Корреляционный тензор магнитного поля в пространствах постоянной кривизны

А. С. Рубашный[1,a], Д. Д. Соколов[2,b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, [1]механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей; [2]физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: [a]alex.rubashny@gmail.com, [b]sokoloff@dds.srcc.msu.su

Статья поступила 09.12.2009, подписана в печать 20.12.2009

Анализируется понятие статистической однородности и изотропии для векторных полей в пространственных сечениях постоянной кривизны. Получены условия бездивергентности для соответствующего корреляционного тензора в случае положительной и отрицательной кривизны и показано, что эти условия отличаются от соответствующего условия для полей в евклидовом пространстве.

Ключевые слова: космологические модели, однородность и изотропия, магнитное поле.

УДК: 530.12. PACS: 98.80.Jk.

Введение

Анализ литературы (см., напр., обзор [1]) показывает, что понятия, возникающие в статистической гидромеханике и магнитной гидродинамике (например, представление о статистически однородном и изотропном магнитном поле) нередко используются в космологии. При этом содержание этих понятий, развитых для физических полей в евклидовом пространстве, не подвергается переосмыслению, несмотря на то что пространственные сечения космологических моделей могут быть пространствами постоянной, но отличной от нуля кривизны. В то же время уже простейшая конструкция статистической гидромеханики — корреляционный тензор поля скорости или магнитного поля — требует перемножения векторных полей, приложенных в различных точках пространства, однако непосредственно выполнить эту операцию в искривленном римановом пространстве невозможно. Тем более не очевидно, как выписать в искривленном пространстве общей теории относительности условие бездивергентности корреляционного тензора магнитного поля или поля скорости несжимаемой жидкости.

В настоящей работе мы выясним, как преодолеваются эти трудности в контексте космологических задач, т. е. в предположении, что пространственное сечение является пространством постоянной кривизны, а изучаемые поля скорости нерелятивистские (а магнитные поля - квазистационарные) в естественной системе отсчета, связанной с реликтовым излучением. Для определенности будем рассматривать сначала пространство отрицательной кривизны и говорить о магнитном поле.

1. Корреляционный тензор в римановом пространстве

Напомним, что в евклидовом пространстве корреляционный тензор магнитного поля $\boldsymbol{H}$ определяется как $R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle H_i(\boldsymbol{x})H_j(\boldsymbol{y})\rangle$, где $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор, соединяющий точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В римановом пространстве векторы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$ находятся в разных касательных пространствах, так что их произведение не определено. Поэтому для построения корреляционного тензора нужно перенести второй вектор в точку приложения первого с помощью параллельного переноса. Рассмотрим геодезическую $\gamma(t)=\{x^i(t)\}$, соединяющую две эти точки и определим $R^{ij}=\langle H^i, T_{21}H^j\rangle$, где T_{21} — параллельный перенос из второй точки в первую.

Обозначим касательные векторы к геодезической $\gamma(t)$ через ξ^i, нормированные касательные векторы через n^i. Как и в евклидовом случае инвариантами движений являются величины g^{ij} и n^in^j. По аналогии с евклидовым случаем $(R_{ij}(\boldsymbol{r})=A(r)n_in_j+B(r)\delta_{ij})$ условие однородности и изотропии естественно понимать как условие того, что корреляционный тензор имеет вид

$$R^{ij}=A(r)n^in^j+B(r)g^{ij}, \tag{1}$$

где r — расстояние по геодезической. Отметим, что мы вынуждены указать путь, по которому переносится вектор из второй точки в первую, поскольку в искривленном пространстве результат переноса зависит от того, по какому пути он проводится. Мы избираем подход, который кажется естественным, однако отмечаем возникающее здесь ограничение сравнительно с евклидовым случаем. Подчеркнем также, что в евклидовом пространстве условие однородности и изотропии можно сформулировать и в несколько другом виде: $R_{ij}(\boldsymbol{r})=\tilde{A}(r)r_ir_j+\tilde{B}(r)\delta_{ij}$, где r^i — вектор, соединяющий точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В нашем случае воспроизвести эту конструкцию затруднительно.

То, что при построении корреляционного тензора мы переносили вектор из точки $\boldsymbol{y}$ в точку $\boldsymbol{x}$, несущественно и при необходимости можно просто поменять точки местами, поскольку свойства корреляционного тензора определяются видом функций A и B, которые зависят от взаимного расположения точек.

В силу условия бездивергентности функции A и B связаны дифференциальным соотношением. Наша цель — получить явный вид этого соотношения.

2. Вспомогательные формулы

Условие бездивергентности в ковариантном виде записывается следующим образом:

$$\langle\nabla_iH^i(\boldsymbol{x})T_{21}H^j(\boldsymbol{y})\rangle=R^{ij}_{;i}=0. \tag{2}$$

Нам нужно выразить это соотношение через функции A и B.

Получим сначала необходимые вспомогательные формулы. Так как векторы ξ^i и n^i параллельны вдоль геодезической $\gamma(t)$, то вдоль геодезической сохраняется их длина, а следовательно, и отношение длин: $\boldsymbol{\xi} = \mu \boldsymbol{n}$, $\xi^i = \mu n^i$.

Пусть одна из точек задана значением $t = 0$. Тогда расстояние по геодезической равно $r = \int_0^t \sqrt{g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t)}\,dt$. Легко проверить, что $n^i \frac{\partial r}{\partial x^i} = \sqrt{g_{ij} n^i n^j} = 1$ и $g^{ij}\frac{\partial r}{\partial x^i} = n^j$.

Прямое вычисление, использующее определение ковариантного дифференцирования, то, что вектор n^i параллельно переносится вдоль геодезической, и то, что метрический тензор ковариантно постоянен, показывает, что условие (2) сводится к соотношению

$$\nabla_i R^{ij} = (A' + A\nabla_i n^i + B')n^j = 0,$$

где штрих означает производную по r. В силу произвольности n^j получаем

$$A' + A\nabla_i n^i + B' = 0.$$

Остается подсчитать $\nabla_i n^i = n^i_{;i}$. Мы проведем этот подсчет в метрике, конформной евклидовой. Отметим, что в этой метрике геодезические являются перепараметризованными отрезками евклидовых прямых. Совместим точку $\boldsymbol{y}$ с началом координат. Пусть u_i — координаты точки $\boldsymbol{x}$ в рассматриваемой системе координат, а $\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Конформный фактор имеет вид

$$\Omega = \frac{2R^2}{R^2 - \rho^2},$$

где R — радиус кривизны пространства.

Непосредственный подсчет показывает, что расстояние между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равно

$$r = 2R \operatorname{arcth}\frac{\rho}{R}.$$

Для вычисления ковариантных производных n^i заметим, что

$$n^p_{;p} = \frac{\partial n^p}{\partial u^p} + \Gamma^p_{p\beta} n^\beta.$$

Символы Кристоффеля, входящие в это выражение, в интересующей нас точке равны (суммирование по повторяющимся индексам здесь не производится) $\Gamma^p_{pk} = \Gamma^k_{kk} = u_k R^{-2}\Omega$, поэтому второй член в сумме равен $3\rho R^{-2}$. Для подсчета первого члена удобно разделить его на вклад, связанный с изменением направления вектора n^i (он равен $\rho^{-1} - \rho R^{-2}$) и величины ρ (он равен $-\rho R^{-2}$). В итоге получаем

$$n^i_{;i} = \frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{R^2}.$$

3. Условие бездивергентности в пространстве Лобачевского

Собирая полученные вспомогательные результаты, убеждаемся, что искомая дифференциальная связь между функциями A и B, выражающая условие бездивергентности, имеет вид

$$A' + 2R\operatorname{cth}\frac{r}{R}A + B' = 0,$$

где R — радиус кривизны.

Разумеется, при малой кривизне ($R \to \infty$) это условие переходит в условие несжимаемости для евклидового случая [2]

$$A' + \frac{2}{r}A + B' = 0.$$

В пространстве Лобачевского, так же как и в евклидовом пространстве, функции A и B удобно выразить через одну функцию $F = A + B$ (продольная корреляционная функция; функцию B называют поперечной корреляционной функцией [3]). В результате получаем для пространства Лобачевского

$$A = -R\frac{\operatorname{th}(r/R)}{2}F', \quad B = F + R\frac{\operatorname{th}(r/R)}{2}F'. \qquad (3)$$

Это представление естественно сравнить с аналогичным представлением для корреляционного тензора в евклидовом пространстве

$$A = -\frac{r}{2}F', \quad B = F + \frac{r}{2}F'.$$

Поскольку $\operatorname{th}\frac{r}{R}$ стремится к конечному пределу при $r/R \to \infty$, при одной и той же функции F коррелятор в пространстве Лобачевского убывает с расстоянием несколько медленнее, чем в евклидовом пространстве. При оценке физического содержания этого различия полезно иметь в виду, что объем шара в пространстве Лобачевского экспоненциально растет с его радиусом, а в евлидовом пространстве — лишь степенным образом. Поэтому для сходимости интегралов, возникающих при подсчете различных пространственных средних, функция F для коррелятора в пространстве Лобачевского должна убывать намного быстрее, чем для коррелятора в евклидовом пространстве.

4. Условие бездивергентности в пространстве положительной кривизны

Для того чтобы получить условие бездивергентности для корреляционного тензора в пространстве положительной кривизны, достаточно формально заменить в условии (3) R на iR. В итоге получаем

$$A = -R\frac{\operatorname{tg}(r/R)}{2}F', \quad B = F + R\frac{\operatorname{tg}(r/R)}{2}F'.$$

Это представление обеспечивает обращение в нуль функции A в точке с $r = \pi R$, т. е. в точке, диаметрально противоположной той точке, в которой вычисляется коррелятор. Это естественно, поскольку в этой точке вектор n^i не определен однозначно. Другая особенность состоит в том, что функция $\operatorname{tg}(r/R)$ обращается в бесконечность при $r = \pi R/2$. Это значит, что для ограниченности коррелятора необходимо потребовать, чтобы $F'(\pi R/2) = 0$. Это условие не находит соответствия для бездивергентных однородных и изотропных в статистическом смысле полей в евклидовом пространстве. Интересно, что именно на расстоянии $r = \pi R/2$ расстояние между геодезическими, выпущенными из одной точки на трехмерной сфере, перестает увеличиваться и начинает уменьшаться. Поскольку нет оснований считать, что $F''(\pi R/2) = 0$, то функция F имеет экстремум в той же точке, что и расстояние между геодезическими.

Отметим также, что поскольку координата r в рассматриваемом пространстве изменяется на конечном интервале значений, то условие убывания коррелятора на бесконечности, естественное для евклидова пространства и пространства Лобачевского, не в полной мере переносится на пространство положительной кривизны.

5. Обсуждение

Мы описали форму статистически однородных, изотропных и зеркально симметричных корреляторов случайных полей в пространствах постоянной кривизны и выписали условие, которое следует для этих корреляторов из бездивергентности этих полей. Оказалось, что это условие отличается от аналогичного условия для полей в евклидовом пространстве. Конечно, это отличие пренебрежимо мало для полей, корреляционный радиус которых мал по сравнению с радиусом кривизны, однако оно становится существенным для полей, корреляционный радиус которых сопоставим или превосходит радиус кривизны. Не исключено, что это различие может привести к интересным результатам при изучении физических полей в ранней Вселенной, радиус кривизны которой может оказаться мал по сравнению с корреляционным радиусом различных физических полей.

Отказ от условия статистической зеркальной симметрии приводит, как известно (см., напр., [4]) к появлению в корреляторе члена, пропорционального антисимметричному символу Леви–Чивита. Нетрудно проверить, что этот член не влияет на формулировку условия бездивергентности. Некоторая тонкость, связанная с этим членом состоит в том, что для его введения необходима ориентируемость пространства [5, 6]. Конечно, пространство Лобачевского и сферическое пространство ориентируемы, однако некоторые пространственные формы постоянной кривизны (например, эллиптическое пространство) ориентируемыми не являются (см., напр., [7]). Тем не менее, как отметил еще в самом начале развития релятивистской космологии Ф. Клейн [8], эллиптическое пространство глобально однородно и изотропно, поэтому в нем тоже можно рассматривать коррелятор в форме (1). Однако здесь расстояние вдоль геодезической до сопряженной точки вдвое меньше, чем на трехмерной сфере, и составляет $\pi R/2$. Поскольку при этом значении r величина $n^i n^j$ становится неопределенной, для корректности представления (1) в эллиптическом пространстве приходится требовать, чтобы $F''(\pi R/2) = 0$.

Более сложные пространственные формы постоянной кривизны являются однородными и изотропными лишь локально [9], что отражается на свойствах крупомасштабных физических полей в этих пространствах [10]. Если мы рассматриваем космологическую модель с отклонениями от однородности и изотропии, то можно говорить лишь о статистически локально однородном и изотропном магнитном поле, для которого коррелятор в соответствующем приближении имеет описанный выше вид. Отметим, однако, что примененная нами конструкция предполагает, что геодезические в рассматриваемом пространстве либо не имеют сопряженных точек, либо они устроены столь просто, как на сфере. Это значит, что при описании мелкомасштабных магнитных полей вблизи гравитационных линз рассмотренная конструкция статистической гидромеханики может оказаться неадеквантой. Отметим в этой связи, что еще большую степень неадекватности обнаруживает понятие статистической однородности и изотропии применительно к тензору кривизны [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-02-00127).

Список литературы

1. *Semikoz V.B., Sokoloff D.D.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2005. **14**, N 11. P. 1839.
2. *Бэтчелор Дж.К.* Теория однородной турбулентности. М., 1955.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. **1**. М., 1991.
4. *Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитные поля в астрофизике. Институт компьютерных исследований. Ижевск, 2006.
5. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* // Письма в ЖЭТФ. 1967. **6**, № 7. С. 772.
6. *Соколов Д.Д.* // Докл. АН СССР. 1970. **195**, № 6. С. 1037.
7. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М., 1982.
8. *Klein F.* // Gött. Nachr. 1918. **1**. S. 394.
9. *Соколов Д.Д.* // Гравитация и теория относительности. 1977. № 12. С. 142.
10. *Соколов Д.Д., Старобинский А.А.* // Астрон. журн. 1975. **52**, № 5. С. 1041.
11. *Иванова Е.В., Соколов Д.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 26.

Correlation tensor of magnetic field in spaces of constant curvature

A. S. Rubashny [1,a], **D. D. Sokoloff** [2,b]

[1] *Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia.*

[2] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

E-mail: [a] *alex.rubashny@gmail.com,* [b] *sokoloff@dds.srcc.msu.su.*

Concept of statistical homogeneity and isotropy of vectorial fields in spaces of constant curvature is discussed. Condition of solenoidality of the correlation tensor is obtained. This condition is shown to be different from corresponding condition for physical fields in the Euclidean space.

Keywords: cosmological models, homogeneity and isotropy, magnetic field.

PACS: 98.80.Jk.

Received 9 December 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2010).

Сведения об авторах

1. Рубашный Алексей Сергеевич — студент мех.-матем. ф-та МГУ; e-mail: alex.rubashny@gmail.com.
2. Соколов Дмитрий Дмитриевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su.