КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Условная матрица плотности: перепутанные состояния в представлении Гейзенберга

О. Д. Тимофеевская

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: olga@goa.bog.msu.ru

Статья поступила 30.10.2009, подписана в печать 29.11.2009

Применение условной матрицы плотности в представлении Гейзенберга к процессам, обусловленным перепутыванием, позволяет исключить какую-либо нелокальность в понимании этих явлений. Рассматривается квантовое перепутывание двух- и четырехчастичных систем, а также квантовые корреляции, отличные от перепутывания, и причины их возникновения.

Ключевые слова: представление Гейзенберга, перепутанные квантовые состояния, кубит, матрица плотности, условная матрица плотности, обмен перепутыванием.

УДК: 530.1. PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ca.

Введение

В современных приложениях квантовой механики, таких как квантовые вычисления, квантовые коммуникации, квантовая криптография, широко используется понятие квантового перепутывания [1] (или неразделимости) квантовых состояний. В квантовой информации свойства перепутаных состояний рассматриваются как один из возможных ресурсов достижений этого направления квантовой теории [2]. В стандартном формализме при описании перепутанных состояний привычными стали такие понятия как «коллапс волновой функции», «нелокальность», «действие на расстоянии», которые возникают в тех ситуациях, когда квантовая система разделена на пространственно разнесенные подсистемы.

В работах О. А. Хрусталева [3–5] был развит формализм условной матрицы плотности, который позволяет дать описание квантово-механических явлений (в том числе и перепутывания) без парадоксов и нелокальности. В составной системе $S = S_1 \cup S_2$ условная матрица плотности определяет состояние подсистемы S_1 при условии, что подсистема S_2 выделяется в чистом состоянии.

В последнее время возник интерес к использованию представления Гейзенберга для интерпретации квантовых интерференционных экспериментов [6], для описания потока квантовой информации [7] в квантово-механических системах, в частности в цепочке спинов [8] при анализе квантовых вычислений [9, 10].

В настоящей работе, опираясь на определение условной матрицы плотности, вводятся $\hat{q}$-операторы отдельных кубитов, которые локализуются вместе с самими частицами, и, следовательно, вся система не имеет каких-либо нелокальных свойств. В представлении Гейзенберга состояние системы — матрица плотности не изменяется, и носителями информации выступают $\hat{q}$-операторы, свойства которых определяют свойства перепутывания.

Рассматриваются перепутанные ЭПР-состояния парадокса в форме Бома [11], а также перепутывание в подсистемах большей также перепутанной системы на примере четырехчастичного процесса обмена перепутыванием [12]. Показано, что использование условной матрицы плотности в гейзенберговском представлении естественным образом позволяет описывать данные явления, не оставляя места дальнодействию.

1. Матрица плотности и $\hat{q}$-операторы кубитов

Общее определение квантового состояния в виде матрицы плотности [13] $\hat{\rho}$ предполагает следующую процедуру вычисления средних физических величин $\hat{F}$: $<F> = \mathrm{Tr}(\hat{F}\hat{\rho})$. В общем виде матрица плотности одного кубита имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{E} + q_i\hat{\sigma}_i),$$
$$\boldsymbol{q} = r\boldsymbol{n}, \quad |\boldsymbol{n}| = 1, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

здесь $\hat{\sigma}_i$ — матрицы Паули, $\hat{E}$ — единичная матрица. Введем $\hat{q}$-операторы, «операторы кубита», в начальный момент времени $(t = 0)$ как матрицы Паули: $\hat{q}_i = \hat{\sigma}_i$. В представлении Шрёдингера матрица плотности кубита в момент времени t записывается как

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}(\hat{E} + \boldsymbol{q}(t)\hat{\boldsymbol{s}}),$$

и средние значения $\hat{q}$-операторов в момент времени t равны

$$<\hat{\boldsymbol{q}}(t)> = \mathrm{Tr}(\hat{\boldsymbol{q}}(t)\hat{\rho}) = \mathrm{Tr}(\hat{\boldsymbol{q}}\hat{\rho}(t)) = \boldsymbol{q}(t),$$

где $\hat{\boldsymbol{q}}(t) = \hat{U}^{+}(t)\hat{\boldsymbol{q}}\hat{U}(t)$ операторы в представлении Гейзенберга, $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции. Таким образом,

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}(\hat{E} + <\hat{q}_i(t)>\hat{\sigma}_i).$$

Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ — пространство состояний n кубитов. Определим

$\hat{\boldsymbol{q}}^{(l)}(t)$ — операторы кубитов ($l=1,\ldots,n$) в представлении Гейзенберга, где

$$\hat{q}_i^{(l)}(0)=\hat{E}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\hat{E}^{(l-1)}\otimes\hat{\sigma}_i^{(l)}\cdots\otimes\hat{E}^{(n)}.$$

Для двух кубитов матрица плотности в момент времени t имеет вид

$$\hat{\rho}_2(t)=\frac{1}{2^2}\big(\hat{E}^{(1)}\otimes\hat{E}^{(2)}+<\hat{q}_i^{(1)}(t)>\hat{\sigma}_i^{(1)}\otimes\hat{E}^{(2)}+ \\ +<\hat{q}_i^{(2)}(t)>\hat{E}^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_i^{(2)}+<\hat{q}_i^{(1)}(t)\hat{q}_j^{(2)}(t)>\hat{\sigma}_i^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_j^{(2)}\big);$$

для n кубитов

$$\hat{\rho}_n(t)=\frac{1}{2^n}\Bigg(\hat{E}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\hat{E}^{(n)}+\sum_l<\hat{q}_i^{(l)}(t)>\hat{\sigma}_i^{(l)}\otimes\hat{E}^{(n-1)}+\ldots \\ \ldots+<\hat{q}_{i_1}^{(1)}(t)\cdots\hat{q}_{i_n}^{(n)}(t)>\hat{\sigma}_{i_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\hat{\sigma}_{i_n}^{(n)}\Bigg).$$

Для составной системы $S=S_1\cup S_2$ матрица плотности всей системы однозначно определяет состояния подсистем как приведенные матрицы плотности. Приведенная матрица плотности l-го кубита для системы кубитов равна

$$\hat{\rho}^{(l)}(t)=\frac{1}{2}\big(\hat{E}^{(l)}+<\hat{q}_i^{(l)}(t)>\hat{\sigma}_i^{(l)}\big). \tag{1}$$

Приведенные $\hat{\boldsymbol{q}}^{r,(l)}$ операторы отдельного кубита, действующие в подпространстве $\mathcal{H}_l$, получаются путем игнорирования всех компонент, не принадлежащих своему подпространству, что осуществляется путем усреднения по этим компонентам.

2. Условная матрица плотности и условные $\hat{q}$-операторы

Условная матрица плотности [4] определяет состояние подсистемы S_1 при условии, что подсистема S_2 составной системы выделяется в чистом состоянии $\hat{P}_\Psi^{(2)}=|\Psi\rangle\langle\Psi|$:

$$\hat{\rho}_\Psi^{c,(1)}=\frac{\mathrm{Tr}_2(\hat{\rho}(1,2)\hat{P}_\Psi^{(2)})}{p(\Psi)}, \tag{2}$$

где $p(\Psi)$ вероятность обнаружить систему S_2 в состоянии $|\Psi\rangle$, если система S находится в состоянии $\rho(1,2)$. Если состояния $|\Psi_m\rangle$ образуют базис, то приведенную матрицу плотности $\hat{\rho}^{(1)}$ можно представить в виде [5]

$$\hat{\rho}^{(1)}=\sum_m p_m\hat{\rho}_m^{c,(1)},$$

где p_m соответствующие вероятности.

Рассмотрим систему из двух кубитов. Так как приведенная матрица плотности в момент времени t определена соотношением (1), то вероятность выделить второй кубит в состоянии $|\beta\rangle$ равна

$$p_\beta^{(2)}(t)=\frac{1}{2}(1+<\hat{q}_i^{(2)}(t)>\langle\beta|\hat{\sigma}_i^{(2)}|\beta\rangle).$$

Условную матрицу плотности первого кубита при условии, что второй выделяется в состоянии $|\beta\rangle$ запишем в виде

$$\hat{\rho}_\beta^{c,(1)}(t)=\frac{1}{2}\big(\hat{E}^{(1)}+<\hat{q}_{i,\beta}^{c(1)}(t)>\hat{\sigma}_i^{(1)}\big),$$

где

$$\hat{q}_{i,\beta}^{c(1)}(t)=\frac{1}{2p_\beta}\hat{q}_i^{(1)}(t)\big(1+\hat{q}_j^{(2)}(t)\langle\beta|\hat{\sigma}_j^{(2)}|\beta\rangle\big). \tag{3}$$

Заметим, что справедливо соотношение для $\hat{q}$-операторов

$$\hat{q}_i^{(1)}=\sum_m p_m\hat{q}_{i,m}^{c(1)},$$

где p_m — вероятности.

Таким образом, для тех событий, которые отбираются при условии, что второй кубит выделяется в чистом состоянии $|\beta\rangle$, $\hat{q}$-операторы первого кубита в представлении Гейзенберга в момент времени t имеют вид $\hat{q}_{i,\beta}^{c,(1)}(t)$ в пространстве $\mathcal{H}$. Назовем их условными $\hat{q}$-операторами.

Полученные выражения легко обобщаются на случай n кубитов. Пусть, например, система S_2 — это кубиты s и k, которые выделяются в подпространстве $\mathcal{H}_s\otimes\mathcal{H}_k$ в чистом состоянии $|\beta\rangle(s,k)$. Для вероятности такого события получаем выражение

$$p_\beta^{(sk)}=\frac{1}{2^2}\big(1+<\hat{q}_i^{(s)}>\langle\beta|\hat{\sigma}_i^{(s)}\hat{E}^{(k)}|\beta\rangle+<\hat{q}_i^{(k)}>\langle\beta|\hat{\sigma}_i^{(k)}\hat{E}^{(s)}|\beta\rangle+ \\ +<\hat{q}_i^{(k)}\hat{q}_j^{(s)}>\langle\beta|\hat{\sigma}_i^{(k)}\hat{\sigma}_j^{(s)}|\beta\rangle\big).$$

Условные операторы l-го кубита при условии, что кубиты s и k выделяются в состоянии $|\beta\rangle$, равны

$$\hat{q}_{i,\beta}^{c(l)}(t)=\frac{\hat{q}_i^{(l)}(t)}{2^2p_\beta}\big(1+\hat{q}_j^{(s)}(t)\langle\beta|\hat{\sigma}_j^{(s)}\hat{E}^{(k)}|\beta\rangle+ \\ +\hat{q}_j^{(k)}(t)\langle\beta|\hat{\sigma}_j^{(k)}\hat{E}^{(s)}|\beta\rangle+\hat{q}_j^{(k)}(t)\hat{q}_m^{(s)}(t)\langle\beta|\hat{\sigma}_j^{(k)}\hat{\sigma}_m^{(s)}|\beta\rangle\big). \tag{4}$$

3. Система двух кубитов в антисимметричном состоянии $|\Psi-\rangle$

Обозначим начальное состояние двух кубитов как $|0\rangle_1|0\rangle_2$, где $\hat{\sigma}_3|0\rangle=|0\rangle$, $\hat{\sigma}_3|1\rangle=-|1\rangle$, и реализуем $\hat{q}$-операторы первой и второй частиц через матрицы Паули:

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(1)}=\big(\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{E}^{(2)},\hat{\sigma}_2^{(1)}\hat{E}^{(2)},\hat{\sigma}_3^{(1)}\hat{E}^{(2)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(2)}=\big(\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)},\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(2)},\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\big).$$

Как известно, в теории квантовых вычислений любое унитарное преобразование с любой степенью точности может быть представлено последовательностью универсальных квантовых элементов [14]. Регистр квантового компьютера состоит из конечного числа кубитов, которые приготовляются в некотором начальном состоянии $|\Psi_0\rangle_n$. Квантовое вычисление — это унитарное преобразование $\hat{U}_n$. Результат вычисления получается в результате измерения конечного состояния $\hat{U}_n|\Psi_0\rangle_n$. Любое вычисление $\hat{U}_n$ реализуется в виде последовательности только однобитных $\hat{U}_1$, преобразующих отдельные кубиты, и двубитных $\hat{U}_2$, преобразующих отдельные пары кубитов, унитарных преобразований. Однобитные преобразования фазового поворота, однобитное преобразование Адамара и двубитное преобразование CNOT (контролируемое NOT) образуют универсальную систему квантовых элементарных преобразований — элементов, через которые может быть реализовано $\hat{U}_n$. Число таких квантовых элементов определяет сложность вычисления.

Так, построить антисимметричное состояние Эйнштейна–Подольского–Розена

$$|\Psi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2)$$

из начального состояния $|0\rangle_1|0\rangle_2$ можно, применяя последовательность универсальных преобразований

$$\hat{U}_0 = \mathrm{CNOT}_{12}\,\hat{H}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)},$$

где $\hat{H}$ — преобразование Адамара

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

операторы $\hat{\sigma}_1$ реализуют элемент NOT:

$$\hat{\sigma}_1|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{\sigma}_1|1\rangle = |0\rangle,$$

двубитный элемент CNOT — это контролируемый элемент NOT:

$$\mathrm{CNOT}_{12} = \hat{P}_0^{(1)}\hat{E}^{(2)} + \hat{P}_1^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)},$$

где $\hat{P}_0$ и $\hat{P}_1$ — проекторы на векторы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно.

В результате преобразования $\hat{\boldsymbol{q}}(t_0) = \hat{U}^+{}_0\hat{\boldsymbol{q}}\hat{U}_0$ имеем

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(1)}(t_0) = \big(-\hat{\sigma}_3^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}, \hat{\sigma}_2^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}, \hat{\sigma}_1^{(1)}E^{(2)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(2)}(t_0) = \big(E^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(2)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\big).$$

Таким образом, $\hat{q}$-операторы первого кубита несут информацию о втором кубите, а второго о первом. Эта информация была получена в процессе образования перепутанного состояния. Следовательно, даже в случае большого расстояния между кубитами какая-либо нелокальность отсутствует. Для тех событий, когда второй кубит выделяется в чистом состоянии $|\beta\rangle$, условные $\hat{q}$-операторы первого кубита $\hat{\boldsymbol{q}}_\beta^{c,(1)}(t)$ определяются формулой (3) с $p_\beta = \frac{1}{2}$.

4. Обмен перепутыванием

В качестве примера рассмотрим применение описанного формализма к четырехкубитному процессу обмена перепутыванием [12]. Пусть исходное состояние $|0\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4$ и пары кубитов (1–2) и (3–4) образуют в момент времени t_0 перепутанные пары $|\Psi-\rangle_{12}$ и $|\Psi-\rangle_{34}$.

Их $\hat{q}$-операторы в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$ согласно формуле (5) равны

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(1)}(t_0) = $$
$$= \big(-\hat{\sigma}_3^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}, \hat{\sigma}_2^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}, \hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(2)}(t_0) = $$
$$= \big(\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(3)}(t_0) = $$
$$= \big(-\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, \hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_2^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, \hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(4)}(t_0) = $$
$$= \big(\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, -\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{\sigma}_2^{(4)}, -\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{\sigma}_3^{(4)}\big).$$

Операторы первого и второго кубитов взаимозависимы, что произошло в процессе создания перепутанного состояния $|\Psi-\rangle_{12}$. Аналогично для кубитов 3 и 4. Но кубиты 1 и 4 не перепутаны: $\hat{q}$-операторы кубитов $\hat{q}^{(1)}$ и $\hat{q}^{(4)}$ не зависят друг от друга. Вместе с тем эти кубиты скоррелированы в том смысле, что каждый из них перепутан с системой кубитов (2–3), поэтому, если отбирать события, когда кубиты (2–3) выделяются в некотором состоянии $|\beta\rangle_{23}$, то в пространстве $\mathcal{H}$ такому условию соответствуют условные $\hat{q}$-операторы частиц 2 и 4.

Пусть состояние $|\beta\rangle_{23} = |\Psi-\rangle_{23}$, что соответствует обмену перепутыванием. Тогда условные $\hat{q}$-операторы частиц 1 и 4 равны

$$\hat{q}_{i,\Psi_{23}}^{c,(1)}(t) = \hat{q}_i^{(1)}(t)\big(1 - \hat{q}_j^{(2)}(t)\hat{q}_j^{(3)}(t)\big),$$
$$\hat{q}_{i,\Psi_{23}}^{c,(4)}(t) = \hat{q}_i^{(1)}(t)\big(1 - \hat{q}_j^{(2)}(t)\hat{q}_j^{(3)}(t)\big).$$

В подпространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_4$ после усреднения по остальным кубитам получаем

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{q}}^{c,(1)}(t) &= \big(-\hat{\sigma}_3^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, \hat{\sigma}_2^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, \hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{E}^{(4)}\big), \\ \hat{\boldsymbol{q}}^{c,(4)}(t) &= \big(\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(4)}\big). \end{aligned} \tag{5}$$

Такие $\hat{q}$-операторы (4) соответствуют состоянию $|\Psi-\rangle_{14}$.

Таким образом, при отборе кубитов 2–3 в перепутанном состоянии $|\Psi-\rangle_{23}$ прежде нескоррелированные кубиты 1–4 оказываются в состоянии $|\Psi-\rangle_{14}$, при этом какая-либо нелокальность отсутствует.

Подробнее опишем процедуру выделения состояния $|\Psi-\rangle_{23}$ с помощью проекционного измерения. Способы выделения этого состояния хорошо известны. Совершим унитарную операцию

$$\hat{U}_1 = \hat{H}_3\,\mathrm{CNOT}_{32}:$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(2)}(t_1) = $$
$$= \big(-\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_2^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}\big),$$
$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(3)}(t_1) = $$
$$= \big(\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}), -\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{\sigma}_2^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}, -\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\big).$$

Добавим в систему вспомогательные кубиты 5 и 6 в начальном состоянии $|0\rangle_5|0\rangle_6$. Произведем проективное измерение: CNOT_{35} и CNOT_{26}. Состоянию $|\Psi-\rangle_{23}$ будут соответствовать события, когда кубиты 5 и 6 выделяются в состояниях $|1\rangle$. Эти вспомогательные кубиты никогда не взаимодействовали с кубитами 1 и 4, но располагают информацией об этих кубитах:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{q}}^{(5)}(t_2) = \big(&\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}\hat{\sigma}_1^{(5)}\hat{E}^{(6)}, -\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\hat{\sigma}_2^{(5)}\hat{E}^{(6)}, \\ &-\hat{E}^{(1)}\hat{\sigma}_1^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\hat{\sigma}_3^{(5)}\hat{E}^{(6)}\big), \\ \hat{\boldsymbol{q}}^{(6)}(t_2) = \big(&\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_1^{(6)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_2^{(6)}, \\ &-\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{\sigma}_1^{(3)}\hat{E}^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_3^{(6)}\big). \end{aligned}$$

Вычисление условных операторов для кубитов 1 и 4 по формуле (4) при условии, что кубиты 5 и 6 выделяются в состоянии $|1\rangle_5|1\rangle_6$, как легко убедиться, эффективно приводит лишь к следующей замене:

$$\hat{q}_i^1 \to -\hat{q}_i^1\hat{q}_3^5 \quad (i = 1, 2), \quad \hat{q}_3^4 \to -\hat{q}_i^4\hat{q}_3^6 \quad (i = 2, 3),$$

т. е.

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{c,(1)}(t_3) = \big(-\hat{\sigma}_3^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\hat{\sigma}_3^{(5)}\hat{E}^{(6)}, \hat{\sigma}_2^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{\sigma}_3^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\hat{\sigma}_3^{(5)}\hat{E}^{(6)},$$

$$\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{E}^{(4)}\hat{\sigma}_3^{(5)}\hat{E}^{(6)}),$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{c,(4)}(t_3) = (\hat{E}^{(1)}\hat{E}^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{\sigma}_1^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_3^{(6)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{\sigma}_2^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_3^{(6)}, -\hat{\sigma}_1^{(1)}\hat{\sigma}_3^{(2)}\hat{E}^{(3)}\hat{\sigma}_3^{(4)}\hat{E}^{(5)}\hat{\sigma}_3^{(6)}).$$

В подпространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_4$ после усреднения по остальным кубитам получаем (6): $\hat{\boldsymbol{q}}^{c,(1)}(t_3)$ и $\hat{\boldsymbol{q}}^{c,(4)}(t_3)$. Заметим, что хотя t_3 может быть как меньше, так и больше t_2, что подтверждается экспериментально [12], фактический отбор событий может быть произведен только после измерения кубитов 5 и 6, результаты которых в виде двух классических битов информации должны быть получены для отбора условных кубитов 1–4, т. е., при $t_3 > t_2$.

Заключение

В настоящее время явление квантового перепутывания находится в центре интересов самых разных направлений квантовой физики ([15, 16] и др.).

Использование аппарата условной матрицы плотности в квантовых коммуникациях при описании разделения составной системы на подсистемы и их последующего воссоединения дает возможность избежать квантово-механических парадоксов, коллапса волновых функций, дальнодействия. В настоящей работе представлена реализация условной матрицы плотности в представлении Гейзенберга.

Согласно определению условной матрицы плотности в представлении Шрёдингера, произведено построение условных операторов кубитов в случае перепутанных состояний в представлении Гейзенберга. Кубиты локализуются вместе с частицами, но несут информацию о других кубитах системы, которая была получена в процессе образования перепутанных состояний. Использование условной матрицы плотности и гейзенберговского представления позволяет убедиться в локальности квантовых явлений.

Настоящий подход может быть использован при описании потока квантовой информации в составных системах, находящихся в перепутанных состояниях.

Список литературы

1. *Прескилл Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления. Ижевск, 2008.
2. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М., 2006.
3. *Белокуров В.В., Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А.* Квантовая телепортация — обыкновенное чудо. Ижевск, 2000.
4. *Belokurov V.V., Khrustalev O.A., Sadovnichy V.A., Timofeevskaya O.D.* // Proc. of XXIII Solvay Conference on Physics. Delphi Latin, 2001. P. 555.
5. *Belokurov V.V., Khrustalev O.A., Sadovnichy V.A., Timofeevskaya O.D.* // Part. Nucl. Lett. 2003. **116**, N 1. P. 16.
6. *Tollaksen J., Aharonov Y., Casher A.* et al. // arXiv: quant-ph/0910.4227v1.
7. *Timpson C.* // Foundation of Physics. 2005. **35**, N 2. P. 22.
8. *Latorre G., Rico E., Vidal G.* // Quantum Information and Computation. 2004. **4**. P. 48.
9. 9. *Deutsch D., Hayden P.* // Proc. R. Lond. 2000. **A456**. P. 1759.
10. *Hewitt-Horsman C., Vedral V.* // Phys. Rev. 2007. **A76**. P. 062319.
11. *Бом Д.* Квантовая теория. М., 1951.
12. *Jennewein T., Wihs G., Pan J.-W.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. **88**. P. 017903.
13. *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М., 1964.
14. *Barenko A., Bennett C., Cleve R.* et al. // Phys. Rev. 1995. **A52**. P. 3457.
15. *Sergeevich A., Manko V.I.* // arXiv: quant-ph/0910.1405v1.
16. *Sangouard N., Simon Ch., Condrean T.* et al. // Phys. Rev. 2008. **A78**. P. 050301(R).

Conditional density matrix: entanglement in Heisenberg representation

O. D. Timofeevskaya

Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: olga@goa.bog.msu.ru.

The conditional density matrix in the Heisenberg representation is introduced to describe entanglement and to get physical understanding of entanglement as an absolutely local effect. An analysis of entanglement swapping in this approach is given and it is shown that it does not in fact contain nonlocality. Two- and four-particle entangled systems considered and quantum correlations different from entanglement are discussed.

Keywords: Heisenberg representation, entanglement, qubit, density matrix, conditional density matrix, entanglement swapping.
PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ca.
Received 30 October 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2010).

Сведения об авторе

Тимофеевская Ольга Дмитриевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел: (495) 939-26-96, (495) 939-16-47, e-mail: olgamsu1@yandex.ru, olga@goa.bog.msu.ru.