КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Интерпретация решения диффузионно-волнового уравнения с использованием дробного интегродифференцирования

А. Н. Боголюбов[1,a], А. А. Потапов[2,b], С. Ш. Рехвиашвили[3,c]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт радиотехники и электроники РАН. Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7.*
[3] *Кабардино-Балкарский государственный университет, факультет микроэлектроники и компьютерных технологий, кафедра материалов и компонентов твердотельной электроники. Россия, 360004, КБР, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173.*
E-mail: [a] *bogan7@yandex.ru,* [b] *potapov@mail.cplire.ru,* [c] *rsergo@mail.ru*

Статья поступила 28.10.2009, подписана в печать 23.12.2009

Приводится пример реализации метода дробного интегродифференцирования, предложенного в работе [1] для интерпретации решения диффузионно-волнового уравнения.

Ключевые слова: электродинамика, дробные операторы, дробное интегродифференцирование.
УДК: 530.1, 537. PACS: 41.20.Jb, 01.55.+b.

В работе авторов [1] было рассмотрено применение метода дробного интегродифференцирования к задачам классической электродинамики. В частности, были приведены для векторного и скалярного потенциалов уравнения с изменяющимся типом — диффузионно-волновые уравнения. Проанализируем свойства свободного электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными ε и μ исходя из диффузионно-волнового уравнения. Для этого запишем одномерное уравнение

$$\partial_{0t}^{2\alpha}u(x,t) - \frac{(c\tau)^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где t — безразмерное время (отнесенное к τ), под функцией $u(x,t)$ понимается $\boldsymbol{A}$ или φ. Уравнение (1) линейное, и его частное решение представимо в виде

$$u(x,t) = u_0 \exp(ikx)\, z(t), \tag{2}$$

где $z(t)$ — неизвестная функция, u_0 — комплексная амплитуда, k — компонента волнового вектора в направлении x. Подставляя (2) в (1), получаем уравнение

$$\partial_{0t}^{2\alpha}z(t) - \omega^2 z(t) = 0, \tag{3}$$

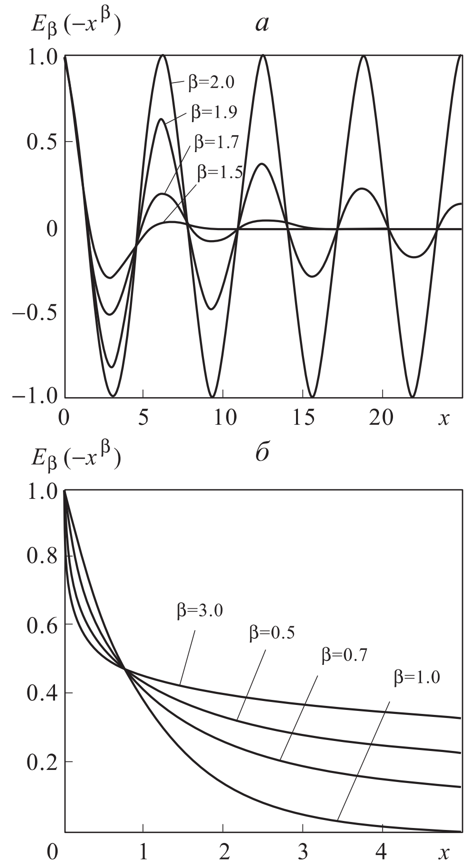
где $\omega = ck\tau/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — безразмерная частота. Частным решением уравнения (3) является функция

$$z(t) = E_{2\alpha}\left(-\omega^2 t^{2\alpha}\right), \quad E_\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(n\beta+1)}, \tag{4}$$

где $E_\beta(x)$ — функция Миттага–Леффлера. Из (2) и (4) находим

$$u(x,t) = u_0 \exp(ikx) E_{2\alpha}\left(-\omega^2 t^{2\alpha}\right). \tag{5}$$

На рисунке в качестве примера показаны графики функции $E_\beta(x)$. Если в (5) параметр α находится в интервале от 1/2 до 1, то по переменной t будем иметь периодическую функцию с частотой ω. Если параметр α находится в интервале от 0 до 1/2, то функция становится монотонно убывающей. Параметры α и τ ответственны за скорость убывания.



Графики функции Миттага–Леффлера при различных значениях параметра β

Для наглядной интерпретации решения (5) выделим из него предельные случаи. При $\alpha = 1$ (гиперболический случай), пользуясь тем, что

$$E_2(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right),$$

для решения уравнения (1) запишем

$$u(x,t) = u_0 \exp(i(kx - \omega t)). \qquad (6)$$

Выражение (6) задает плоскую монохроматическую волну, являющуюся периодической функцией обеих переменных x и t.

При $\alpha = 1/2$ (параболический случай) имеем

$$E_1(x) = \exp(x), \quad u(x,t) = u_0 \exp(ikx)\exp(-\omega^2 t). \qquad (7)$$

Решение (7) является периодическим лишь по переменной x. Его также можно понимать как плоскую волну, но с убывающей со временем амплитудой. При этом время, за которое амплитуда поля уменьшается в e раз, будет равно $t_0 = \varepsilon\mu/(c^2k^2\tau)$.

Таким образом, в нашем случае дробное интегродифференцирование и соответственно феноменологический параметр α учитывают влияние фрактальных свойств движения зарядов в диссипативной среде на создаваемое электромагнитное поле. При уменьшении α происходит затухание электромагнитных волн, причем при медленном диффузионном блуждании ($\alpha < 1/2$) затухание имеет степенную асимптотику $E_{2\alpha}(-t^{2\alpha}) \propto t^{-2\alpha}/\Gamma(1-2\alpha)$, свойственную для многих фрактальных систем [2].

Список литературы

1. *Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* Способ введения дробного интегродифференцирования в классической электродинамике // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 4. С. 9.
2. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М., 2005.

Fractional integro-differentiation interpretation of the diffusion-wave equation solution

A. N. Bogolyubov[1,a] **A. A. Potapov**[2,b] **S. Sh. Rehviashvili**[3,c]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Mokhovaya 11-7, Moscow 125009, Russia.*
[3] *Depertment of Materials and Components of Solid-State Electronics, Faculty of Microelectronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkar State University, Chernyshevskogo 173, Nalchik 360004, Kabardino-Balkar Republic, Russia.*
E-mail: [a] *bogan7@yandex.ru,* [b] *potapov@mail.cplire.ru,* [c] *rsergo@mail.ru.*

The example of the fractional integro-differentiation application is presented. The method for the interpretation of of the diffusion-wave equation solution was proposed in [1].

Keywords: electrodynamics, fractional operators, fractional integro-differentiation.
PACS: 41.20.Jb, 01.55.+b.
Received 28 October 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2010).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Потапов Александр Алексеевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр.; тел.: (495) 629-34-06, e-mail: potapov@mail.cplire.ru.
3. Рехвиашвили Серго Шотович — докт. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (866) 242-71-04, e-mail: rsergo@mail.ru.