второй ряд изображений на рис. 2 показывает в тех же обозначениях половинную итерацию h по формуле (3) при $c = 1/2$. Для вычисления половинной итерации использованы суперфункция F и абель-функция G . Эти функции построены в двух нижних рядах изображений на рис. 2 для тех же значений параметра u .

При построении суперфункции F ключевым является вопрос о стационарных точках передаточной функции H , которые суть решения уравнения

$$H(z) = z. \quad (5)$$

Для квадратичной передаточной функции H , рассчитанной по формуле (2), уравнение (5) имеет два решения: $z = 0$ и $z = 1 = 1/u$. Первое из этих решений не зависит от u . Ниже это решение используется для построения суперфункции.

Для вещественной передаточной функции (2) с вещественной стационарной точкой формализм [8, 10] указывает следующее асимптотическое разложение для суперфункции F :

$$F(z) = \sum_{n=1}^{N-1} C_n u^{nz} + O(u^{Nz}). \quad (6)$$

Подстановка представления (6) в уравнение (1) дает цепочку уравнений для коэффициентов C . Можно положить $C_1 = 1$; изменение этого коэффициента соответствует лишь трансляции решения вдоль вещественной оси. Тогда

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{1-u}, \\ C_3 &= \frac{2}{(1-u)(1-u^2)}, \\ C_4 &= \frac{5+u}{(1-u)(1-u^2)(1-u^3)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разложение (6) дает способ вычисления суперфункции F при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента. Для иных значений рекуррентное выражение

$$F(z) = H(F(z-1)) \quad (8)$$

может использоваться для уменьшения вещественной части аргумента; это дает аккуратный и быстрый способ вычисления. Карта функции F в комплексной плоскости показана в третьем ряду изображений на рис. 2 для тех же значений $u = 3, u = 4, u = 5$. Суперфункция F является целой и периодичной.

Для вещественных значений параметра u ее период

$$T = 2\pi i / \ln(u) \quad (9)$$

чисто мнимый. В окрестности луча $\text{Im}(z) = \text{Im}(T/2)$, $\text{Re}(z) \rightarrow +\infty$ суперфункция $F(z)$ имеет большие значения и большие производные, так что линии должны сливаться; эта часть графика осталась пустой.

Периодичность встречается и у других вещественных регулярных суперфункций, построенных при вещественных стационарных точках передаточной функции

[8, 10]. Экспонента, т.е. суперфункция от линейной передаточной функции, тоже периодична с мнимым периодом, это же можно сказать и о голоморфном расширении суперфакториала [10]. Впрочем, ниже, в разделе 6, рассмотрено иное расширение, у которого есть только асимптотическая периодичность, и асимптотический период не чисто мнимый.

Вдоль вещественной оси суперфункция F гладкая; она стремится к нулю на $-\infty$ и осциллирует при положительных значениях аргумента. Функция F ограничена вдоль вещественной оси при $u \leq 4$. При больших значениях параметра в некоторых интервалах суперфункция принимает большие отрицательные значения. Как и всякая голоморфная функция, функция F может быть обращена. Обратная функция рассмотрена в следующем разделе.

2. Абель-функция

Для построения половинной итерации (см. введение), требуется обратная функция от суперфункции F . Такая обратная функция $G = F^{-1}$ может называться функцией Абеля, или абель-функцией, потому что она удовлетворяет уравнению Абеля [8–10]

$$G(H(z)) = G(z) + 1. \quad (10)$$

Асимптотическое разложение абель-функции может быть получено обращением разложения (6):

$$G(z) = \log_u \left(\sum_{n=1}^{N-1} s_n z^n + O(z^N) \right). \quad (11)$$

Цепочка уравнений для коэффициентов s может быть найдена также подстановкой разложения (11) в уравнение Абеля (10) и последующим асимптотическим анализом. В частности,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= \frac{1}{u-1}, \\ s_3 &= \frac{2u}{(u-1)(u^2-1)}, \\ s_4 &= \frac{(u^2-5)u}{(u-1)(u^2-1)(u^3-1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оборванная серия (11) хорошо аппроксимирует $G(z)$ при $|z| \ll 1$. При больших значениях аргумента может использоваться рекуррентная формула

$$G(z) = G(H^{-1}(z)) + 1, \quad (13)$$

где

$$H^{-1}(z) = 1/2 - \sqrt{1/4 - z/u}. \quad (14)$$

Представление абель-функции через выражения (11), (13) обеспечивает быстрое и аккуратное вычисление. В частности, такой алгоритм использован при построении нижнего ряда изображений на рис. 2.

Когда F, G уже выбраны, c -я итерация передаточной функции, т.е. H^c , определяется для любого числа c соотношением (3). Такие итерации удовлетворяют соотношению

$$H^c(H^d(z)) = H^{c+d}(z), \quad (15)$$

по крайней мере, для некоторой области значений z . Для целых значений c c -кратная итерация — это просто последовательное применение передаточной функции, осуществляемое c раз:

$$H^c(z) = \underbrace{H(H(\dots H(z)\dots))}_{c \text{ раз}}. \tag{16}$$

Для $c = 1/2$ половинная итерация $H^{1/2}$ показана на рис. 1 и 2. Эта функция имеет разрез, который начинается между $1/2$ и единицей и уходит вдоль вещественной оси на бесконечность. Такой разрез, в частности, ограничивает область применимости соотношения (4).

3. Область применимости соотношения $hh = H$

Обычно обратная функция некоторой целой функции имеет точки ветвления и разрезы; только исключение составляет линейная функция. Поэтому соотношение $G(H(z)) = z$ должно иметь ограниченную область применимости. Аналогичным образом ограничена и область применимости соотношения (15).

Поведение функции $f = H^{1/2}(H^{1/2}(z))$ показано на рис. 3 для $u = 3, 4, 5$. В левой части комплексной плоскости карты суть увеличения центральных частей изображений в верхней части рис. 2. Ступенчатая линия показывает границу применимости соотношения $H(z) = H^{1/2}(H^{1/2}(z))$. Разрезы вдоль вещественной оси показаны пунктиром.

Соотношение (4) имеет место на значительной части комплексной плоскости. Разумеется, оно не может быть справедливо на всей комплексной плоскости, поскольку информация о том, на которой из своих осцилляций функция F приняла некоторое фиксированное значение, потеряна на первой операции при вычислении правой части выражения (3). Похожие ограничения имеют место и для других передаточных функций, в частности для функций $\sqrt{\exp}$ и $\sqrt{\text{Factorial}}$, рассмотренных в комплексной плоскости [6–8, 10, 11].

Монотонность функции $H = \exp$ позволяет соотношению (15) выполняться вдоль вещественной оси. Монотонность функции $H = \text{Factorial}$ позволяет соотношению (15) выполняться при $z > 1$. Аналогичным образом в случае логистического оператора H , задан-

ного уравнением (2), соотношение (15) справедливо по крайней мере для $\text{Re}(z) \leq 1/2$.

Абель-функция, построенная для некоторой стационарной точки, сингулярна в другой стационарной точке. При этом нецелая итерация передаточной функции может иметь те же сингулярности, а именно точки ветвления. Соответствующие разрезы ограничивают область применимости соотношений (15) и (4). (Разумеется, абель-функция и соответственно нецелая итерация передаточной функции может быть сингулярна также и в обеих стационарных точках, как, например, $\sqrt{\exp}$, который, однако, регулярен вдоль вещественной оси [10, 11].)

Некоторые разрезы области голоморфизма показаны на рис. 2 толстыми черными пунктирными линиями. Новые модификации абель-функций (и соответствующие нецелые итерации передаточной функции) могут быть получены передвижением разрезов аналогично тому, как это сделано с арктетрацией (абель-экспонентой) в работе [12]. Обычно такие модификации имеют более сложную структуру.

4. Случаи $u = 3.5699$ и $u = 3.8284$

В этом разделе рассмотрены два специальных случая: $u = 3.5699$ и $u = 3.8284$. Эти значения соответствуют границам между регулярным, иррегулярным и хаотичным поведением [14, 15]. При $u = 1 = \sqrt{8} \approx 3.5699$ движение является хаотическим с нулевым показателем Ляпунова. Точка рождения цикла периода три соответствует $u \approx 3.8284$; в окрестности этой точки хаос исчезает по сценарию Пома–Манневилля (Pomeau–Manneville scenario) [5, 17, 18]; это значение может представлять интерес с точки зрения технических приложений. Впрочем, при построении голоморфного расширения логистической последовательности при разных значениях параметра u используется один и тот же алгоритм.

На рис. 4 карты функции F показаны для $u = 3.5699$ и для $u = 3.8284$. Рис. 5 показывает поведение F вдоль вещественной оси для этих двух случаев. В целом вид этих функций соответствует тому, что можно было бы ожидать из рассмотрения их при дискретных значениях аргумента. В частности, при $u = 3.5699$ можно видеть периодичный тренд с перио-

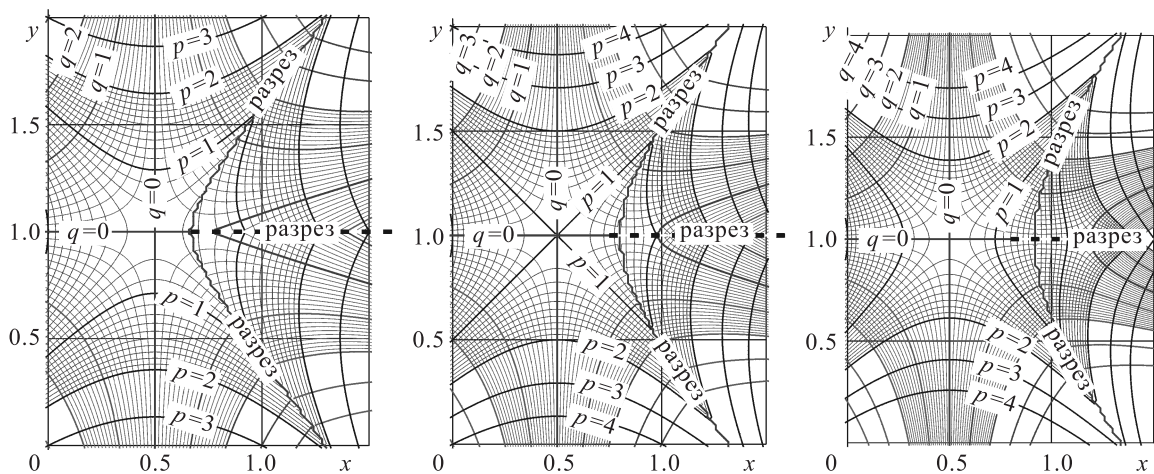


Рис. 3. Функция $f = H^{0.5}(H^{0.5}(z))$ в плоскости $z = x + iy$ для $u = 3, 4$ и 5

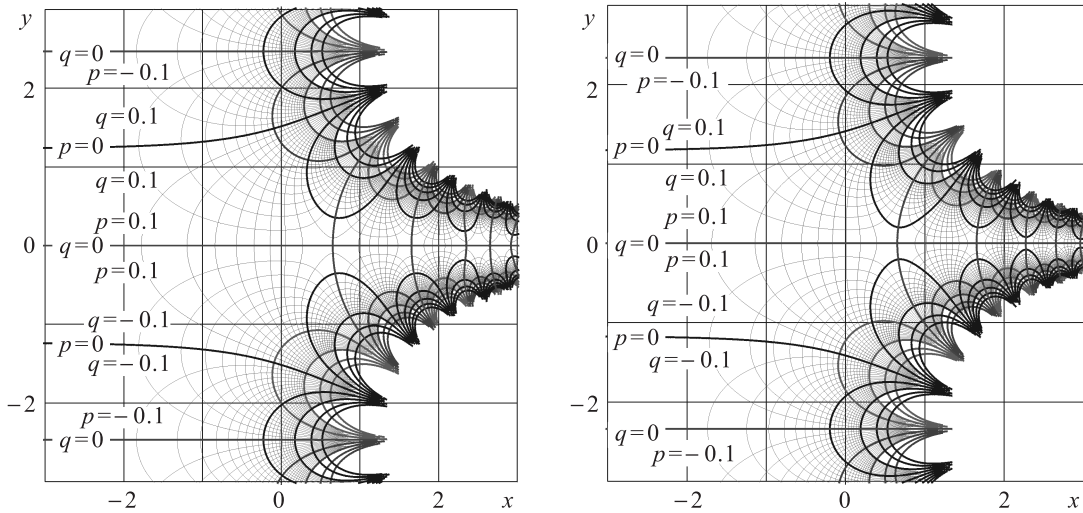


Рис. 4. Карты функции F при $u = 3.5699$ и 3.8284 в тех же обозначениях, что и на рис. 2

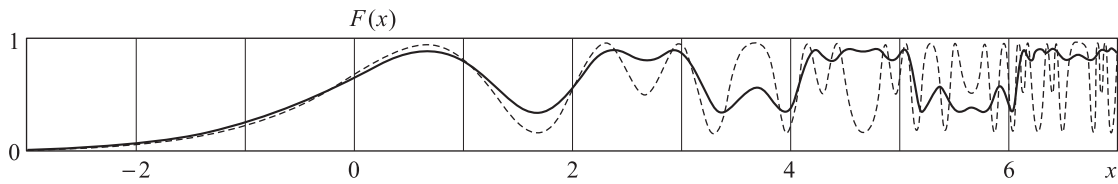


Рис. 5. График суперфункции F вещественного аргумента для $u = 3.5699$ (сплошная кривая) и для $u = 3.8284$ (пунктир)

дом два; при расширении графика вправо наблюдается удвоение этого периода и прочие эффекты, уже не связанные с голоморфным расширением. В комплексной плоскости переход от одного режима к другому выглядит плавным; на рис. 4 не видно качественного различия между этими случаями.

5. Специальный случай $u = 4$

При $u = 4$, суперфункция и абель-функция логистического оператора выражаются через элементарные функции. Такое представление можно найти, пользуясь таблицей суперфункций. Строка 8 табл. 1 из работы [10] соответствует передаточной функции

$$H_0(z) = 2z^2 - 1, \tag{17}$$

суперфункции

$$F_0(z) = \cos(2^z) \tag{18}$$

и абель-функции

$$G_0(z) = \log_2(\arccos(z)). \tag{19}$$

Тогда преобразование из последней строки той таблицы, при линейных функциях

$$P(z) = (1 - z)/2 \tag{20}$$

и

$$Q(z) = 1 - 2z \tag{21}$$

дает новую передаточную функцию

$$H_1(z) = P(H(Q(z))) = 4z(1 - z), \tag{22}$$

которая совпадает с передаточной функцией H , вычисленной по формуле (2), при $u = 4$, суперфункцию

$$F_1(z) = P(F_0(z)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2^z)) \tag{23}$$

и абель-функцию

$$G_1(z) = G_0(Q(z)) = \log_2(\arccos(1 - 2z)). \tag{24}$$

Функции F_1 и G_1 связаны с F и G , показанными в центральном столбце рис. 2, простыми трансляциями:

$$F(z) = F_1(z + 1), \quad G(z) = F_1(z - 1).$$

Суперфункция F вещественного аргумента показана на рис. 6 для $u = 3.99$ (штриховая кривая), $u = 4$ (сплошная кривая), $u = 4.01$ (пунктирная кривая). Как и можно было ожидать, сплошная кривая выглядит вполне регулярной.

Сравнение «точных» выражений для F и G через элементарные функции (23) и (24) с численными реализациями этих функций через асимптотические разложения (6), (11) и рекуррентные формулы (8), (13) подтверждают хорошую точность этих представлений. Порядка 14 значащих цифр могут быть получены с использованием переменных `complex double`.

6. Стационарная точка $1 - 1/u$

Стационарная точка $z = 1 - 1/u$ тоже может использоваться для построения суперфункции от передаточной функции (2). Соответствующая суперфункция выражается асимптотически в виде разложения

$$F(z) = \frac{u-1}{u} + \sum_{n=1}^{N-1} d_n((u-2)^z \cos(\pi z + \phi))^n + O((u-2)^z \cos(\pi z + \phi))^N, \tag{25}$$

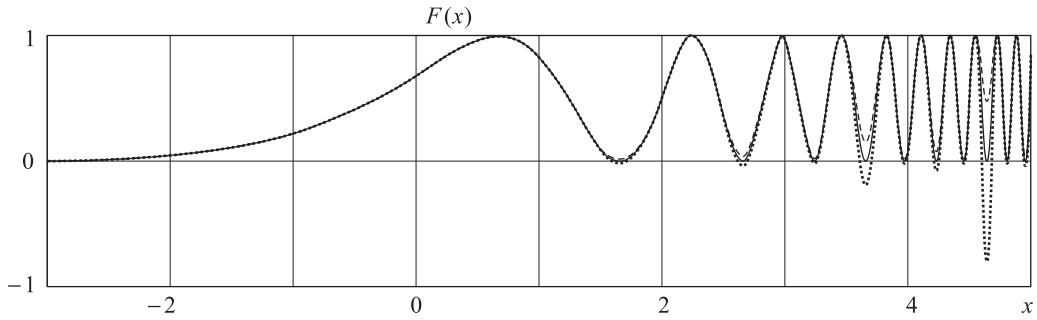


Рис. 6. $F(x)$ как функция вещественного x при $u = 3.99$ (штриховая кривая), $u = 4$ (сплошная кривая) и $u = 4.01$ (пунктирная кривая)

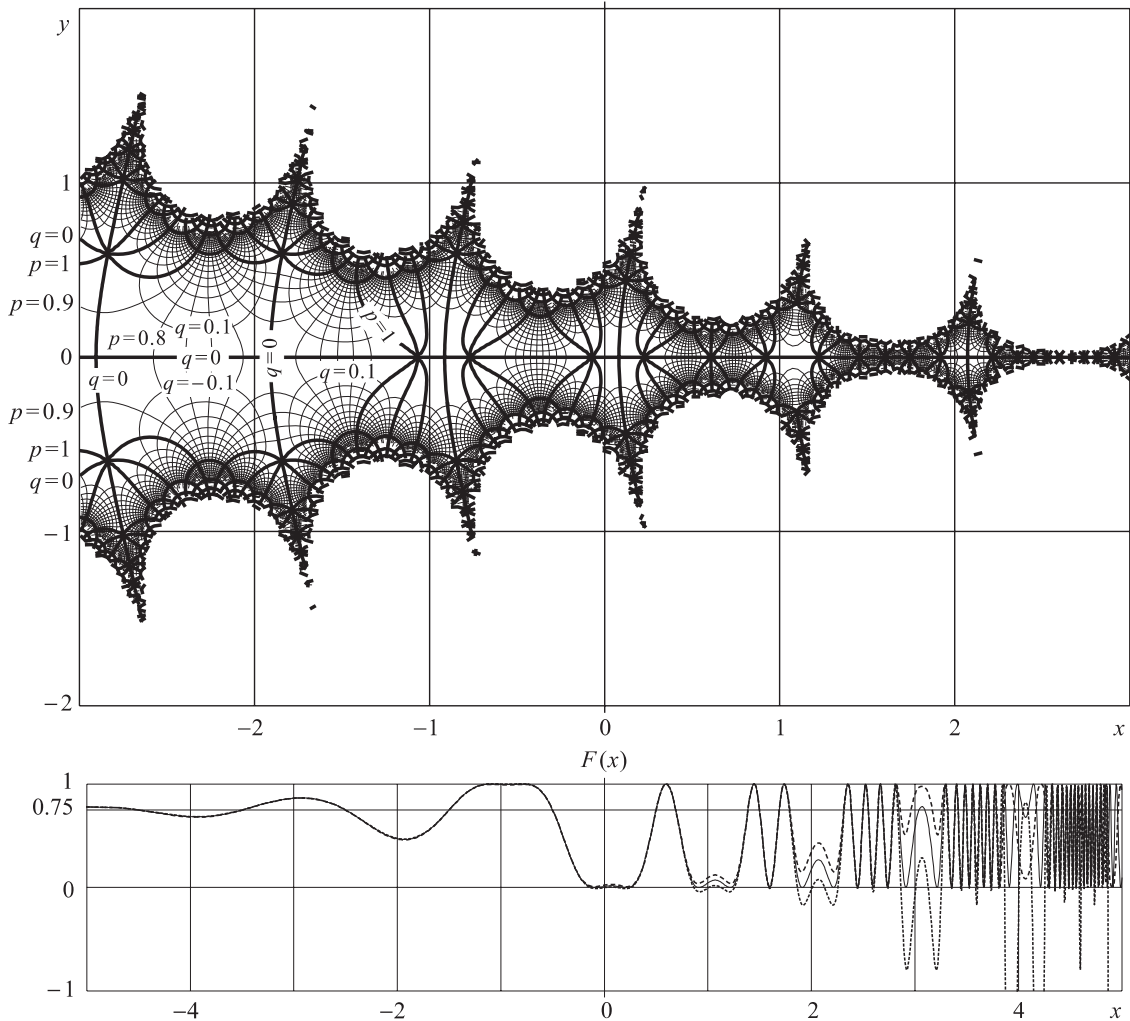


Рис. 7. Карта суперфункции F по формулам (25), (8) для $u = 4, \phi = 0$ (вверху), и $F(x)$ для вещественного x при $u = 3.99, 4, 4.01$ (внизу)

где фаза ϕ и коэффициенты d являются константами. Подстановка в уравнение (1) дает цепочку уравнений для коэффициентов. Можно положить $d_1 = 1$, тогда [-2pt]

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{-u}{(u-1)(u-2)}, \\
 d_3 &= \frac{-u^2}{(u-1)(u-2)(u-3)}, \\
 d_4 &= \frac{-(u-7)^3 u^3}{(u-2)(u-3)(u^3 - 8u^2 + 22u - 21)}.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Такие языки, как Mathematica, позволяют выразить порядка десяти этих коэффициентов в терминах элементарных функций. Таким образом можно аппроксимировать суперфункцию, пока эффективный параметр разложения, т. е. $(u-2)^z \cos(\pi z + \phi)$, мал. Оборванная серия дает порядка десятка значащих цифр при

$$\pi |\operatorname{Im}(z)| + \ln(u-2) \operatorname{Re}(z) < -4.
 \tag{27}$$

Расширение с помощью формулы (8) дает эффективный алгоритм для вычисления этой функции. Этот алгоритм использован при построении рис. 7. Рисунок сделан для

случая $\phi = 0$. На верхнем графике карта суперфункции F показана для $u = 4$; на нижнем графике $F(x)$ построена для вещественных значений x при $u = 3.99, 4, 4.01$, т. е. при тех же значениях, что и на рис. 6.

Суперфункция, построенная таким образом, асимптотически периодична; асимптотический период

$$T = \frac{2\pi i}{\ln(u - 2) + \pi i} \quad (28)$$

в верхней полуплоскости и T^* в нижней полуплоскости. В частности, при $u = 4$ формула (28) дает $T \approx -1.907159353 + 0.4207872484i$; эта квазипериодичность видна в верхней части рис. 7. Такая квазипериодичность предопределяется лидирующим слагаемым в разложении (25). Квазипериодичное поведение имеется и у других суперфункций [6–8, 10]. В области с квазипериодичным поведением рис. 3 напоминает фрактал.

7. Ограничения на производную

Переменная z в уравнениях (6), (8) может иметь смысл времени. Тогда суперфункция F может интерпретироваться как некий гладкий, бесконечно дифференцируемый физический процесс. При измерении в дискретные моменты времени такой процесс может генерировать логистическую последовательность. При $u = 4$ представление (23) дает временную производную:

$$F(z) = F_1(z + 1) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2^{z+1})), \quad (29)$$

$$F'(z) = \ln(2) 2^z \sin(2^{z+1}).$$

При вещественных значениях z верхняя граница для модуля производной растет экспоненциально:

$$|F'(z)| \leq \ln(2) 2^z. \quad (30)$$

Эта же оценка держится при $u < 4$. При $u > 4$ возможен двойной экспоненциальный рост:

$$|F(z)| < \exp(2^z), \quad (31)$$

что соответствует строке 5 табл. 1 из [10]; в этом случае квадратичное слагаемое в разложении передаточной функции доминирует. Тогда ограничение на производную может быть записано в виде

$$|F'(z)| < \ln(2) 2^z \exp(2^z). \quad (32)$$

Таким образом, голоморфное расширение ведет к оценке скорости роста логистических последовательностей.

8. Другие суперфункции

Голоморфное расширение F логистических последовательностей не уникально. Это расширение может быть построено на любой из стационарных точек логистической передаточной функции $H(z)$.

Кроме того, новые суперфункции \tilde{F} могут быть выражены в терминах уже построенных суперфункций при периодическом преобразовании аргумента:

$$\tilde{F}(z) = F(z + \varepsilon(z)), \quad (33)$$

где ε есть некоторая периодическая функция с периодом единица, голоморфная по крайней мере в некоторой окрестности вещественной оси. Преобразованная

суперфункция может быстро расти в направлении мнимой оси и даже иметь сингулярности. Суперфункция F , вычисленная по формулам (6), (8), представляется единственной (с точностью до трансляций) целой периодичной суперфункцией с чисто мнимым периодом. Эмпирическое наблюдение различных голоморфных расширений может быть обобщено в виде нижеследующей гипотезы, конжекции.

Гипотеза. Для любого $u > 2$ любое голоморфное расширение F логистической последовательности, т. е. решение уравнения $F(z + 1) = uF(z)(1 - F(z))$, которое не может быть выражено через (6), (8), растет, как минимум, экспоненциально в направлении мнимой оси.

В гипотезе выдвинуто предположение о единственности голоморфного расширения F логистической последовательности. Ее строгое доказательство (и, возможно, уточнение формулировки) может быть темой для дальнейшего исследования.

Заключение

Нет ничего специфического в логистической передаточной функции; ее суперфункции и абель-функции могут строиться по обычным процедурам [7, 8, 10, 12]. Асимптотическое разложение (6) допускает эффективное (быстрое и аккуратное) вычисление суперфункции, т. е. голоморфного расширения F логистической последовательности и обратной функции G . Логистическая последовательность $F(z)$ может быть интерпретирована как бесконечно дифференцируемый процесс, измеряемый при целых значениях времени z . В частности, при $u = 4$ этот процесс выражается элементарной функцией (23).

При заданной суперфункции F и абель-функции $G = F^{-1}$ нецелые итерации H^c передаточной функции могут быть построены стандартным образом по формуле (3). При $c = 1/2$ это дает половинную итерацию, которая может рассматриваться как квадратный корень из логистического оператора. Эта функция показана на рис. 1 и 4. При $u = 4$, эта половинная итерация выражается в терминах элементарных функций (23), (24).

Голоморфное расширение можно строить и для других последовательностей. Половинная итерация оператора дискретной эволюции может строиться на основе уже доложенных методов [6–13]. При голоморфном продолжении в комплексную плоскость логистическая последовательность становится регулярной. Рост голоморфных расширений в направлении мнимой оси позволяет сформулировать критерий единственности, хотя строгое доказательство гипотезы может быть темой для будущей работы.

Работа выполнена по предложению П. В. Елютина («...Задача, понятная как “континуальное обобщение логистического отображения”, будет стоить ваших усилий» [19]) и посвящается учителям квантовой механики [19, 20]. Автор благодарен А. В. Борисову, Г. Траппманну (Henryk Trapppmann) и участникам его форума [21] за важные обсуждения.

Список литературы

1. *Tujillaro N., Tyler A., Jeremiah R.* An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos. N. Y., 1992.
2. *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. N. Y., 2000.

3. *Sprott J.C.* Chaos and Time-Series Analysis. Oxford, 2003.
4. *Bjerklov K.* // Communications in Mathematical Physics. 2009. **286**. P. 137. DOI 10.1007/s00220-008-0626-y.
5. *Папанян В.О., Григорян Ю.И.* // Квантовая электроника. 1994. **21**. С. 309.
6. *Kneser H.* // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1950. **187**. S. 56.
Reprint: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/Relle.pdf>
7. *Kouznetsov D.* // Mathematics of computation. 2008. **78**. P. 1647. <http://www.ams.org/mcom/2009-78-267/S0025-5718-09-02188-7/home.html>
Preprint: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009analuxpRepri.pdf>
8. *Kouznetsov D., Trappmann H.* // Mathematics of Computation. 2010. In press. Preprint: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009sqrt2.pdf>
9. *Abel N. H.* // Crelle's J. 1827. N 2. P. 389.
10. *Кузнецов Д., Траппманн Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 1. С. 8. Препринт: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009supefar.pdf>
11. *Кузнецов Д.* // Владикавказский математический журнал. 2010. В печати. Препринт: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009vladir.pdf>
12. *Kouznetsov D., Trappmann H.* // Preprint ILS UEC. 2009. <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009fractae.pdf>
13. *Knoebel R.A.* // American Mathematics Monthly. 1981. **88**. P. 235.
14. *Chavas J.-P., Holt M.T.* // American Journal of Agricultural Economics. 1991. **73**, N 3. P. 819.
15. *Yajnik K.S.* <http://www.ias.ac.in/currsci/sep25/articles20.htm>
16. *Gac J.M., Zebrowski J.J.* // Acta Physica Polonica B. 2008. **39**. P. 1019. <http://th-www.if.uj.edu.pl/acta/vol139/abs/v39p1019.pdf>
17. *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. **74**. P. 189.
18. *Мырзакулов Р., Козыбаков М.Ж., Сабденов К.О.* // Изв. Томского политехн. ун-та. 2006. **309**. С. 109. <http://www.duskyrobin.com/tpu/2006-06-00028.pdf>
19. *Елютин П.В.* Частное сообщение. 9 окт. 2009.
20. *Сараева И.М., Романовский Ю.М., Борисов А.В.* (сост.). Владимир Дмитриевич Кривченко // Сер. Выдающиеся ученые физического факультета МГУ. М., 2008. Онлайн-версия. С. 81. <http://www.phys.msu.ru/rus/about/structure/admin/OTDEL-IZDAT/HISTORY/>
21. *Trappmann H.* <http://math.eretrandre.org/tetrationforum/index.php>

Holomorphic extension of the logistic sequence

D. Yu. Kouznetsov

Institute for Laser Science, University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofushi, Tokyo 182-8585, Japan

E-mail: dima@ils.uec.ac.jp

The logistic problem is formulated in terms of the superfunction and the Abel function of the quadratic transfer function $H(z) = uz(1 - z)$. The superfunction F as holomorphic solution of equation $H(F(z)) = F(z + 1)$ generalizes the logistic sequence $F(z)$ to the complex values z . The efficient algorithm for the evaluation of function F and its inverse function, id est, the Abel function G are suggested, $F(G(z)) = z$. The pair of functions F, G allow to construct the non-integer iteration of the transfer function. In particular, the halfiteration $h(z) = F(1/2 + G(z))$ is constructed; in wide range of values z , the relation $h(h(z)) = H(z)$ holds. For the special case $u = 4$, the superfunction F and the Abel function G are expressed in terms of elementary functions.

Keywords: logistic operator, logistic sequence, holomorphic extension, superfunction, non-integer iterations, holomorphic extension, analytic continuation.

PACS: 02.30.Ks, 02.30.Zz, 02.30.Gp, 02.30.Sa.

Received 29 November 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2010).

Сведения об авторе

Кузнецов Дмитрий Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: dima@ils.uec.ac.jp.