Эффективное действие КЭД в постоянном электромагнитном поле с учетом возможного нарушения лоренц-инвариантности уравнения Дирака

А. Ф. Бубнов, В. Ч. Жуковский[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] zhukovsk@phys.msu.ru

Статья поступила 04.12.2009, подписана в печать 28.12.2009

Работа посвящена вычислению поправок к эффективному действию КЭД, связанных с наличием нарушающего лоренц-инвариантность аксиально-векторного конденсата b^μ. Показано, что линейный по b^μ вклад в однопетлевое эффективное действие (член Черна–Саймонса) отсутствует в случае постоянного электромагнитного поля. Квадратичный по b^μ вклад рассчитан как для случая постоянного магнитного, так и электрического поля. Получены асимптотические оценки для квадратичного по b^μ слагаемого для случаев сильного и слабого по напряженности поля.

Ключевые слова: расширенная стандартная модель, нарушение лоренц- и CPT-инвариантности.
УДК: 539.12.01. PACS: 11.30.Cp, 12.60.-i, 11.10.Ef, 12.20.Ds.

Введение

Все известные взаимодействия описываются стандартной моделью и являются инвариантными относительно преобразований Лоренца и комбинаций дискретных CPT преобразований. Проверке этих фундаментальных законов физики посвящено большое количество работ [1–6]. Однако стандартная модель не включает в себя описание процессов, происходящих при планковских масштабах энергии, тогда как на сегодняшний день существует ряд фундаментальных теорий, таких как теория суперструн, суперсимметричное обобщение (SUSY) и др., которые справедливы также и в этом диапазоне энергий. В последнее время в этих теориях появились указания на то, что Лоренц- и CPT-симметрии лишь приближенные и могут нарушаться в локальных теориях поля посредством механизма спонтанного нарушения симметрии [7]. Так как в стандартной модели нет удовлетворительного способа описания этого нарушения, то рассматривают различные ее расширения. Общий подход в этих теориях, рассматриваемых как низкоэнергетический предел фундаментальных, состоит во введении феноменологических параметров, нарушающих лоренц- и CPT-инвариантность.

Одной из первых работ, послуживших началом систематического изучения расширенной стандартной модели, является работа [8]. Линейный по феноменологическому параметру вклад в эффективное действие квантовой электродинамики в расширенной стандартной модели — так называемый член Черна–Саймонса впервые был вычислен в работе [9]. За этими работами последовали и другие, посвященные вычислению вклада члена Черна–Саймонса в эффективное действие. Результаты этих работ сильно разнились: в некоторых из них получено конечное выражение для члена Черна–Саймонса [9, 10], в других говорится, что он зависит от схемы регуляризации [11]. Есть статьи, в которых авторами показано, что этот член в выбранной модели не образуется [12, 13].

Цель настоящей работы состоит в вычислении дополнительного вклада в действие КЭД (аксиально-векторного конденсата b_μ) за счет слагаемых, обусловленных наличием ненулевой феноменологической константы в уравнении Дирака, нарушающей лоренц- и CPT-инвариантности лагранжиана теории. Главным образом, исследование касается ее временной компоненты b_0, имеющей на данный момент наиболее слабые экспериментальные ограничения.

1. Используемая модель

Рассмотрим расширенную стандартную модель с лагранжианом [7]:

$$\mathcal{L}(\bar\psi,\psi,A,b)=\bar\psi\big(\hat\pi+\hat b\gamma^5-m\big)\psi, \tag{1}$$

где

$$\hat\partial=\gamma^\mu\partial_\mu,\quad \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu},\quad \gamma^5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$
$$g^{\mu\nu}=(1,-1,-1,-1)\,,\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,$$
$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],\quad \pi_\mu=i\partial_\mu-A_\mu,$$

заряд e включен в определение A_μ: $eA_\mu\to A_\mu$.

Эффективное действие в однопетлевом приближении имеет вид

$$\Gamma^{\rm eff}(A,b)=-i\ln\int D\bar\psi D\psi\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}(\bar\psi,\psi,A,b)\right]=$$
$$=-i\ln\operatorname{Det}\big(\hat\pi+\hat b\gamma^5-m\big). \tag{2}$$

Воспользуемся формулой $\ln\operatorname{Det}A=\operatorname{Tr}\ln A$, тогда

$$\Gamma^{\rm eff}(A,b)=\int d^4x\mathcal{L}^{\rm eff}=-i\operatorname{Tr}\ln\big(\hat\pi+\hat b\gamma^5-m\big), \tag{3}$$

где $\operatorname{Tr}(A)=\int d^4x\ \operatorname{tr}\langle x|\,A\,|x\rangle$.

Здесь и далее tr означает взятие следа по всем лоренцевым и спинорным индексам. Используя представление собственного времени для логарифма, эффективное действие (3) может быть переписано в виде

$$\Gamma^{\rm eff}(A,b)=\frac{i}{2}\int_0^\infty\frac{dz}{z}\operatorname{Tr}e^{-zH}, \tag{4}$$

где

$$H = -\pi^\mu \pi_\mu - 2i\sigma^{\mu\nu} b_\mu \pi_\nu \gamma^5 + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + b_\mu b^\mu + m^2.$$

2. Генерация члена Черна–Саймонса в постоянном электромагнитном поле в расширенной стандартной модели

Рассмотрим эффективное действие (4) и рассчитаем вклад линейных по b^μ слагаемых для случая постоянного электромагнитного поля ($F_{\mu\nu} = \mathrm{const}$).

Для записи пропорционального b_μ слагаемого необходимо «расцепить» выражение, стоящее в экспоненте оператора эволюции $U = \mathrm{Tr}\, e^{-zH}$, что можно сделать, воспользовавшись формулой Бейкера–Хаусдорфа

$$e^{\tau(A+B)} = e^{\tau A} e^{\tau B} L^{-1}(\tau), \tag{5}$$

где $L(\tau)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [14]:

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{d\tau} = B - e^{-\tau B} f(\tau) e^{\tau B}, \quad L(0) = 1, \tag{6}$$

где

$$f(\tau) = e^{-\tau A} B e^{\tau A} = B - \frac{\tau}{1!}[A, B] + \frac{\tau^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots .$$

В подынтегральном выражении в формуле (4) введем следующие обозначения:

$$A \equiv 2iz\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} b_\mu \pi_\nu, \quad B \equiv z\pi_\mu \pi^\mu - \frac{z}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{7}$$

Так как $A \sim b^\mu$, то в разложении функции $f(\tau)$ с точностью до $O(b^\mu)$ достаточно рассмотреть два первых члена ряда. Подставим выражение для $f(\tau)$ в уравнение (6):

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{d\tau} = B - e^{-\tau B}\big(B - \tau[A, B]\big)e^{\tau B} = \\ = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{[[\dots[A, B]\dots, B], B]}_{n}. \tag{8}$$

В выражении (8) необходимо учесть все слагаемые, так как все они линейны по b^μ. При этом коммутаторы могут быть записаны в следующем виде:

$$\underbrace{[[\dots[A, B]\dots, B], B]}_{k} = -(2iz\gamma^5) b_\mu \sigma^{\nu\alpha} \Pi_\nu \big((2izF)^k\big)_\alpha{}^\mu. \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в (8) и решая его, получим

$$L(1) = \exp\big(2iz\gamma^5 b_\mu \sigma^{\alpha\nu} \Pi_\nu \Sigma_\alpha{}^\mu\big), \tag{10}$$

где

$$\Sigma_\alpha{}^\mu \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((2izF)^n\big)_\alpha{}^\mu}{(n-1)!(n+1)}.$$

Полученная формула позволит «расцепить» экспоненту $\mathrm{Tr}\, e^{-zH}$ и выделить вклад линейных по b^μ слагаемых. После взятия следа по спинорным индексам выражение $\mathrm{Tr}\, e^{-zH}$ запишется так:

$$\mathrm{Tr}\{\exp(-zH)\} = -16z(b_\alpha - b_\lambda \Sigma_\alpha{}^\lambda) N^{\alpha\beta} e^{-zm^2} \times \\ \times \int d^4x\, \langle x|\, \pi_\beta \exp(z\pi^\mu \pi_\mu)\, |x\rangle, \tag{11}$$

$$N^{\alpha\beta} \equiv (C_2 \tilde{F}^{\alpha\beta} + C_4 F^{\alpha\beta}),$$

где постоянные

$$C_2 = -\mathtt{Im}\Big[\frac{\mathrm{sh}\, zX}{2X}\Big], \quad C_4 = -\mathtt{Re}\Big[\frac{\mathrm{sh}\, zX}{2X}\Big], \quad X = \sqrt{2(\mathcal{F} + i\Im)},$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \Im = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Таким образом, нам удалось свести задачу о нахождении члена Черна–Саймонса к вычислению матричного элемента $\int dx\, \langle x|\, \pi_\beta \exp(z\pi^\nu \pi_\nu)\, |x\rangle$.

Введем вспомогательное выражение $\exp(z\pi^\mu \pi_\mu + \lambda_\rho \pi^\rho)$, где λ_ρ — произвольный постоянный 4-вектор.

С помощью формулы Бейкера–Хаусдорфа, примененной к вспомогательному выражению, получим следующее тождество:

$$e^{z\pi^2} \pi_\beta = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial \lambda^\eta} \exp\big(z(\pi^\mu \pi_\mu + \lambda_\rho \pi^\rho)\big)\big|_{\lambda=0} \times \\ \times \left(\left(g - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2izF)^n}{(n+1)!}\right)^{-1}\right)^\eta{}_\beta, \tag{12}$$

где g — метрический тензор. Подставив тождество (12) в выражение для оператора эволюции (11), получим

$$\mathrm{Tr}(e^{-zH}) = -16z(b_\alpha - b_\lambda \Sigma_\alpha{}^\lambda) N^{\alpha\beta} e^{-zm^2} \times \\ \times \frac{1}{z}\left(\left(g - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2izF)^n}{(n+1)!}\right)^{-1}\right)^\eta{}_\beta \times \\ \times \int d^4x\, \frac{\partial}{\partial \lambda^\eta} \langle x|\, e^{-(1/4)z\lambda^2} \exp\big(z(\pi + \lambda)^2\big)\, |x\rangle\, \big|_{\lambda=0}. \tag{13}$$

Последнее выражение равняется нулю: $\mathrm{Tr}\, e^{-zH} = 0$.

Действительно, рассматриваемая теория калибровочно инвариантна, поэтому к оператору π^μ можно добавить константу, не влияющую на уравнения движения, т. е. заменить в (13) $\exp(z(\pi+\lambda)^2) \to \exp(z(\pi)^2)$. Оставшееся же выражение после дифференцирования, при последующей подстановке $\lambda^\mu = 0$ обращается в нуль.

Таким образом, в рассматриваемой расширенной стандартной модели слагаемое, пропорциональное первой степени b^μ (член Черна–Саймонса), не образуется.

3. Эффективное действие в $(b^0)^2$-приближении. Магнитное поле

Рассмотрим квадратичный по b^μ вклад в эффективное действие (4) при наличии только магнитной компоненты электромагнитного поля ($F_{12} = -F_{21} = -H$). Ввиду значительных экспериментальных ограничений на пространственную часть b^μ [4, 6] наибольший интерес представляет вклад временной компоненты феноменологического параметра b^0.

Оказывается, что в выбранной конфигурации полей экспонента в (4) «расцепляется» следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\, e^{-zH} = \mathrm{Tr}\big[e^{\{2iz\gamma_5 \sigma^{0\nu} b_0 \pi_\nu\}} e^{\{z\pi_\mu \pi^\mu - zF_{12}\sigma^{12}\}} e^{\{-z(b_0^2 + m^2)\}}\big]. \tag{14}$$

В правой части выражения (14) разложим экспоненту до второго порядка по b_0 включительно и ограничимся рассмотрением слагаемых, пропорциональных b_0^2:

$$\mathrm{Tr}_{b_0^2}\, e^{-zH} = -b_0^2\, \mathrm{Tr}\big[(-z - 2z^2\pi_k\pi^k + 2z^2F_{12}\sigma^{12}) \times \\ \times e^{\{z\pi_\mu\pi^\mu - zF_{12}\sigma^{12}\}} e^{-zm^2}\big]. \quad (15)$$

После взятия следа по спинорным индексам выражение (15) может быть переписано следующим образом:

$$\mathrm{Tr}_{b_0^2}\, e^{-zH} = -b_0^2 \int d^4x\ \langle x|\, \big(A_0 + A_1(\pi^1\pi_1 + \pi^2\pi_2 + \pi^3\pi_3)\big) \times \\ \times e^{z(\pi)^2}\, |x\rangle\, e^{-zm^2}, \quad (16)$$

где введены обозначения

$$A_0 \equiv 4z(\mathrm{ch}(zH) + 2zH\,\mathrm{sh}(zH)), \quad A_1 \equiv 8z^2\,\mathrm{ch}(zH). \quad (17)$$

Для вычисления этого матричного элемента перейдем в пространство Евклида согласно следующим стандартным определениям:

$$x = (x^0, \boldsymbol{x}), \quad x_E = (x_4, \boldsymbol{x}), \quad ix_0 = x_4, \\ x_E^2 = \boldsymbol{x}^2 + x_4^2 = -x^2, \quad \boldsymbol{p}_E = -\boldsymbol{p}, \quad p_0 = ip_4, \\ A_0 = iA_4, \quad \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}_E, \\ \pi_1\pi_1 + \pi_2\pi_2 + \pi_3\pi_3 \equiv -\boldsymbol{\pi}_E^2, \quad (\pi)^2 = -\pi_4^2 - \boldsymbol{\pi}_E^2, \quad (18)$$

и тогда выражение (16) может быть записано следующим образом:

$$\mathrm{Tr}_{b_0^2}\, e^{-zH} = -b_0^2\Big(A_0 + \frac{A_1}{z}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big) \times \\ \times \int d^4x\ \langle x|\, e^{-z((\pi_4)^2 + \alpha\boldsymbol{\pi}_E^2)}\, |x\rangle\, \big|_{\alpha=1}. \quad (19)$$

Таким образом, удалось свести задачу поиска вклада порядка b_0^2 к вычислению матричного элемента в уравнении (19). Идею вычисления матричных элементов подобного вида можно найти, например, в [15].

В нашем случае

$$\langle x|\, e^{-z(\pi)_E^2}\, |x\rangle = \frac{H}{16\pi^2 z\sqrt{\alpha}}\, \frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha zH)}. \quad (20)$$

Последняя формула позволяет получить окончательное выражение для вклада в эффективое действие членов порядка b_0^2

$$i\Gamma_{b_0^2}^{\mathrm{eff}}(H, b) = -\frac{b_0^2}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\, \mathrm{Tr}\, e^{-zH} = \\ = -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x \int_0^\infty dz\, e^{-zm^2}\, \frac{2H^2}{\mathrm{sh}^2\, zH} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{b_0^2}^{\mathrm{eff}}. \quad (21)$$

После вычитания расходимости конечное выражение для эффективного лагранжиана примет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{b_0^2}^{\mathrm{eff}}(H, b) = -\frac{b_0^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dz\, e^{-zm^2}\Big(\frac{H^2}{\mathrm{sh}^2\, zH} - \frac{1}{z^2}\Big). \quad (22)$$

4. Эффективное действие в $(b^0)^2$-приближении. Электрическое поле

Рассмотрим квадратичный по b^μ вклад в эффективное действие (4) при наличии только электрической компоненты электромагнитного поля ($F_{03} = -F_{30} = E \neq 0$) и $b^\mu = \{0, b_1, 0, 0\}$.

Воспользуемся формулой Бейкера–Хаусдорфа. Выражение для коммутатора

$$[A, B] = (2iz\gamma^5)(2iz)b_\mu F_\alpha{}^\mu \sigma^{\alpha\nu}\Pi_\nu$$

в выбранной конфигурации полей равно нулю. Выражения A и B имеют вид (7). В этом случае экспонента «расцепляется»:

$$\mathrm{Tr}\, e^{-zH} = \mathrm{Tr}\Big[e^{(2iz\gamma^5\sigma^{1\nu}b_1\Pi_\nu)} e^{(z(\Pi)^2 - zF_{03}\sigma^{03})} e^{-zb^2 - zm^2}\Big]. \quad (23)$$

В правой части выражения (23) разложим экспоненту до второго порядка по b_1 включительно и ограничимся рассмотрением слагаемых, пропорциональных b_1^2:

$$\mathrm{Tr}_{b_1^2}\, e^{-zH} = b_1^2\, \mathrm{Tr}\Big[\Big(z + 2z^2(\Pi_0\Pi^0 + \Pi_2\Pi^2 + \Pi_3\Pi^3) - \\ - 2z^3F_{03}\sigma^{03}\Big) e^{z(\Pi^2 - F_{03}\sigma^{03})} e^{-zm^2}\Big]. \quad (24)$$

После взятия следа по спинорным индексам выражение (24) может быть переписано так:

$$\mathrm{Tr}_{b_1^2}\, e^{-zH} = 4{b_1}^2 \int d^4x\ \langle x|\, \big[A_0 + A_1(\Pi_0\Pi^0 + \Pi_2\Pi^2 + \Pi_3\Pi^3)\big] \times \\ \times e^{z(\Pi)^2}\, |x\rangle\, e^{-zm^2}, \quad (25)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_0 = z\cos(zF_{03}) - 2z^2F_{03}\sin(zF_{03}), \quad A_1 = 2z^2\cos(zF_{03}). \quad (26)$$

Для вычисления этого матричного элемента перейдем в пространство Евклида (18), тогда

$$\mathrm{Tr}_{b_1^2}\, e^{-zH} = 4b_1^2\Big(A_0 + \frac{A_1}{z}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big) \times \\ \times \int d^4x\ \langle x|\, e^{-z(\alpha(\Pi_4)^2 + (\Pi_1)^2 + \alpha(\Pi_2)^2 + \alpha(\Pi_3)^2)}\, |x\rangle\, \big|_{\alpha=1}. \quad (27)$$

Идею вычисления матричных элементов подобного вида можно найти, например, в [16]:

$$i\Gamma_{b_1^2}(A, b) = \frac{b_1^2}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\, \mathrm{Tr}\, e^{-zH} = \\ = 2b_1^2 \int d^4x \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-zm^2}\Big(A_0 + \frac{A_1}{z}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\frac{E}{16\pi^2 z}\, \frac{\alpha}{\sin(\alpha zE)}\Big|_{\alpha=1}. \quad (28)$$

После подстановки A_1, A_0 для эффективного действия получим

$$i\Gamma_{b_1^2}^{\mathrm{eff}}(E, b) = -\frac{b_1^2}{4\pi^2}\int d^4x \int_0^\infty dz\, e^{-zm^2}\, \frac{2E^2}{\sin^2(zE)} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{b_1^2}^{\mathrm{eff}}. \quad (29)$$

После вычитания расходимости находим конечное выражение для эффективного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{b_1^2}^{\mathrm{eff}}(E, b) = -\frac{b_1^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dz\, e^{-zm^2}\Big(\frac{2E^2}{\sin^2(zE)} - \frac{1}{z^2}\Big). \quad (30)$$

5. Асимптотические приближения. Магнитное поле

В предыдущем разделе мы получили выражение $\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)$, которое представляет собой вклад в эффективный лагранжиан КЭД в предположении существования ненулевой феноменологической константы связи b_μ. Таким образом, полный лагранжиан может быть записан в виде суммы трех слагаемых:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE} + \mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b),$$

где $\mathcal{L}_0$ — лагранжиан свободного электромагнитного поля, $\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}$ — эффективный лагранжиан Гейзенберга–Эйлера [15] и $\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)$ — пропорциональный b_0^2 вклад в эффективный лагранжиан.

Хорошо известно, что $|\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}| \ll |\mathcal{L}_0|$, $|\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)| \ll |\mathcal{L}_0|$ для самого широкого диапазона полей, но остается вопрос, как соотносятся между собой $\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}$ и $\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)$. Для ответа на него преобразуем выражение (22) к удобному для анализа виду [17]

$$\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b) = -\frac{b_0^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dz\, e^{-zm^2}\Big(\frac{H^2}{{\rm sh}^2(zH)} - \frac{1}{z^2}\Big) = \\ = \frac{b_0^2}{4\pi^2}m^2\int_0^\infty d(Hz)\, e^{-(zH)\frac{m^2}{H}}\Big({\rm cth}(zH) - \frac{1}{(zH)}\Big) = \\ = -\frac{b_0^2}{4\pi^2}m^2\Big(\psi(y) - \ln y + \frac{1}{2y}\Big), \quad (31)$$

где $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, $y \equiv \frac{m^2}{2H}$.

В принятых обозначениях заметим, что $y \gg 1$ соответствует случаю слабого поля, а $y \to 0$ — сильному полю.

Слабое поле

В случае когда аргумент пси-функции Эйлера удовлетворяет условию $y \gg 1$, удобно воспользоваться ее представлением в виде следующего ряда [18]:

$$\psi(y) = \ln(y) - \frac{1}{2y} - \sum_{n=1}^{m}\frac{B_{2n}}{2n\, y^{2n}} + O\Big(\frac{1}{y^{2n+2}}\Big) \approx \\ \approx \ln(y) - \frac{1}{2y} - \frac{B_2}{2y^2} - O\Big(\frac{1}{y^4}\Big), \quad (32)$$

где B_{2n} — числа Бернулли: $B_0 = 1$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ... С учетом сделанного приближения, асимптотика выражения (31) запишется как

$$\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(y,b) = -\frac{b_0^2}{4\pi^2}m^2\Big(-\frac{1}{12y^2} + O(\frac{1}{y^4})\Big) \approx \frac{b_0^2}{48\pi^2}\frac{H^2}{m^2}.$$

Сильное поле

В случае когда аргумент пси-функции Эйлера удовлетворяет условию $y \to 0$, удобно пси-функцию Эйлера записать в виде следующего ряда [17]:

$$\psi(y) = -C - \frac{1}{y} + y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(y+k)},$$

где C — постоянная Эйлера. Тогда при $y \ll 1$ имеем

$$\psi(y) = -C - \frac{1}{y} + y\zeta(2) - y^2\zeta(3) + O(y^3),$$

где $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана. С учетом сделанного приближения получаем асимптотику выражения (31)

$$\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(y,b) \approx -\frac{b_0^2}{4\pi^2}H.$$

Запишем хорошо известные предельные выражения для эффективного лагранжиана Гейзенберга–Эйлера [15].

Слабое поле: $\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}(H) = \frac{e^4}{8\pi^2\, 45}\frac{H^4}{m^4}$ $(H \ll H_0 = m^2/e = 4.41\times 10^{13}$ Гс).

Сильное поле: $\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}(H) = \frac{m^4}{24\pi^2}\big(\frac{H}{H_0}\big)^2\ln\big(\frac{H}{H_0}\big)$, $(H \gg H_0)$.

В результате получаем соответствующие отношения для случаев сильного и слабого поля:

$$\frac{\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}(H)}{\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)} \sim \frac{H}{H_0}\Big(\frac{m}{b_0}\Big)^2\ln\Big(\frac{H}{H_0}\Big) \quad (H \gg H_0), \qquad (33)$$

$$\frac{\mathcal{L}^{\rm eff}_{\rm HE}(H)}{\mathcal{L}^{\rm eff}_{b_0^2}(H,b)} \sim \Big(\frac{m}{b_0}\Big)^2\Big(\frac{H}{H_0}\Big)^2 \quad (H \ll H_0). \qquad (34)$$

Как видно, в случае сильного поля (33) вклад в эффективный лагранжиан слагаемых, обусловленных наличием ненулевой феноменологической константы в уравнении Дирака, подавлен относительно однопетлевых вакуумных поправок. В случае же слабого поля (34) этот вклад может оказаться соизмеримым с однопетлевым.

Заключение

В настоящей работе на основе разработанного нами обобщения метода собственного времени разработан новый способ подсчета вклада в эффективный лагранжиан члена, нарушающего лоренц- и CPT-симметрию, с точным учетом постоянного внешнего электромагнитного поля. С помощью этого подхода получены следующие результаты. Показано, что в расширенной стандартной модели линейный по феноменологическому постоянному параметру b^μ вклад в эффективное действие (член Черна–Саймонса) не образуется, что согласуется с работами ряда авторов [12, 13] и противоречит результатам работ [9–11]. В то же время получен отличный от нуля вклад в эффективный лагранжиан в квадратичном по b_0-параметру приближении, согласующийся с результатом работы [12]. Представлены оценки квадратичного по b_μ вклада на основе полученных асимптотических выражений для случаев сильного и слабого магнитного поля. Показано, что в сильном магнитном поле этот вклад исчезающе мал по сравнению с однопетлевым вакуумным лагранжианом Гейзенберга–Эйлера, тогда как в случае слабого поля он может быть конкурирующим. Метод, разработанный в статье, в последующем может быть применен для вычисления других эффектов, связанных с нарушением лоренц- и CPT-инвариантности.

Авторы выражают благодарность профессору А. В. Борисову и доктору физ.-мат. наук А. Е. Лобанову за полезное обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch.* // ArXiv: hep-th/9712016v2.
2. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Razumovsky A.S.* // Phys. Rev. 2004. **D70**. P. 025003.
3. *Zhukovsky V.Ch., Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // Phys. Rev. 2006. **D73**. P. 065016.
4. *Bluhm R.* // ArXiv: hep-ph/0011272.
5. *Alfaro J., Andrianov A.A., Cambiaso M.* et al. // ArXiv: hep-th/0904.3557v2.
6. *Bluhm R., Kostelecký V.A., Russell N.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **79**. P. 1432.
7. *Kostelecký V.A., Samuel S.* // Phys. Rev. D. 1989. **D39**. P. 683.
8. *Colladay D., Kostelecký V.A.* // Phys. Rev. D. 1997. **D55**. P. 6760.
9. *Jackiw R., Kostelecký V.A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 3572.
10. *Chaichian M., Chen W.F, Gonzalez Felipe R.* // Phys. Lett. 2001. **B503**. P. 215.
11. *Hott M.B., Tomazelli J.L.* // ArXiv: hep-th/9912251.
12. *Sitenko Y.A., Rulik K.Y.* // Eur. Phys. J. 2003. **C28**. P. 405.
13. *Altschul B.* // Phys. Rev. 2004. **D69**. P. 125009.
14. *Байер В.Н.,Катков В.М, Фадин В.С.* Излучение релятивистских электронов. М., 1973.
15. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Курс теоретической физики. Т. 4. Квантовая электродинамика. М., 1989.
16. *Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М., 1989.
17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1953.

Effective action of QCD in a constant electromagnetic field under the condiction of possible Lorentz invariance violation of Dirac equation

A. F. Bubnov, V. Ch. Zhukovsky[a]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *zhukovsk@phys.msu.ru.*

In this paper, corrections to the effective action of QED are calculated with account for the axial-vector condensate b_μ violating Lorentz invariance. It is demonstrated that in the case of a constant electromagnetic field the linear in b_μ correction to the one-loop effective action is absent. The contribution quadratic to b_μ is calculated in the cases of constant electric and magnetic fields. Asymptotic estimates are found for the quadratic in b_μ contribution to the action in the cases of strong and weak magnetic field intensity.

Keywords: Standard model extension, Lorentz and CPT violations.
PACS: 11.30.Cp, 12.60.-i, 11.10.Ef, 12.20.Ds.
Received 4 December 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2010).

Сведения об авторах

1. Бубнов Андрей Францевич — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: bfandrey@mail.ru.
2. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор, зам. зав. кафедрой; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.